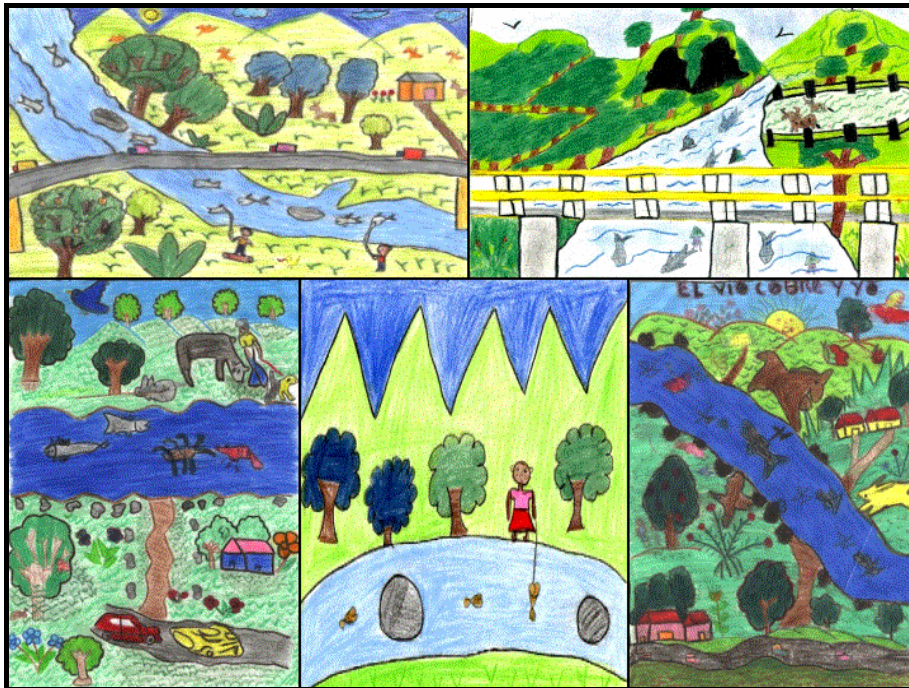


Tesis de Grado en Ingeniería Civil

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA EVOLUCIÓN DE MÁRGENES EN CANALES CURVOS DE MATERIAL SUELTO



PABLO EZEQUIEL GARCÍA

2006

Tesis de Grado en Ingeniería Civil

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA EVOLUCIÓN DE MÁRGENES EN CANALES CURVOS DE MATERIAL SUELTO

Tesista: Sr. Pablo Ezequiel GARCÍA

Tutor: Dr. Carlos Ernesto LACIANA (FIUBA – Universidad de Buenos Aires)

Co Tutor: Dr. Ángel N. MENÉNDEZ (FIUBA – Universidad de Buenos Aires)

Tribunal Examinador:

Dra. Agnes PATERSON

Ing. Juan HOPWOOD

Ing. Daniel BREA

AGRADECIMIENTOS

Quisiera realizar un sencillo agradecimiento a las siguientes personas que, de una u otra manera estuvieron involucradas en esta tesis:

A los miembros del jurado, que invirtieron tiempo y esfuerzo en leer esta tesis.

A Carlos y Ángel (los doctores Laciana y Menendez respectivamente) por ser los timoneles de este barco, los mismos que supieron rumbearlo con gran sapiencia y docencia, aún en momentos de tormentas y nubarrones.

A mis viejos, por ser los que continuamente mantienen a flote esta embarcación, con su amor, con sus consejos y con su comprensión.

A mis cuatro hermanos, fieles y divertidos compañeros de tripulación, que nunca dudaron en darme una mano en los infinitos quehaceres caseros a fin de enfilar un poco mejor el rumbo de esta aventura.

A mis cuatro abuelos, que, ya sea desde el cielo o desde el llano, son y serán los eternos faros de mi vida, aquellos que siempre marcan el rumbo correcto, aquellos que iluminan mi vida con amor, ternura y consejos.

A mis amigos, por ser la tripulación mas fiel y compañera que el mar jamás haya visto, hermanos de sal en este océano de alegrías y tristezas.

A Gaby, por enseñarme con su amor que hasta el agua del mar puede ser dulce.

A los amigos de la facu, aguerridos compañeros de trinchera, por ser lo más valioso que me llevo de mi travesía universitaria.

A los amigos del laburo, por acompañar y enseñarme numerosas herramientas que facilitaron y embellecieron la navegación.

Al Barba, que sencillamente me dio la oportunidad de navegar en este increíble océano, que algunos llaman vida.

A toda mi gran familia (tíos, tías, primos, etc., etc.), esa que en cada reunión, produce un problema logístico de sillas y mesas, por ser el gran tesoro que lleva este marinero.

A los ríos, por ser una fuente inagotable de misterio y magia.

Gracias a todos por ayudarme a llegar a buen puerto!

Las olas del destino
a esta playa me trajeron.
Con maderas partidas,
mi canoa tallé.
Soy eterno peregrino
de los mares, de los sueños;
cuando suba la marea,
cuando haya fuego en los altares
soplaré mi suerte al viento....
Suelten las amarras!!
y desplieguen las velas!!
a navegar el abismo....
A navegar el silencio!
A navegar tempestades!
Navegar y navegar....

"Astrolabio", Eduardo "Skay" Beilinson.

Y vos preguntarás, por qué esperamos tanto?
solo para tomar impulso
y llegar más alto....

"No hay dolor," Emiliano Brancciani

PRÓLOGO.....	7
--------------	---

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN.....	9
1.1 El problema de la erosión de márgenes	9

CAPÍTULO 2

REVISIÓN HISTÓRICA (O ESTADO DEL ARTE) DEL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA.....	20
2.1 Modelos Hidrodinámicos.....	20
2.2 Modelos Sedimentológicos.....	23
2.3 Modelos de Estabilidad de Márgenes.....	27
2.4 Validaciones y aplicaciones de los diferentes modelos revistos.....	28

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO.....	34
3.1 Modelo Hidrodinámico.....	35
3.1.1 Modelo Hidrodinámico Longitudinal.....	35
3.1.2 Modelo Hidrodinámico Transversal.....	37
3.2 Modelo Sedimentológico.....	40
3.2.1 Modelo sedimentológico de partículas de fondo.....	40
3.2.1.1 Sistema de coordenadas.....	40
3.2.1.2 Velocidad de las partículas de sedimento.....	45
3.2.1.3 Tasa de transporte de fondo.....	48
3.2.2 Modelo sedimentológico de partículas de fondo con la inclusión de efecto de curvatura.....	51
3.2.2.1 Velocidad del fluido.....	51
3.2.2.2 Velocidad de las partículas de sedimento.....	53
3.2.2.3 Tasa de transporte de fondo.....	54
3.3 Modelo Morfológico.....	56
3.4 Modelo de Fallas de Márgenes.....	57

CAPÍTULO 4

RESOLUCIÓN NUMÉRICA E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL.....	61
4.1 Implementación.....	61
4.2 Resolución Numérica del Modelo Hidrodinámico.....	64
4.2.1 Esquema de diferencias finitas.....	64
4.2.2 Método de Newton Raphson.....	64

4.3	Resolución Numérica del Modelo Sedimentológico.....	64
4.3.1	Resolución del sistema de ecuaciones [40].....	64
4.3.2	Resolución del sistema de ecuaciones [65].....	66
4.4	Resolución Numérica del Modelo Morfológico.....	68

CAPÍTULO 5

	VALIDACIÓN DEL MODELO.....	70
5.1	Validaciones del modelo propuesto.....	70
5.1.1	Canal recto.....	70
5.1.2	Canal curvo.....	77

CAPÍTULO 6

	ENSAYOS NUMÉRICOS.....	83
6.1	Evoluciones temporales de la sección	84
6.2	Ensayos de estabilización.....	91

CAPÍTULO 7

	CONCLUSIONES	97
	LISTA DE SIMBOLOS	100
	REFERENCIAS.....	104

APÉNDICE I

	OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES [24] Y [25]	109
--	---	-----

APÉNDICE II

	MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.....	112
--	------------------------------------	-----

APÉNDICE III

	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	118
--	--------------------------------	-----

APÉNDICE IV

	CANALIZACIÓN DEL RÍO RECONQUISTA	120
--	--	-----

PRÓLOGO

La presente Tesis de Ingeniería Civil forma parte de los requerimientos académicos para la obtención del título de grado que otorga la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, según consta en los planes de estudio vigentes aprobados por el Consejo Superior de la facultad (C.S. N° 1034/90).

El tutor de esta tesis fue el profesor Dr. Carlos E. Laciana y el co tutor fue el Dr. Ángel N. Menéndez, quienes propusieron el tema de tesis y plan de estudio, el cual fue remitido a la Comisión Curricular Permanente de Ingeniería Civil, donde fue evaluado y aprobado según consta en la resolución 534/05 del Decano de la Facultad con fecha 29 de marzo de 2005.

Este trabajo se ha realizado en las instalaciones del Laboratorio de Modelación Matemática (LaMM) perteneciente al Departamento de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires y en el laboratorio del Programa de Hidráulica Computacional (PHC) perteneciente al Laboratorio de Hidráulica del Instituto Nacional del Agua (INA).

La presente tesis se enmarca dentro del proyecto de investigación *"Simulación Numérica de Evolución Morfológica de Cauces Fluviales con Erosión de Márgenes"* (UBACyT 2004-2007 código: I010 y ANPCyT PICT 2002 código: 12138.)

INTRODUCCIÓN



*Todo el tiempo oía el río, como un lento y suave rugido.
El sueño, con la forma curva de un río susurrante, fluyó en mi mente.
Finalmente todo era el río, todo volvía al río.*

“Féretros tallados a mano”, Truman Capote.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. EL PROBLEMA DE LA EROSIÓN DE MÁRGENES

Los cambios morfológicos producidos por la erosión de márgenes se dan en numerosos ríos. Estos cambios, a veces producidos en forma abrupta, determinan efectos negativos de importancia tanto en poblaciones próximas a las costas como en numerosas obras de infraestructuras que no consideran en forma correcta dicho fenómeno. Víctimas humanas, viviendas que se derrumban o desaparecen, sectores productivos arrasados, puentes que se caen, vías de acceso terrestre inutilizadas y demás nefastas consecuencias trae aparejado el complejo problema de la erosión de márgenes.

En la serie de figuras 1.1 a 1.5 se ven los efectos de la erosión de márgenes afectando directamente a viviendas en zonas cercanas a las mismas.

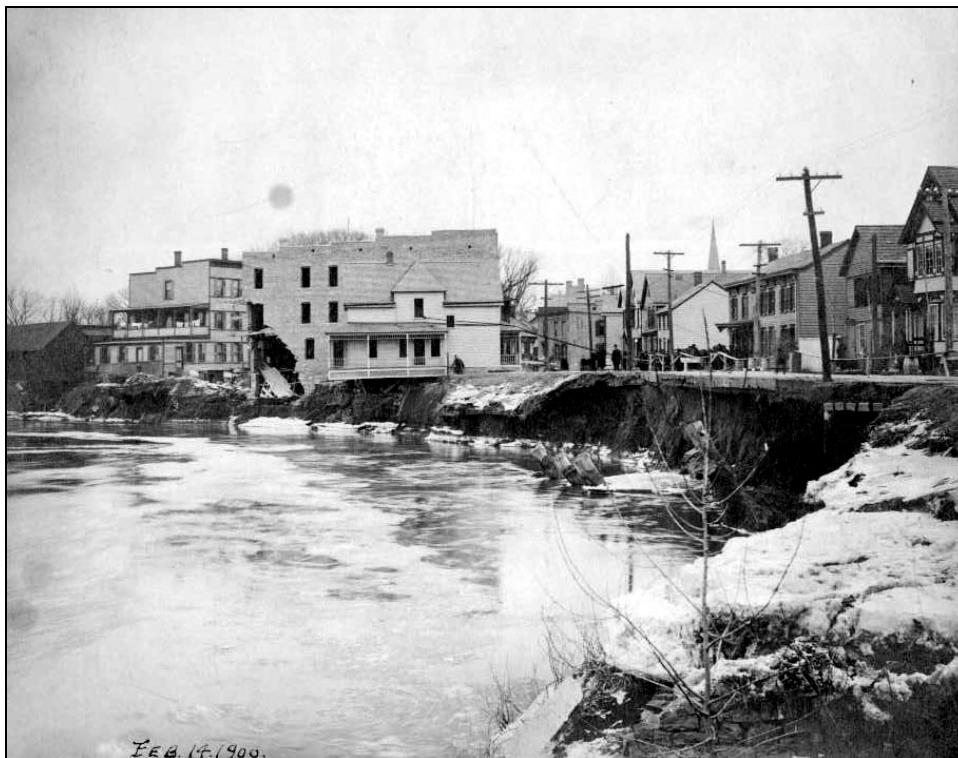


Figura 1.1 Sector de viviendas afectadas por la erosión de márgenes.



Figura 1.2 Vivienda con riesgo de afectación.



Figura 1.3 Vivienda derrumbada a causa de la erosión de márgenes.

En las figuras 1.4 y 1.5 se ven imágenes de las viviendas afectadas en la ciudad de Tartagal durante las crecidas del verano del 2006.



Figura 1.4 Zona de viviendas afectadas en la ciudad de Tartagal.



Figura 1.5 Zona de viviendas afectadas en la ciudad de Tartagal.

La siguiente serie de fotos (figuras 1.6 a 1.9) muestra distintas vías de comunicación terrestres afectadas por la acreción de márgenes.



Figura 1.6 Carretera afectada.



Figura 1.7 Ruta expuesta a los efectos de la erosión.



Figura 1.8 Carretera seriamente afectada por la erosión de márgenes.



Figura 1.9 Carretera parcialmente afectada.

Las figuras 1.10 y 1.12 muestran una serie de puentes (tanto viales como ferroviarios) colapsados debido al fenómeno erosivo en las márgenes.



Figura 1.10 Puente vial afectado por la erosión de márgenes.



Figura 1.11 Puente vial afectado por la erosión de márgenes.



Figura 1.12 Puente ferroviario colapsado por la erosión de márgenes.

Para concluir con la serie de fotografías, y a fin de tener una idea generalizada de la amplia gama de problemas que trae aparejado el fenómeno de la erosión de márgenes, vemos la figura 1.13 donde se muestra un sector productivo expuesto a la acción erosiva.

Es debido a los efectos recién mencionados que el tema de la erosión de márgenes en particular, constituye un tema de gran actualidad, cuya modelación no ha sido aún plenamente desarrollada. Un primer paso es modelar canales de laboratorio, para los cuales existen experiencias que permiten validar el modelo. La idea es darle la mayor versatilidad a estos modelos de manera que al aplicarlos a un caso natural se le pueda incorporar fácilmente la batimetría correspondiente, permitiendo además describir desde tramos rectos hasta meandros.



Figura 1.13 Sector productivo expuesto a la erosión de márgenes.

En la presente tesis, los canales a modelar están constituidos por material no cohesivo (arenas), sin embargo su implementación contempla la posibilidad de extenderlos a material cohesivo en una etapa posterior al presente trabajo. La filosofía de trabajo adoptada para el desarrollo de este modelo es la de reducir el problema a los grados de libertad relevantes, a fin de aportar mayor claridad conceptual y más eficiencia computacional. Así se utiliza una formulación integrada en la vertical para el modelo hidrodinámico, lo cual reduce el problema a una dimensión para el canal recto. En el caso curvo, a la corriente principal longitudinal se le superpone la corriente secundaria lateral, la cual es la responsable de la erosión asimétrica en el fondo y las márgenes.

Para el transporte de sedimentos se ha preferido un planteo a partir de primeros principios en lugar de la utilización de fórmulas empíricas. Este tratamiento, tiene la ventaja de facilitar las posteriores generalizaciones del formalismo, en razón de que

todos los elementos intervinientes tienen un significado físico bien establecido y no son simples números ajustados a problemas particulares, como ocurre con los modelos empíricos.

En síntesis podemos decir que el modelo matemático utilizado está formado por cuatro submodelos: uno hidrodinámico, otro sedimentológico, uno morfológico y un cuarto para modelar la erosión de márgenes, basado en la pendiente crítica. El primero resulta de imponer la conservación de la cantidad de movimiento del fluido en la dirección longitudinal, estando el mismo integrado en la vertical (Método de Distribución Lateral). Para el segundo se plantea la conservación de momento de las partículas de sedimento de fondo y las ecuaciones dinámicas para las partículas en suspensión. Finalmente para el tercer submodelo se plantea la ecuación de continuidad (Ecuación de Exner).

A continuación se verá, en primer lugar el tratamiento histórico que tuvo el problema de la erosión de márgenes, a fin de tener una noción de los alcances y limitaciones que tienen actualmente los modelos que abordan este fenómeno.

En el capítulo siguiente se desarrolla el modelo propuesto en esta tesis, indicando sus innovaciones con respecto a lo hecho hasta el momento.

Con la metodología de cálculo desarrollada matemáticamente, se pasará al próximo capítulo, el cual explica de qué manera fue implementado numéricamente y computacionalmente el modelo propuesto.

Luego se presentan las validaciones del modelo, a fin de conocer el grado de predictividad del mismo. Estas validaciones se hacen, en primer lugar, para un canal recto, cuya formulación es limitada para este tipo de caso. En segundo lugar se valida el canal curvo, resuelto con una formulación general, que incluye ambos casos.

Como primer producto del modelo, se presentan ensayos numéricos, que plantean la evolución de canales de magnitudes más reales que las de laboratorio. Se realizan ensayos de evolución de la forma de la sección, ensayos que tienden a sacar relaciones en la evolución del ancho de la superficie libre del canal en el tiempo para distintas condiciones de curvatura del mismo (desde un canal con un

radio de curvatura pequeño, hasta canales con radio de curvatura considerables, lo que haría que se asemeje a un canal recto).

Finalmente se obtienen conclusiones a partir de los resultados obtenidos, y se plantean los pasos a seguir para continuar desarrollando un modelo mucho mas amplio, que teniendo como base fundamental la metodología aquí propuesta, sea capaz de abordar otros problemas, como ser canales con material cohesivo, meandros, etc.

REVISIÓN HISTÓRICA (O ESTADO DEL ARTE) DEL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA



*Pero recordé a Doña Felipa y a la mestiza de la Chichería.
Tú eres el río Sonora dije, pensando en la cabecilla y mirando a lo lejos la corriente que se perdía en
una curva violenta, entre flores de retama.
No e alcanzarán ¡Jajayllas!"*

“Los ríos profundos”, José M. Arguedas.

2. REVISIÓN HISTÓRICA (O ESTADO DEL ARTE) DEL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA

A continuación se presentan distintos modelos que se plantearon hasta el momento para abordar el problema de la erosión de márgenes y su correcta estimación.

La revisión de estos modelos incluye la descripción de los submodelos que los componen (hidrodinámicos, sedimentológicos y de mecanismo de falla de las márgenes), es decir, sus principales características y limitaciones, bajo que hipótesis se desarrollaron y el rango de validez para su posterior aplicación.

También se informa sobre las validaciones de estos modelos y su nivel de concordancia.

2.1. Modelos Hidrodinámicos

Los modelos analizados y sus principales características se presentan en la tabla 2.1. Ahí mismo también se detallan las aproximaciones y simplificaciones que tienen los distintos modelos para estimar el campo de velocidades en el dominio computacional.

A pesar de su indudable importancia, el análisis de flujos que sobrepasen las márgenes es excluido de todas estas aproximaciones. Las aproximaciones están basadas en simplificaciones de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de continuidad del fluido, y por lo tanto su validez esta limitada a las condiciones particulares definidas al realizarse las simplificaciones.

Adicionalmente, cada aproximación requiere una estimación del factor de fricción, el cual es usualmente especificado por el usuario y se calcula usando alguna ecuación empírica de rugosidad. La estimación del factor de fricción puede permitir, o no, la variación del mismo en el tiempo y en el espacio (tabla 2.1). Cada una de las ecuaciones de resistencia al flujo presentadas en la tabla 2.1, son, estrictamente hablando, validas solamente para las condiciones físicas

correspondientes a su determinación. Ninguno de los modelos que se presentan en la tabla 2.1 tienen en cuenta el efecto de la vegetación en el flujo.

La rutina del submodelo hidrodinámico del modelo FLUVIAL-12 (Chang 1988a, b) calcula la elevación de la superficie del agua y el gradiente de energía en cada una de las secciones transversales resolviendo versiones unidimensionales de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad del fluido.

Para flujos constantes, se utilizan los métodos de paso fijo, mientras que los procedimientos de solución sugeridos por Fread (1971, 1974) y Chow (1973) son utilizados para rutinas de flujos no constantes. Una corrección por la resistencia al flujo debido al efecto del flujo secundario en canales curvos fue realizada por Chang (1988a). Osman (1985), Alonso & Combs (1986) y Borah & Bordoloi (1989) desarrollaron aproximaciones similares para las rutinas hidrodinámicas en sus respectivos modelos morfológicos. A diferencia del modelo FLUVIAL-12, esos métodos también desprecian las corrientes secundarias y son aplicables a flujos constantes, aunque los flujos no constantes pueden ser aproximados a través del uso de un hidrograma, con descargas constantes en distintos pasos de tiempo. Las rutinas de los métodos unidimensionales (1D) proveen estimaciones de los parámetros del flujo promediados en las secciones transversales y son incapaces de resolver las tensiones de corte en las proximidades de las márgenes con la suficiente precisión para el propósito de estimar la erosión fluvial de los materiales de las márgenes.

Se realizaron varios intentos para tener en cuenta la variación lateral del flujo. Tanto los modelos GSTARS (Molinas & Yang 1986; Yang et al. 1988) como el BRI-STARS (Simon et al. 1991) emplean una rutina hidrodinámica cuasi bidimensional (-2D) basada en la aproximación del tubo de corriente. Las aproximaciones basadas en el tubo de corriente son limitadas, ya que normalmente ellas excluyen el proceso de intercambio de momento debido a las corrientes secundarias y a las tensiones laterales inducidas por la fricción del fluido con las márgenes, además son solo aplicables en flujos estables. Por lo tanto, es esperable, que estas aproximaciones tengan una muy baja capacidad predictiva para aplicaciones en las regiones cercanas a las márgenes.

Darby & Thorne (1996a) adoptan un método cuasi bidimensional en donde las distribuciones de la velocidad del flujo y las tensiones de corte fueron estimadas en

cada sección transversal mediante soluciones numéricas de una versión de las ecuaciones de momento y de continuidad del fluido, en las cuales los términos laterales de las tensiones de corte son conservados (Wark et al. 1990). El método es válido para flujos constantes y uniformes, y fue aplicado en conjunto con una rutina unidimensional de variación gradual del flujo (Chow 1973), para estimar las variaciones longitudinales de las elevaciones de la superficie del agua y el gradiente de energía en cada sección modelada. El submodelo hidrodinámico empleado por Darby & Thorne proporciona una mejorada representación del comportamiento del flujo en comparación con las rutinas basadas en el flujo en tubos de corrientes. Sin embargo, la validación de este método es limitado a los casos en donde el flujo secundario sea despreciable (la aproximación es conducente solo para el caso de canales rectos).

El submodelo RIPA (submodelo bidimensional del flujo promediado en la profundidad) desarrollado por Mosselman (1992) esta basado en las ecuaciones diferenciales que expresan la conservación del momento y la masa del fluido. Este modelo incluye una corrección en el campo del fluido debido a la deformación que introduce la corriente secundaria, pero la influencia de las tensiones laterales cercanas a las márgenes es despreciable. Wiele (1992) incluye ambos términos en su modelo hidrodinámico.

Los submodelos hidrodinámicos utilizados por Pizzuto (1990) y Kovacs & Parker (1994) representan la distribución de la tensión de corte del fluido inducida en márgenes de ríos con suaves curvaturas. Los métodos son validos para flujos constantes y uniforme; los mismos incluyen el término de la tensión lateral de corte pero ignoran la transferencia del momento debido a las corrientes secundarias. Ambos métodos son validos mientras la curvatura del canal sea pequeña.

En el modelo CCHEBank (Li & Wang 1993, 1994), el campo del fluido es resuelto usando el CCHE3D (Wang & Hu, 1990), un avanzado modelo hidrodinámico tridimensional (3D), el cual puede simular campos de velocidades y superficies libres tridimensionales para flujos turbulentos en canales abiertos. La corriente secundaria y la tensión lateral de corte están también incluidas en el modelo. Este modelo hidrodinámico 3D es el que menos simplificaciones posee de los modelos anteriormente mencionados.

Tabla 2.1. Resumen de las características de los distintos modelos hidrodinámicos revisados

Modelo	Dimensión	Variación de la descarga en el tiempo	Flujo secundario	Tensión Lateral	Factor fricción	Fórmula de resistencia al flujo ¹
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
Darby & Thorne	Cuasi 2D ²	Hidrograma	No	Sí	Variable en tiempo y espacio	Strickler
CCHEBank	3D	Flujos no constantes	Sí	Sí	Constante	Keulegan
Kovacs & Parker	2D	Flujos constantes	No	Sí	Constante	Keulegan
Wiele	2D	Flujos constantes	No	Sí	Constante	Keulegan
RIPA	2D	Hidrograma			Constante	Especificado
Simon et al.	Cuasi 2D ²	Hidrograma	No	No	Variable en tiempo y espacio	Strickler, Darcy y Chezy
Pizzuto	2D	Flujos constantes	No	Sí	Constante	Einstein
STREAM2	1D	Hidrograma	No	No	Constante	Especificado
GSTARS	Cuasi 2D ²	Hidrograma	No	No	Variable en tiempo y espacio	Strickler, Darcy y Chezy
FLUVIAL-12	1D	Flujos no constantes	Sí	No	Variable en tiempo y espacio	Strickler y Brownlie
Alonso & Combs	1D	Hidrograma	No	No	Constante	Especificado
WIDTH	1D	Hidrograma	No	No	Variable en tiempo y espacio	Strickler
Nota: Strickler = Strickler (1923); Keulegan = Keulegan (1938); Einstein = Einstein (1950); Brownlie = Brownlie (1983)						
¹ Ninguna de estas formulas tiene en cuenta el efecto de formas de fondo						
² Con modelos cuasi dimensionales (2D), se esta refiriendo a los modelos que simulan la variación lateral de la topografía del fondo a través del uso múltiple de flujos de corrientes 1D						

2.2. Modelos Sedimentológicos

Los métodos que tratan el comportamiento de los sedimentos en cada uno de los doce modelos anteriormente mencionados, se encuentran resumidos en la tabla 2.2. La modelación del comportamiento de los sedimentos se logra relacionando el transporte de sedimentos en cada nodo de cómputo con el campo del flujo y las características físicas del material constitutivo del lecho. Las diferencias espaciales en

el flujo de sedimentos estimadas mediante la resolución de la ecuación de continuidad de sedimentos, determinan la evolución de la topografía del lecho.

Para estimar el campo del flujo de sedimentos, se utilizan ecuaciones de transporte empíricas previamente calibradas. Algunos modelos ofrecen a los usuarios la opción de utilizar alguna ecuación específica de un menú de posibilidades. La validez de los distintos modelos está limitada según las condiciones particulares en las que fueran calibradas las distintas ecuaciones de transporte que ellos utilizan. Aún sin estas restricciones, y asumiendo en forma optimista que el campo de flujo ha sido predicho con gran precisión, la modelación del flujo de sedimentos es propensa a introducir errores de importante magnitud.

Una limitación particular para las aplicaciones de la modelación de la evolución de cauces es que la mayoría de las ecuaciones de transporte de sedimentos son validas solamente en los casos en que la inclinación de la superficie del lecho es muy suave, es decir, presenta pequeños ángulos ($\text{sen } \theta < 0.1$). Si se piensa en canales conformados por materiales no cohesivos, las ecuaciones son aplicadas en márgenes que están usualmente inclinadas en ángulos cerca de los ángulos de reposo de los materiales constitutivos (aproximadamente 35°). La ecuación vectorial para el transporte de la carga de fondo desarrollado por Kovacs & Parker (1994), e incluida en su modelo de erosión de márgenes, es la única que tiene en cuenta los efectos de grandes pendientes transversales en el fondo ($\text{sen } \theta > 0.1$)

En algunos modelos, la clasificación de sedimentos se realiza mediante el uso de la teoría de una capa de mezcla o capa activa. Una buena modelación de la distribución del tamaño de los sedimentos del material constitutivo del fondo del lecho es fundamental para que tanto el submodelo que calcula la resistencia al fluido como el submodelo que calcula el campo de transporte de los sedimentos tengan la posibilidad de ir prediciendo sus respectivos parámetros con aceptable exactitud durante la simulación. La investigación ha demostrado que en ríos inestables, el ajuste del tamaño del sedimento del material del lecho es tan importante como el ajuste del gradiente de energía, de la profundidad o del ancho (Hoey & Ferguson 1994). La capacidad para poder explicar el transporte de mezclas heterogéneas de sedimentos es particularmente importante en el contexto de los modelos de evolución de cauces, en donde la distribución del tamaño del grano de

los materiales de las márgenes erosionadas es, a menudo, absolutamente diferente de la distribución del material del lecho original. En la tabla 2.2 se indica que modelos tienen en cuenta la teoría de la capa de mezcla.

El gran rango de potenciales tamaños de granos, frecuentemente involucrados en los procesos de evolución de cauces, determina que tanto el flujo de sedimentos que componen la carga de fondo, como el flujo de sedimentos en suspensión, deben ser tenidos en cuenta para el modelaje de los cambios en el lecho.

En cada modelo, los cambios en las elevaciones del fondo resultan de las diferencias en el campo de los flujos de sedimentos resultantes, calculados a partir de la solución numérica de la ecuación de continuidad de sedimentos. La ecuación de continuidad de sedimentos es usualmente simplificada despreciando alguno de los términos diferenciales del flujo longitudinal o transversal de sedimentos. Estas simplificaciones limitan la validez de dichos modelos. Se puede demostrar que tanto las diferencias espaciales y temporales de los flujos de sedimento transversales y longitudinales, son igualmente importantes en el control de los cambios de la topografía del lecho en zonas cercanas a las márgenes (Darby & Thorne 1992).

Simon et al. (1991) propone un modelo sedimentológico cuasi bidimensional basado en el concepto de los tubos de corriente, empleado en el modelo GSTARS. Darby & Thorne (1996a) dividen cada sección transversal modelada en tres segmentos (uno central y dos laterales cercanos a las márgenes). Esto fue hecho para proporcionar estimaciones más refinadas de la evolución de la topografía del fondo en las zonas cercanas a las márgenes. Cada segmento lateral se extiende hasta una distancia coincidente con el doble de la altura de la margen, tomada desde la base de la misma. En contraste con las aproximaciones cuasi bidimensionales, las soluciones completamente bidimensionales de la ecuación de continuidad de sedimentos, proveen una definición superior, aunque no necesariamente más exacta, de las estimaciones de los cambios de la topografía del fondo en las zonas cercanas a las márgenes.

Tabla 2.2. Resumen de las características de los distintos modelos sedimentológicos
 revisionados

Modelo	Dimensión	Carga de fondo	Carga en suspensión	Ecuaciones de Transporte	Clasificación de sedimentos	Material del fondo
[1]	[2]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
Darby & Thorne	Cuasi 2D	Sí	Sí	Engelund & Hansen (1967)	Sí	Arena
CCHEBank	3D	Sí	No	Meyer-Peter & Muller (1948)	No	Grava
Kovacs & Parker	2D	Sí	No	Kovacs & Parker (1994)	No	Grava
Wiele	2D	Sí	No	Parker (1979) y Meyer-Peter & Muller (1948)	No	Arena y Grava
RIPA	2D	Sí	No	Engelund & Hansen (1967) y Meyer-Peter & Muller (1948)	No	Arena y Grava
Simon et al.	Cuasi 2D	Sí	Sí	Yang (1973, 1984), Ackers & White (1973) y Engelund & Hansen (1967)	Sí	Arena y Grava
Pizzuto	2D	Sí	No	Parker (1983)	No	Arena
STREAM2	1D	Sí	Sí	Yang (1973), Graf (1971) y Meyer-Peter & Muller (1948)	Sí	Arena y Grava
GSTARS	Cuasi 2D	Sí	Sí	Yang (1973, 1984), Ackers & White (1973) y Engelund & Hansen (1967)	Sí	Arena y Grava
FLUVIAL-12	1D	Sí	Sí	Yang (1973, 1984), Parker et al. (1982), Ackers & White (1973), Engelund & Hansen (1967) y Graf (1971)	Sí	Arena y Grava
Alonso & Combs	1D	Sí	Sí	Alonso et al. (1981)	Sí	Arena y Grava
WIDTH	1D	Sí	Sí	Engelund & Hansen (1967)	No	Arena

Los procedimientos unidimensionales para el cálculo del campo del flujo de sedimentos, no tienen en cuenta el transporte de sedimentos transversales y requieren asumir varias hipótesis concernientes a la distribución de los cambios predecidos en la elevación del fondo a través de la sección transversal. En este contexto, las áreas

más importantes son las regiones cercanas a las márgenes, ya que los cambios predichos en la elevación del fondo influyen directamente en la estabilidad de las márgenes, y por lo tanto, en las tasas modeladas de erosión o deposición. Por ejemplo, Osman (1985), asume que los cambios en el nivel del fondo se distribuyen uniformemente sobre toda la sección transversal. En contraste, Alonso & Combs (1986) y Borah & Bordoloi (1989) utilizan varias consideraciones para distribuir las erosiones y las deposiciones en forma más realista a través de la sección. Alonso & Combs (1986) consideran una deposición no uniforme de los sedimentos a través de la sección transversal usando las relaciones que describen el flujo lateral de sedimentos suspendidos propuestas por Parker (1978). Ninguno de los modelos descritos en la tabla 2.2 tienen en cuenta una distribución no uniforme de las erosiones.

2.3. Modelos de Estabilidad de Márgenes

Para márgenes de ríos no cohesivos, se propusieron varios modelos, como los de Wiele & Paola (1989), Pizzuto (1990), Kovacs (1992), Wiele (1992), Li & Wang (1993, 1994), y Kovacs & Parker (1994). Estas aproximaciones pueden ser subdivididas en dos categorías. En primer lugar, Pizzuto (1990) y Li & Wang (1993, 1994) simulan el mecanismo de la erosión de márgenes usando un procedimiento heurístico. Cuando la pendiente de la margen excede el ángulo de reposo del material que la constituye, se utiliza un modelo de falla heurístico, tal que el plano de falla adquiera la inclinación del ángulo de reposo del material. El sedimento que se encontraba por sobre el plano de falla, es removido pendiente abajo, formando un depósito con una superficie superior lineal. Los autores de los mencionados modelos dejan bien en claro que los mismos fueron desarrollados para sedimentos no cohesivos ideales, pero es de notar que, en los ambientes naturales, las influencias de la trabazón entre partículas, la presión intersticial, y la vegetación le dan a los mismos una "cohesión aparente", por lo que el modelo de falla propuesto es inapropiado.

La segunda categoría es caracterizada por el trabajo de Kovacs & Parker (1994). Su ecuación vectorial para el transporte de la carga de fondo y su modelo de erosión de márgenes representan un considerable avance en la modelación del transporte de sedimentos no cohesivos. Kovacs & Parker (1994) notaron que el problema

fundamental de los análisis previos sobre el tema, radicaba en el empleo de formulaciones validas solamente para ángulos mucho menores que el ángulo de reposo, pero es precisamente el arrastre y el transporte de partículas de sedimento no cohesivos en pendientes elevadas el problema de mayor interés práctico. Para solucionar este problema, Kovacs & Parker (1994) formularon una ecuación vectorial de transporte para la carga de fondo (Parker & Kovacs 1993) que fuese aplicable a pendientes mayores que las correspondientes a las del ángulo de reposo, tanto en la direcciones longitudinal como en la dirección transversal. Kovacs & Parker (1994) aplicaron la ecuación vectorial de transporte para la carga de fondo para simular la evolución del cauce observada por Ikeda (1981) en sus estudios experimentales. Siguiendo con su modelo, la ampliación del ancho del canal se inicia cuando la erosión de márgenes a lo largo de la parte inferior de las mismas provoca que la pendiente local de la parte superior sobrepase el ángulo de reposo del sedimento. Esto genera una discontinuidad en la pendiente de la margen entre la parte superior empinada y la zona inferior de la misma. Esta discontinuidad migra hacia la parte superior de la margen, ampliando el ancho del canal a medida que se propaga. Usando su propia ecuación de transporte para la carga de fondo y la ecuación de continuidad de sedimentos, Kovacs & Parker (1994) obtuvieron una rigurosa expresión para la velocidad de propagación de la discontinuidad en la pendiente de la margen, permitiéndoles reproducir las tasas de erosión observadas por Ikeda (1981).

2.4. Validaciones y Aplicaciones de los diferentes modelos revistos

Se resumen ahora las capacidades, las habilidades predictivas, el alcance, las limitaciones y la utilidad de los distintos modelos numéricos vistos. La tabla 2.3 muestra el rango de condiciones en donde se pueden aplicar los distintos modelos.

Los modelos revisionados aplicables a márgenes de material no cohesivos (Pizzuto 1990; Wiele 1992; Li & Wang 1993, 1994; Kovacs & Parker (1994) fueron testeados con una serie de datos obtenidos en estudios de laboratorio (Ikeda 1981). Los resultados de esas validaciones se muestran en las figuras 2.1 a 2.4. Sin embargo no se muestra una comparación del funcionamiento relativo de estos modelos entre sí, ya que existen diferencias (pequeñas, pero significativas) en los valores numéricos de ciertos coeficientes usados por cada uno de los autores recién mencionados.

Específicamente, las diferencias se dan en la tensión adimensional crítica de Shields y en el ángulo de fricción del material constitutivo de las márgenes.

Tabla 2.3. Resumen del rango de aplicación de los distintos modelos revisados

Modelo	Tipo de canal donde es aplicable	Validación con datos de laboratorio	Validación con datos de campo	Manual de Usuario
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Darby & Thorne	Recto	No	Si	No
CCHEBank	Recto	Si	No	No
Kovacs & Parker	Recto	Si	No	Si
Wiele	Recto	Si	Si	No
RIPA	Arbitrario	No	Si	No
Simon et al.	Recto	No	No	No
Pizzuto	Recto	Si	No	No
STREAM2	Recto	No	Si	No
GSTARS	Arbitrario	No	Si	Si
FLUVIAL-12	Arbitrario	No	Si	Si
Alonso & Combs	Recto	No	No	No
WIDTH	Recto	No	No	No

En la figura 2.1, se ve la validación del modelo de Kovacs & Parker (1994), donde es de notar que el mismo predice secciones transversales mayores a las medidas.

El modelo de Pizzuto (1990) (figura 2.2) provee un buen acuerdo entre las formas del canal simuladas y medidas a lo largo de todo el tiempo de simulación.

Observando las validaciones del modelo de Wiele (1992) (figura 2.3) se ve una subestimación del ancho del canal, probablemente como consecuencia de los valores relativamente altos que dicho autor le asignara a la tensión adimensional crítica de Shields y al ángulo de fricción del material.

Finalmente, el modelo de Li & Wang (1993, 1994) sobreestima el ancho del canal en comparación con las mediciones realizadas (figura 2.4).

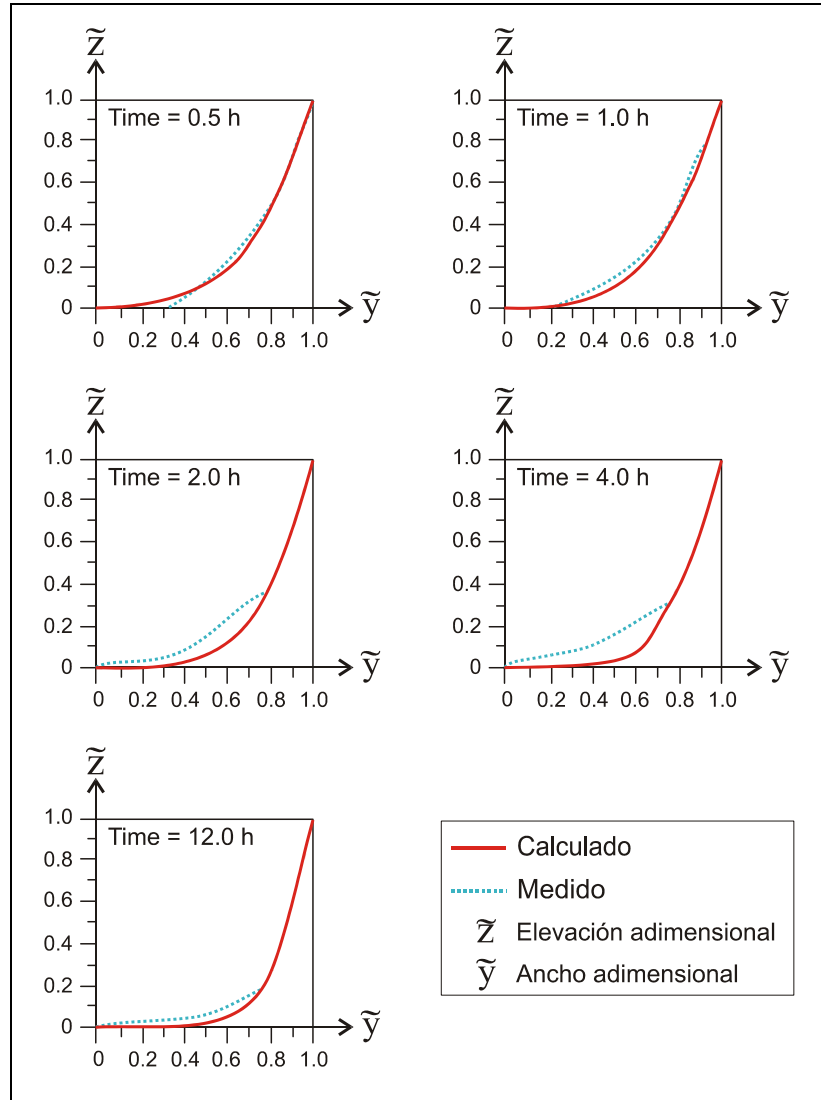


Figura 2.1 Validaciones del modelo de Kovacs & Parker

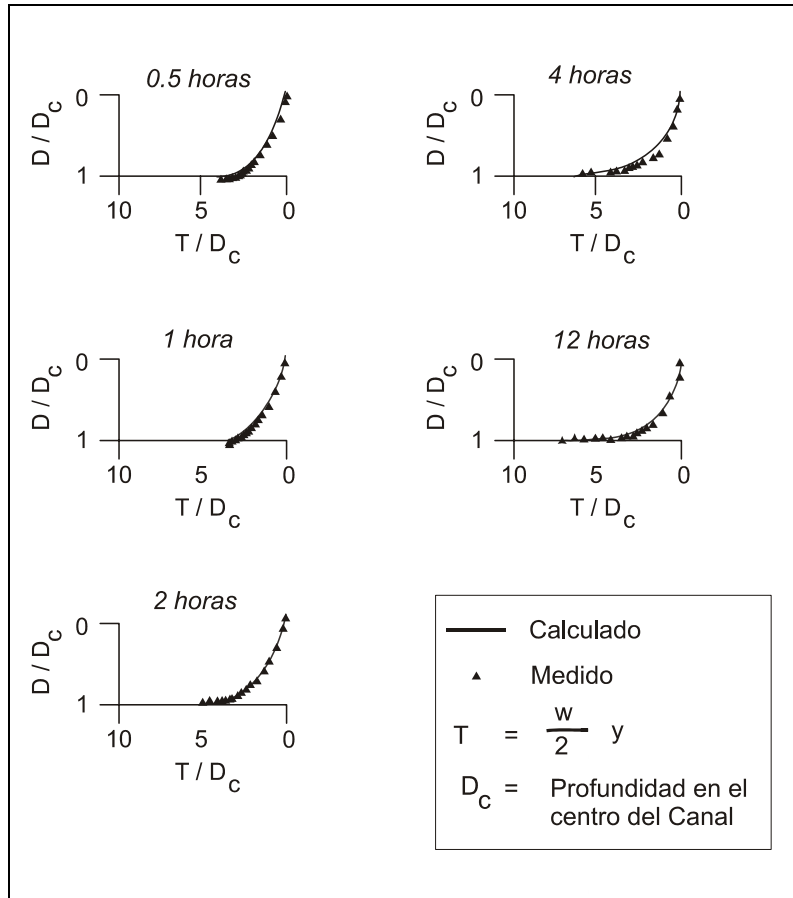


Figura 2.2 Validaciones del modelo de Pizzuto

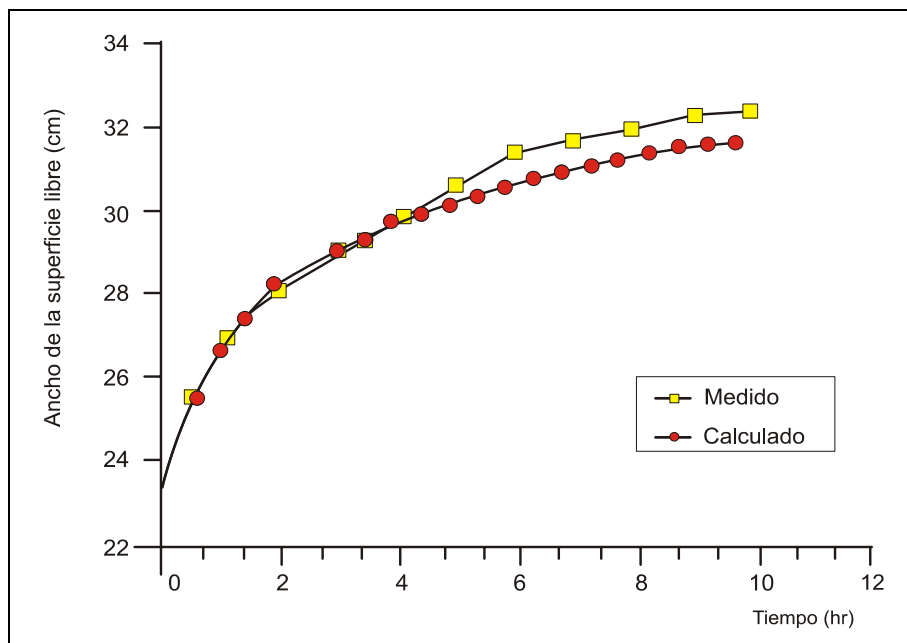


Figura 2.3 Validaciones del modelo de Wiele

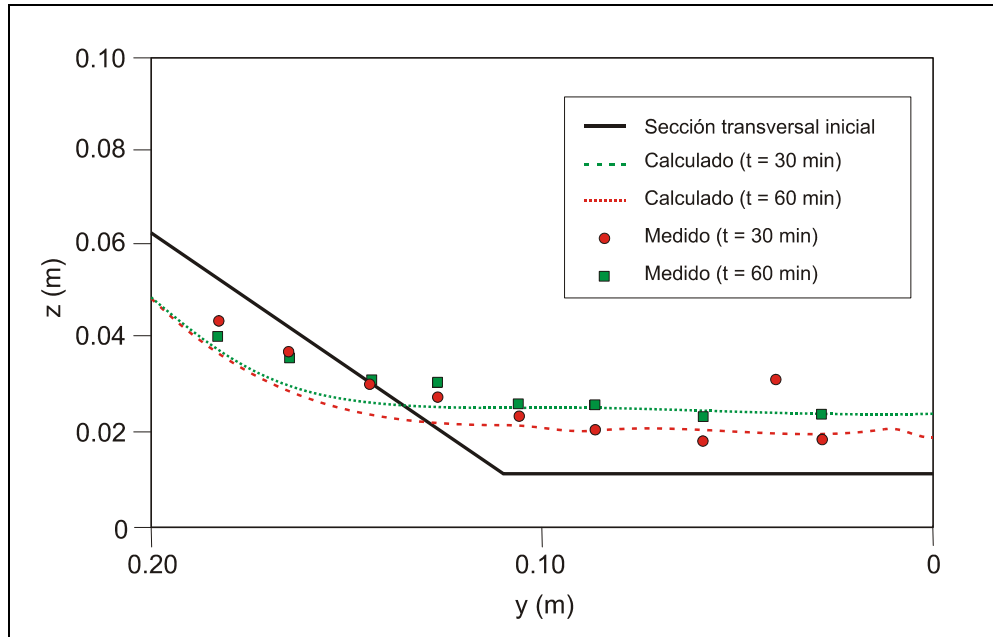


Figura 2.4 Validaciones del modelo de Li & Wang

MODELO MATEMÁTICO



*Yo me senté en la orilla:
quería preguntarte, preguntarte tu secreto;
convencerme de que los ríos resbalan hacia un anhelo y viven;
y que cada uno nace y muere distinto
Quería preguntarte, mi alma quería preguntarte
por qué anhelas, hacia qué resbalas, para qué vives.
Dímelo, río.*

“A un río le llamaban Carlos”, Dámaso Alonso.

3. MODELO MATEMÁTICO

En este capítulo se presenta el modelo matemático propuesto para abordar el problema de la erosión de márgenes. Dicho modelo incluye cuatro submodelos: el hidrodinámico, el sedimentológico, el morfológico y el de falla de márgenes.

El submodelo hidrodinámico a su vez, está compuesto por un modelo longitudinal y otro transversal. El primero resulta de imponer la conservación de la cantidad de movimiento del fluido en la dirección longitudinal, estando el mismo integrado en la vertical (Método de Distribución Lateral). El modelo transversal se basa en los modelos paramétricos de Kikkawa et al. (1976) y de Kalkwijk & Booij (1986). Dichos modelos paramétricos permiten conocer la velocidad del flujo secundario en el fondo (ya que la misma es de relevancia para determinar el transporte de sedimentos de fondo transversal, el cual es el responsable de la erosión asimétrica en el fondo y las márgenes). La transición de los valores obtenidos con estos modelos paramétricos y los valores de velocidad impuestos en las márgenes, se realiza mediante la aplicación de una función moduladora o máscara.

El submodelo sedimentológico planteado en esta tesis presenta una gran ventaja con respecto a la gran mayoría de los modelos desarrollados hasta el momento (muchos de los cuales fueron expuestos en el capítulo 2). Dicha ventaja radica en que el mismo se plantea a partir de primeros principios en lugar de la utilización de fórmulas empíricas (el planteo se basa en la conservación de momento de las partículas de sedimento de fondo). Este tratamiento, facilita las posteriores generalizaciones del formalismo, en razón de que todos los elementos intervinientes tienen un significado físico bien establecido, a diferencia de las ecuaciones empíricas, que son solamente válidas para las condiciones en las que fueron testeadas y ajustadas.

El desarrollo matemático del submodelo sedimentológico, incluye una primera formulación en donde no se tiene en cuenta el efecto del flujo secundario (que es el caso de un canal recto) y una segunda, más general, que tiene en consideración las corrientes transversales.

El submodelo morfológico consiste en aplicar el principio de conservación de masa de sedimentos. Este principio se expresa en la ecuación de Exner.

El submodelo de falla de márgenes se basa en un algoritmo que determina si hay erosión según los valores que adopta la pendiente de las mismas, en comparación con la pendiente crítica, dependiente del material constitutivo.

3.1. MODELO HIDRODINÁMICO

3.1.1. Modelo Hidrodinámico Longitudinal

Para un problema de flujo en canales abiertos, podemos distinguir localmente tres coordenadas espaciales bien definidas: Una a lo largo de la dirección del fluido (coordenada longitudinal), una segunda en un plano horizontal en forma perpendicular a la dirección del fluido (coordenada lateral), y una tercera en la dirección vertical (asumiendo una pendiente del canal muy suave). Se puede considerar, como es usual, que las escalas características son muy diferentes en esas tres direcciones espaciales, lo que permite realizar algunas simplificaciones.

En primer lugar, se puede considerar que la escala longitudinal de interés (es decir la escala del observador) es mucho mas grande que las dimensiones transversales de la sección, es decir,

$$L_{ox} \gg B, \hat{h} \quad [1]$$

donde B es una escala para el ancho del canal, \hat{h} es una escala para la profundidad del fluido, y L_{ox} es la escala espacial longitudinal del observador, la cual es calculada como $L_{ox} \equiv \hat{U} \hat{T}$, siendo \hat{U} una escala para la velocidad del flujo longitudinal, y \hat{T} la escala de tiempo del observador. La condición [1] significa que el problema puede ser tratado con una aproximación unidimensional (1D) (Menéndez 2003), es decir, que la variación longitudinal de la velocidad del flujo principal de la sección transversal, puede ser calculada independientemente de la variación

transversal de la velocidad del fluido, usando un Modelo Longitudinal unidimensional (1D), como son las conocidas ecuaciones de Saint Venant (Jain, 2001)

En segundo lugar, la sección transversal será considerada como poca profunda:

$$\bar{B} \approx \hat{h} \quad [2]$$

Como consecuencia de la condición [2], la distribución lateral de la velocidad del fluido, de ser necesaria, puede ser determinada independientemente de la distribución vertical.

En tercer lugar, se asume que la escala espacial lateral del observador L_{oy} , la cual es calculada como $L_{oy} \equiv \sqrt{\varepsilon_y \bar{F}}$, siendo ε_y una escala para la difusión lateral, es a lo sumo del mismo orden de la dimensión lateral de la sección transversal, es decir:

$$L_{oy} \lesssim \bar{B} \quad [3]$$

Como consecuencia de la condición [3], es pertinente calcular la distribución lateral de la velocidad del fluido longitudinal, mediante un Modelo Lateral unidimensional (1D), como el Método de Distribución Lateral (LDM) propuesto por Wark et al. (1990):

$$ghI_x - \frac{B_g f}{8} U^2 + h \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_y \frac{\partial U}{\partial y} \right] = 0 \quad [4]$$

donde y es la coordenada en la dirección lateral del canal, g la aceleración de la gravedad, $h(y)$ es la profundidad local, $U(y)$ es el promedio vertical local de la velocidad del fluido longitudinal (obtenido de un Modelo Longitudinal 1D), I_x es la pendiente longitudinal (considerada uniforme en el sentido lateral), $f = 8gn^2 R_h^{-1/3}$ es el factor de fricción de Darcy-Weisbach, con n el coeficiente de rugosidad de Manning y R_h el radio hidráulico, B_g es un factor geométrico que tiene en cuenta la inclinación de la superficie de fondo, y esta dado por:

$$B_g = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \omega} \quad [5]$$

finalmente ε_y es la viscosidad de torbellino lateral, la cual es generalmente parametrizada como:

$$\varepsilon_y = \chi U_* h \quad [6]$$

donde χ es el coeficiente adimensional de la viscosidad de torbellino lateral.

La ecuación [4] tiene en cuenta tres efectos: a) la acción de la gravedad sobre el fluido (primer término), b) la fricción producida por el lecho del canal (segundo término) y c) la difusión turbulenta (tercer término).

Como condición de borde para la ecuación [4], se puede imponer la condición:

$$\left. \frac{dU}{dy} \right|_{\text{margen}} = 0 \quad [7]$$

lo que físicamente significa despreciar el espesor de la capa límite, es decir, la misma no es resuelta.

La ecuación diferencial no lineal [4] se resuelve en forma numérica. Dicha ecuación es discretizada usando un esquema de diferencias finitas centrado. El sistema algebraico no lineal resultante es resuelto mediante el método de Newton-Raphson. Como resultado, se obtiene la velocidad longitudinal promediada en la dirección vertical, que se usará mas adelante en el modelo sedimentológico.

3.1.2. Modelo Hidrodinámico Transversal

Como consecuencia de la curvatura, además de la velocidad del fluido longitudinal, existe una componente transversal, la cual constituye el flujo secundario. En particular, la componente lateral de la velocidad en el fondo es de relevancia para el transporte de sedimentos de fondo. Para obtener la componente lateral, se

puede usar el modelo paramétrico del perfil de velocidad vertical de Kikkawa et al. (1976). Este modelo asume que la curvatura del canal tiene un radio de curvatura grande comparado con el ancho del mismo.

$$R_c \gg B \quad [8]$$

Como consecuencia de la condición [8], las componentes transversales de la velocidad, u_r , en la dirección radial y u_z en la dirección vertical, son muy pequeñas comparadas con la componente de la velocidad longitudinal. La forma paramétrica del modelo para la componente radial es la siguiente:

$$u_r(\eta) = \frac{U^2}{\bar{U}} \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left[F_A(\eta) - \frac{1}{\kappa} \frac{\bar{U}_*}{\bar{U}} F_B(\eta) \right] \quad [9]$$

donde $\eta = \tilde{z}/h$ es la coordenada vertical, con $\tilde{z} = 0$ en el fondo; \bar{U} y \bar{U}_* son, respectivamente, la velocidad longitudinal del fluido y la velocidad de corte, promediadas en el sentido transversal, es decir:

$$\bar{U} = \frac{1}{Y} \int_0^Y U dy, \quad \bar{U}_* = \frac{1}{Y} \int_0^Y U_* dy, \quad [10]$$

con Y el ancho del canal, $r = r(y)$ es el radio de curvatura, κ la constante de Von Karman (≈ 0.4), y las funciones F_A y F_B dadas por:

$$\begin{aligned} F_A(\eta) &\equiv -15 \left(\eta^2 \ln \eta - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{15}{54} \right) \\ F_B(\eta) &\equiv \frac{15}{2} \left(\eta^2 \ln^2 \eta - \eta^2 \ln \eta + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{19}{54} \right) \end{aligned} \quad [11]$$

En el fondo, a partir de las ecuaciones [9] y [11] se obtiene:

$$u_r(0) = \frac{U^2}{\bar{U}} \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left(4.167 - 2.640 \frac{1}{\kappa} \frac{\bar{U}_*}{\bar{U}} \right) \quad [12]$$

Otro modelo paramétrico para la velocidad lateral debido al flujo secundario es desarrollado por Kalkwijk & Booij (1986). La correspondiente componente radial en el fondo, en una aproximación lineal, es dada por:

$$u_r(0) = -\frac{3}{2}(1-2\beta)\frac{Uh}{\kappa^2 r} \quad [13]$$

donde

$$\beta \equiv \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \quad [14]$$

siendo C el coeficiente de Chezy.

En las márgenes se impone la condición de impenetrabilidad.

$$u_r|_{\text{margen}} = 0 \quad [15]$$

La transición entre el valor del modelo paramétrico, dado por la ecuación [12] o la ecuación [13], y el valor en la margen, ecuación [15], se realiza por medio de una función moduladora, o máscara, $M(y)$, con la siguiente forma:

$$M(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\delta - y}{\delta}\right)^2 & \text{if } 0 \leq y \leq \delta \\ 1 & \text{if } \delta \leq y \leq B - \delta \\ 1 - \left(\frac{\delta + y - B}{\delta}\right)^2 & \text{if } B - \delta \leq y \leq B \end{cases} \quad [16]$$

donde δ es el espesor de la capa límite. Se propone independizarse del espesor δ , dividiendo al mismo por la profundidad h_b (definida como la profundidad de la margen próxima a los extremos del canal), generando un nuevo parámetro, es decir

$$\frac{\delta}{h_b} = \kappa_b = \text{constante.} \quad [17]$$

donde el valor de κ_b será determinado en los ensayos experimentales. Por lo tanto, se tiene

$$u_{rb}(y) = M(y)u_r(y)|_{\text{modelo}} \quad [18]$$

la cual es requerida mas adelante para ser usada en el modelo sedimentológico.

3.2. MODELO SEDIMENTOLÓGICO

3.2.1. Modelo sedimentológico de partículas de fondo

3.2.1.1. Sistema de coordenadas

Kovacs & Parker (1994) introdujeron una base de vectores ortonormales $\{\hat{n}_s, \hat{n}_p, \hat{k}\}$ para definir un sistema fijo en el espacio (ver figura 3.1): \hat{n}_s es horizontal y apunta en la dirección longitudinal del movimiento; \hat{n}_p es también horizontal pero apunta en la dirección lateral hacia la margen izquierda; \hat{k} es en la dirección vertical y apunta hacia arriba. Adicionalmente, se introduce otra terna de versores $\{\hat{s}, \hat{p}, \hat{n}\}$, los cuales varían localmente: \hat{s} es en la dirección longitudinal del movimiento, pero tangente al fondo del canal, es decir, éste está inclinado hacia abajo un ángulo α (la pendiente longitudinal del canal) con respecto a \hat{n}_s ; en forma similar, \hat{p} es en la dirección lateral, pero tangente al fondo del canal, es decir, éste está inclinado hacia abajo un ángulo ω (la pendiente lateral del canal) con respecto a \hat{n}_p ; \hat{n} es normal al plano definido por \hat{s} y \hat{p} (el cual es un plano local del fondo del canal), y se encuentra inclinado un ángulo β con respecto a \hat{k} . Es de notar que, en general \hat{s} y \hat{p} no son ortogonales el uno con el otro.

La relación entre ambas ternas de vectores es la siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{s} &= \cos \alpha \hat{n}_s - \text{sen} \alpha \hat{k} \\ \hat{p} &= \cos \omega \hat{n}_p - \text{sen} \omega \hat{k} \\ \hat{n} &= \text{sen} \alpha \cos \omega \hat{n}_s + \text{sen} \omega \hat{n}_p + \cos \alpha \cos \omega \hat{k}\end{aligned}\quad [19]$$

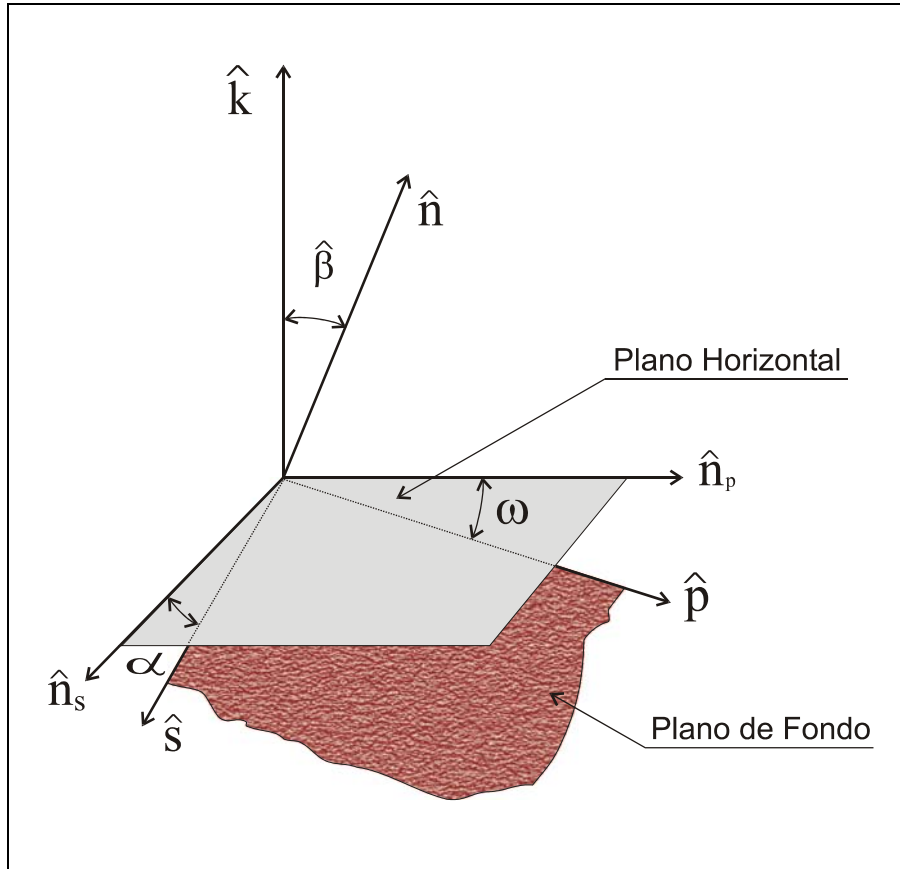


Figura 3.1 Ternas de versores de Kovac & Parker - Planos horizontal y de fondo

De la figura 3.1, se puede ver que, $\hat{n} \cdot \hat{k} = \cos \beta$, y a partir de la ecuación [19] se tiene:

$$\cos \beta = \cos \alpha \cos \omega \quad [20]$$

En el modelo de KP, el versor \hat{k} es escrito de la siguiente forma (ver figura 3.2):

$$\hat{k} = -\vec{k}_t - \vec{k}_n \quad [21]$$

con

$$\vec{k}_n = -(\hat{k} \cdot \hat{n})\hat{n} = -\cos \beta \hat{n} \quad [22]$$

siendo el componente de \hat{k} en la dirección negativa de \hat{n} . De las ecuaciones [21] y [22] resulta que

$$\vec{k}_t = -\hat{k} + \cos \beta \hat{n} \quad [23]$$

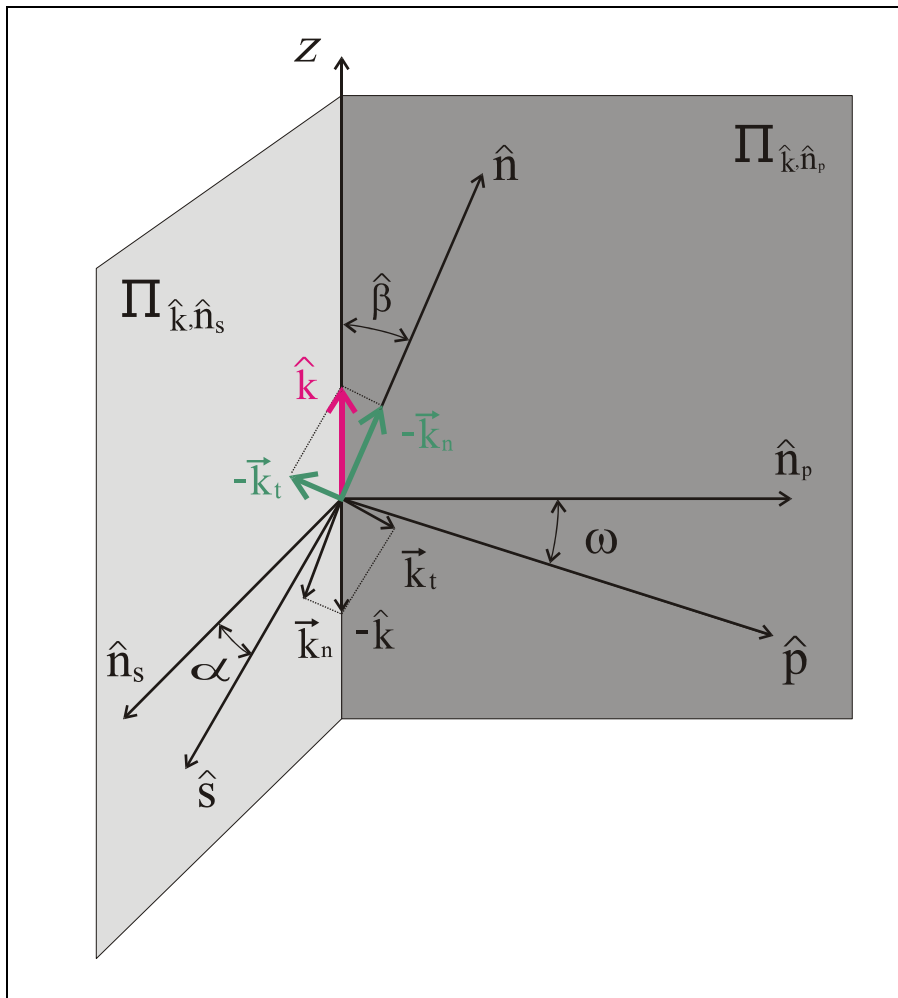


Figura 3.2 Descomposición del vector \hat{k} - Planos verticales

Como el sistema de versores $\{\hat{s}, \hat{p}, \hat{n}\}$ no es ortogonal, en el presente trabajo, se usa el método de Gram-Schmidt (Anton, 2000) para obtener un nuevo sistema ortogonal $\{\hat{s}, \hat{p}', \hat{n}\}$ (Figura 3.3).

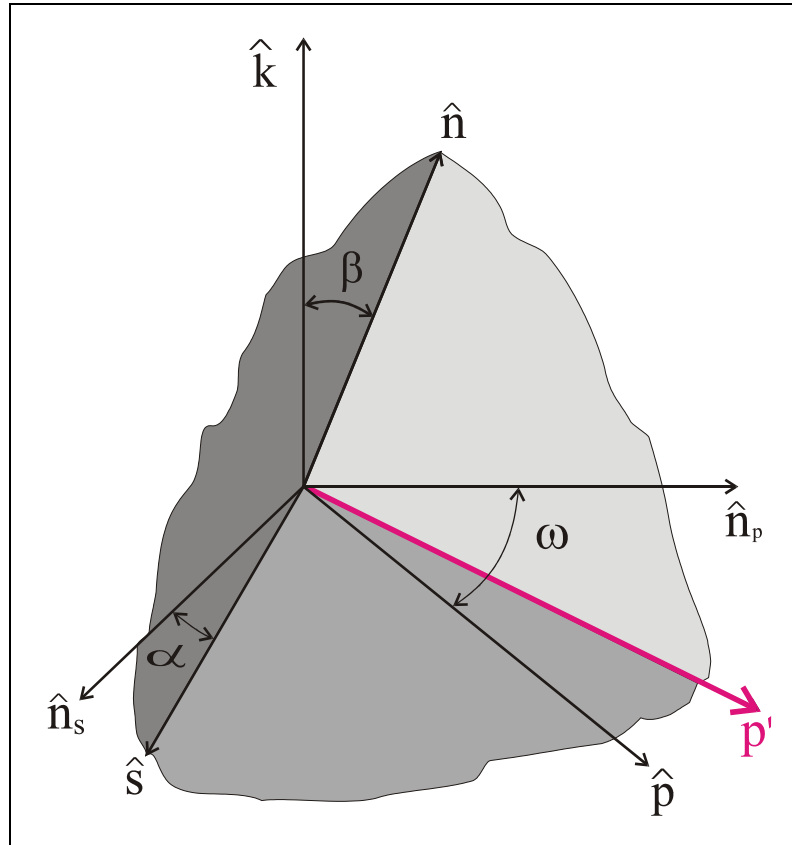


Figura 3.3: Sistema Ortogonal $\{\hat{s}, \hat{p}', \hat{n}\}$ para el modelo de KP

El nuevo versor \hat{p}' puede ser expresado según la siguiente expresión (ver Apéndice I):

$$\hat{p}' = \frac{1}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \left(-\text{sen} \omega \text{sen} \alpha \cos \alpha \hat{n}_s + \cos \omega \hat{n}_p - \text{sen} \omega \cos^2 \alpha \hat{k} \right) \quad [24]$$

Comparando las ecuaciones [19] y [24], es fácil concluir que $\hat{p}' = \hat{p}$ solo en el caso de que $\alpha = 0$, es decir, en el caso de tener una pendiente longitudinal nula.

En términos del nuevo sistema de referencia, \vec{k}_t ahora puede ser escrito como (ver Apéndice I):

$$\vec{k}_t = \text{sen } \alpha \hat{s} + \frac{\text{sen } \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \hat{p}' \quad [25]$$

Para describir el movimiento de una partícula de sedimento a lo largo del lecho del canal, Kovacs & Parker (1994) introducen el versor \hat{t}_{vp} en la dirección del movimiento (Figura 3.4), el cual puede ser expresado en el marco del nuevo sistema como

$$\hat{t}_{vp} = \cos \psi \hat{s} + \text{sen } \psi \hat{p}' \quad [26]$$

donde ψ es el ángulo con respecto a la dirección \hat{s} .

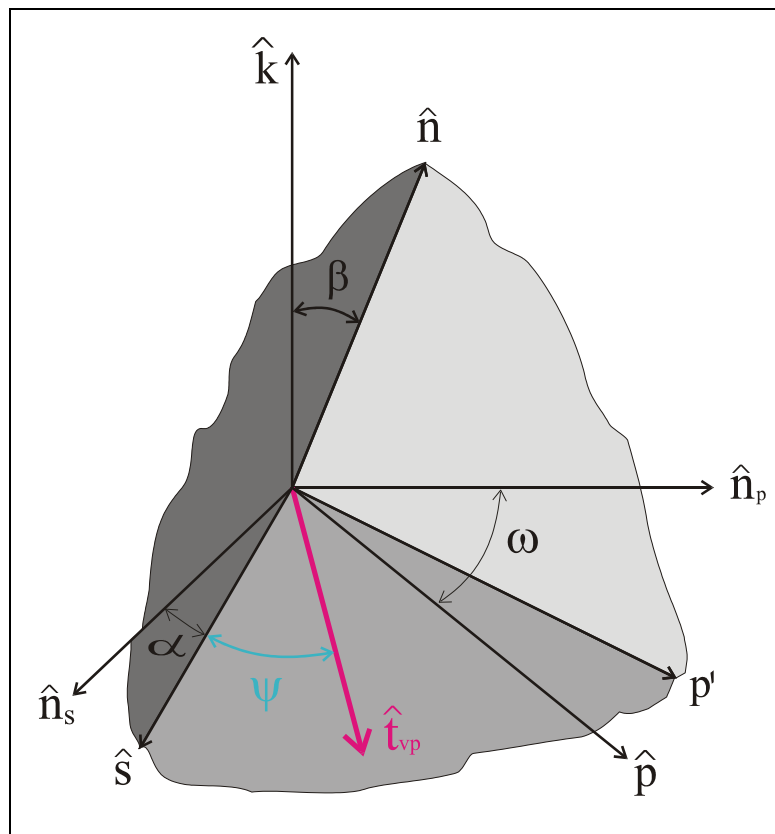


Figura 3.4: Definición del versor \hat{t}_{vp}

Nótese que, de las ecuaciones [25] y [26], resulta que

$$\begin{aligned}
 \hat{t}_{v_p} \cdot \hat{s} &= \cos \psi \\
 \hat{t}_{v_p} \cdot \hat{p}' &= \sen \psi \\
 \vec{k}_t \cdot \hat{s} &= \sen \alpha \\
 \vec{k}_t \cdot \hat{p}' &= \frac{\sen \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sen^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}}
 \end{aligned} \tag{27}$$

3.2.1.2. Velocidad de las partículas de sedimento

Existen tres fuerzas actuando sobre las partículas, que son, la fuerza resistiva dinámica de Coulomb \vec{F}_C , la cual representa la cantidad de movimiento perdida debido a colisiones; la componente tangencial al plano del fondo del peso sumergido de la partícula \vec{W}_g ; y la fuerza de arrastre debido al movimiento del fluido \vec{F}_D . El balance de fuerzas en una partícula de sedimento en movimiento, cuando la velocidad de la partícula \vec{v}_p alcanza el estado estacionario, es dado por:

$$\vec{F}_D + \vec{W}_g + \vec{F}_C = 0 \tag{28}$$

La fuerza de arrastre \vec{F}_D puede ser expresada como (Kovacs & Parker 1994)

$$\vec{F}_D = \frac{1}{2} \rho C_D \pi \left(\frac{1}{2} d \right)^2 |\vec{u}_\Delta| \vec{u}_\Delta \tag{29}$$

donde ρ es la densidad del fluido, C_D es el coeficiente de arrastre, d es el tamaño representativo del grano, y \vec{u}_Δ representa la velocidad relativa entre el fluido y la partícula en movimiento, es decir

$$\vec{u}_\Delta = \vec{u}_b - \vec{v}_p \tag{30}$$

siendo $\vec{u}_b = u_b \hat{s}$ la velocidad del fluido cerca del lecho.

El peso efectivo \vec{W}_g es dado por (Kovacs & Parker 1994)

$$\vec{W}_g = \rho R g \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} d \right)^3 \vec{k}_t \quad [31]$$

donde $R = (\rho_s / \rho - 1)$ es la densidad relativa del sedimento, ρ_s es la densidad del sedimento, y g la aceleración de la gravedad.

La fuerza resistiva dinámica de Coulomb \vec{F}_C puede ser expresada como (Kovacs & Parker 1994)

$$\vec{F}_C = -\hat{t}_{v_p} \rho R g \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} d \right)^3 |\vec{k}_n| \mu_C \quad [32]$$

donde μ_C es el factor de fricción de Coulomb, y

$$\hat{t}_{v_p} \equiv \frac{\vec{v}_p}{|\vec{v}_p|} \quad [33]$$

es el versor en la dirección de la velocidad de la partículas, definido anteriormente.

Introduciendo las ecuaciones [29], [31] y [32] en la ecuación [28] se obtiene (Kovacs & Parker 1994):

$$|\vec{u}_\Delta^*| \vec{u}_\Delta^* = a \tau_{C0}^* \left(|\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p} - \frac{\vec{k}_t}{\mu_C} \right) \quad [34]$$

donde el asterisco "*" indica que las cantidades son adimensionales. El factor de adimensionalización para las velocidades es $\sigma \equiv \sqrt{Rgd}$. El parámetro τ_{C0}^* , definido por la relación

$$\tau_{C0}^* \equiv \frac{4}{3} \frac{\mu_C}{a C_D}, \quad [35]$$

es la tensión de corte adimensional para la iniciación del movimiento (Shields) en un lecho horizontal, donde el factor a es definido como

$$a \equiv \left(\frac{u_b}{U_*} \right)^2, \quad [36]$$

siendo $U_* = (\tau_b / \rho)^{1/2}$ la velocidad de corte, y τ_b el módulo de la tensión de corte en el fondo $\vec{\tau}_b$. La tensión en el fondo puede ser relacionada con la velocidad promediada en la vertical U a través de (Wark et al. 1990)

$$\tau_b = \frac{1}{8} \rho f B_g U^2 \quad [37]$$

donde f es el factor de fricción de Darcy-Weisbach, y B_g es un factor geométrico que tiene en cuenta la inclinación de la superficie de fondo (ecuación [5]).

Nótese que, a partir de las ecuaciones [36] y [37], y si se supone que $u_b = \varepsilon U$, donde ε es un factor de forma que depende del perfil de velocidad en la dirección vertical, se obtiene que

$$a \approx \frac{8\varepsilon^2}{fB_g} \quad [38]$$

La velocidad promediada en la vertical U , se obtiene a partir del modelo hidrodinámico, a través de la resolución de la ecuación [4].

A fin de resolver la ecuación [34] para obtener la velocidad de la partícula de sedimento, se propone dividir a dicha ecuación en componentes. Multiplicando alternativamente la ecuación [34] por los versores \hat{s} y \hat{p}' , usando la ecuación [27], y teniendo en consideración que

$$\vec{u}_\Delta = u_b \hat{s} - v_p \hat{t}_{v_p}, \quad [39]$$

se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 |\vec{u}_\Delta| (u_b^* - v_p^* \cos \psi) - a\tau_{c0}^* \left(|\cos \beta| \cos \psi - \frac{\text{sen} \alpha}{\mu_c} \right) &= 0 \\
 |\vec{u}_\Delta| v_p^* \text{sen} \psi + a\tau_{c0}^* \left(|\cos \beta| \text{sen} \psi - \frac{1}{\mu_c} \frac{\text{sen} \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{40}$$

donde

$$|\vec{u}_\Delta| = (u_b^* + v_p^* - 2u_b^* v_p^* \cos \psi)^{1/2} \tag{41}$$

A partir del sistema de ecuaciones [40] se pueden obtener las incógnitas v_p^* y ψ . Dicho sistema puede ser resuelto eficientemente usando el método de Newton-Raphson, como se verá en el capítulo siguiente.

3.2.1.3. Tasa de transporte de fondo

De acuerdo al modelo de KP (Kovacs & Parker 1994), la tasa vectorial del transporte del volumen de la carga de sedimento de fondo por unidad normal de ancho (adimensionalizada con el factor $d\sigma$) es calculada como

$$\vec{q}_b^* = \xi^* \vec{v}_p^* \tag{42}$$

donde ξ^* es el volumen adimensional de partículas que participan en el transporte de la carga de fondo. Para obtener dicho volumen, se plantea un balance de momentos en la capa de la carga de fondo, lo que lleva a (Kovacs & Parker 1994)

$$\vec{\tau}_b^* + \xi^* \vec{k}_t = \mu_c \xi^* |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p} + \vec{\tau}_B^* \tag{43}$$

donde $\vec{\tau}_b$ es la tensión de corte del fluido actuando en el fondo de la capa de la carga de fondo, mientras que $\vec{\tau}_b$ es la que actúa en la parte superior de la capa; estas tensiones son adimensionalizadas mediante el factor (ρRgd) . Como una generalización de la hipótesis de Bagnold, Kovacs & Parker (1994) proponen $\vec{\tau}_B^* = \tau_c^* \hat{s}$,

donde τ_c^* es la tensión crítica de fondo para la iniciación del movimiento. Si se escribe $\vec{\tau}_b^* = \tau_b^* \hat{s}$, la ecuación [43] se transforma en

$$\xi^* = \frac{\tau_b^* - \tau_c^*}{\left(\mu_C \left| \vec{k}_n \hat{t}_{v_p} - \vec{k}_t \right| \right) \cdot \hat{s}} \quad [44]$$

Empleando la ecuación [26], la ecuación [43] puede reescribirse como

$$\xi^* = \frac{\tau_b^* - \tau_c^*}{\mu_C |\cos \beta| \cos \psi - \text{sen } \alpha} \quad [45]$$

El numerador de la ecuación [45] debe ser conocido a fin de obtener ξ^* y, consecuentemente, \vec{q}_b^* . La tensión de corte adimensional τ_b^* puede ser calculada usando la ecuación [37]:

$$\tau_b^* = \frac{f B_g U^2}{8 R g d} \quad [46]$$

La forma vectorial de la ecuación [36] es la siguiente:

$$\left| \vec{u}_b^* \right| \vec{u}_b^* = a \vec{\tau}_b^* = a \tau_b^* \hat{s} \quad [47]$$

la cual, para condiciones críticas ($\vec{v}_p = 0$), se transforma en

$$\left| \vec{u}_{bc}^* \right| \vec{u}_{bc}^* = a \tau_c^* \hat{s} \quad [48]$$

donde $\vec{u}_{bc}^* \equiv \vec{u}_b^* \Big|_{v_p=0}$, y $\tau_c^* \equiv \tau_b^* \Big|_{v_p=0}$. Adicionalmente, la ecuación [34], para condiciones críticas ($\vec{v}_p = 0$) es escrita como

$$|\vec{u}_{bc}^*|_{\vec{u}_{bc}^*} = a \tau_{c0}^* \left(|\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p}^0 - \frac{\vec{k}_t}{\mu_c} \right) \quad [49]$$

donde $\hat{t}_{v_p}^0 \equiv \hat{t}_{v_p} \Big|_{v_p=0}$. De las ecuaciones [48] y [49] resulta que

$$\frac{\tau_c^*}{\tau_{c0}^*} \hat{s} + \frac{\vec{k}_t}{\mu_c} = |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p}^0 \quad [50]$$

Para resolver la ecuación [49], se sugiere elevarla al cuadrado, obteniéndose el siguiente polinomio cuadrático en (τ_c^* / τ_{c0}^*) :

$$\left(\frac{\tau_c^*}{\tau_{c0}^*} \right)^2 + \frac{2}{\mu_c} \vec{s} \cdot \vec{k}_t \frac{\tau_c^*}{\tau_{c0}^*} + \frac{k_t^2}{\mu_c^2} - \cos^2 \beta = 0 \quad [51]$$

Cuya solución con significado físico es:

$$\frac{\tau_c^*}{\tau_{c0}^*} = -\frac{\text{sen} \alpha}{\mu_c} + \sqrt{\cos^2 \beta - \frac{\tan^2 \omega \cos^4 \alpha}{\mu_c^2 (1 + \tan^2 \omega \cos^2 \alpha)}} \quad [52]$$

Introduciendo las ecuaciones [46] y [52] en la ecuación [45], se obtiene la siguiente expresión:

$$\xi^* = \frac{\frac{f B_g U^2}{8 R g d} + \tau_{c0}^* \left(\frac{\text{sen} \alpha}{\mu_c} - \sqrt{\cos^2 \beta - \frac{\tan^2 \omega \cos^4 \alpha}{\mu_c^2 (1 + \tan^2 \omega \cos^2 \alpha)}} \right)}{\mu_c |\cos \beta| \cos \psi - \text{sen} \alpha} \quad [53]$$

La ecuación [53] puede ser introducida en la [42] para calcular \vec{q}_b^* . En particular, para las direcciones \hat{n}_s y \hat{n}_p (x e y , por simplicidad) se tiene

$$\begin{aligned} q_{bx}^* &= q_{bs}^* \cos \alpha \\ q_{by}^* &= q_{bp}^* \cos \omega \end{aligned} \quad [54]$$

donde q_{bs}^* y q_{bp}^* se obtienen al multiplicar \vec{q}_b^* por \hat{s} y \hat{p} respectivamente, es decir:

$$q_{bs}^* = \xi^* v_p^* \cos \psi$$

$$q_{bp}^* = \xi^* v_p^* \left(\cos \psi \sin \alpha \sin \omega + \sin \psi \sqrt{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega \cos^2 \alpha} \right) \quad [55]$$

3.2.2. Modelo sedimentológico de partículas de fondo con la inclusión del efecto de curvatura

3.2.2.1. Velocidad del fluido

Cuando la geometría del canal es curva, el flujo de partículas se mueve siguiendo una trayectoria helicoidal, el cual es usualmente descompuesto en un flujo principal en la dirección longitudinal y en un flujo secundario en la dirección transversal, de menor magnitud que el flujo principal (Jain, 2001). Por lo tanto, la velocidad del fluido en el lecho tiene ahora componentes en las direcciones \hat{s} y \hat{p} , la cual, en forma adimensional, puede ser expresada como

$$\vec{u}_b^* = u_{bs}'^* \hat{s} + u_{bp}'^* \hat{p} \quad [56]$$

donde $u_{bp}'^*$ es la velocidad del flujo secundario en el lecho del canal.

Si u_r es la componente lateral de la velocidad en el lecho, es decir, en la dirección \hat{n}_p , se tiene

$$u_r^* = \vec{u}_b^* \cdot \hat{n}_p = u_{bp}'^* \hat{p} \cdot \hat{n}_p = u_{bp}'^* \cos \omega \quad [57]$$

Para continuar con un procedimiento similar al descrito en la sección anterior, es conveniente expresar los vectores en una base ortonormal $\{\hat{s}, \hat{p}', \hat{n}\}$. Por lo tanto, se tiene

$$\vec{u}_b^* = u_{bs}^* \hat{s} + u_{bp}'^* \hat{p}' \quad [58]$$

con la tensión de corte en el fondo dada por

$$\vec{\tau}_b^* = \tau_{bs}^* \hat{s} + \tau_{bp}^* \hat{p}' \quad [59]$$

Llamando α_s al ángulo entre \vec{u}_b y \hat{s} (ver Figura 3.5), y asumiendo que la velocidad del fluido y la tensión de corte en el fondo son paralelas una de la otra, es decir,

$$\tan \alpha_s = \frac{u_{bp}^*}{u_{bs}^*} = \frac{\tau_{bp}^*}{\tau_{bs}^*} \quad [60]$$

de la ecuaciones [56] y [58] resulta que

$$u_{bp}^* = \vec{u}_b^* \cdot \hat{p}' = u_{bp}^* \hat{p}' = \frac{u_r^*}{\cos \omega} \hat{p}' \cdot \hat{p}' \quad [61]$$

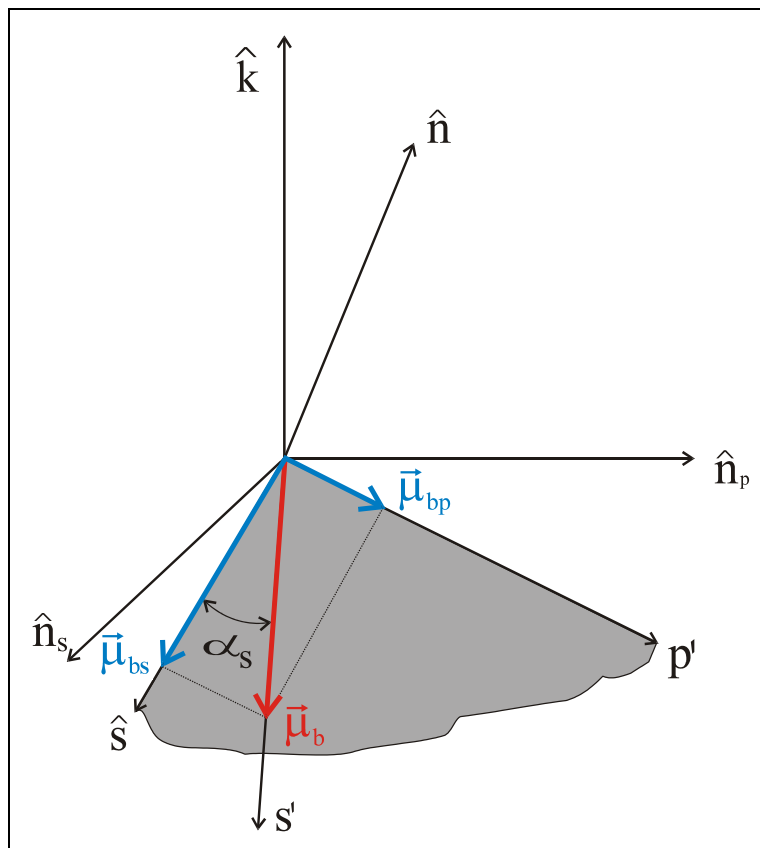


Figura 3.5: Definición de las componentes \vec{u}_{bp} y \vec{u}_{bs}

Operando con las ecuaciones [19] y [24] se tiene

$$\hat{p} \cdot \hat{p}' = \sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega} \quad [62]$$

Si se introduce la ecuación [62] en la [61] se obtiene

$$u_{bp}^* = u_r^* \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \tan^2 \omega} \quad [63]$$

La componente transversal de la velocidad u_r puede ser obtenida resolviendo alguno de los distintos procedimientos paramétricos presentados en el modelo hidrodinámico transversal, es decir, los modelos de Kikkawa (1976) o de Kalkwijk & Booij (1986) (ecuaciones [12] y [13] respectivamente).

A la restante componente de la velocidad de fondo se la relaciona con la velocidad longitudinal del flujo principal (conocida) mediante un factor de forma, $u_{bs}^* = \varepsilon U^*$.

3.2.2.2. Velocidad de las partículas de sedimento

La velocidad relativa \vec{u}_Δ^* sigue siendo definida por la ecuación [39], pero ahora, la velocidad en el lecho es dada por la ecuación [58]. Por lo tanto, en lugar de la ecuación [41] se tiene

$$\left| \vec{u}_\Delta^* \right| = \left(u_{bs}^{*2} + u_{bp}^{*2} + v_p^{*2} - 2u_b^* v_p^* \cos \psi - 2u_{bp}^* v_p^* \text{sen} \psi \right)^{1/2} \quad [64]$$

donde el símbolo $\tilde{\Delta}$ ha reemplazado a Δ para indicar la nueva situación que incluye el efecto de la curvatura. Nótese que, como es de esperar, $\left| \vec{u}_\Delta^* \right| = \left| \vec{u}_\Delta^* \right|$ cuando $u_{bp} = 0$, es decir, cuando no se tiene un flujo secundario.

El sistema de ecuaciones [40] debe ser reemplazado por el siguiente sistema más general, el cual ahora incluye los términos correspondientes al efecto de la corriente secundaria

$$\begin{aligned}
 |\vec{u}_{\Delta}^*| \left(u_{bs}^* - v_p^* \cos \psi \right) - a \tau_{c0}^* \left(|\cos \beta| \cos \psi - \frac{\text{sen} \alpha}{\mu_c} \right) &= 0 \\
 |\vec{u}_{\Delta}^*| \left(u_{bp}^* - v_p^* \text{sen} \psi \right) - a \tau_{c0}^* \left(|\cos \beta| \text{sen} \psi - \frac{1}{\mu_c} \frac{\text{sen} \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{65}$$

el cual, de nuevo, puede ser resuelto eficientemente usando el método de Newton-Raphson.

3.2.2.3. Tasa de transporte de fondo

Las tensiones de corte del fluido actuando en el lecho y en la parte superior de la carga de fondo, usadas en el balance de momentos de la ecuación [43], son expresadas ahora como

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_B^* &= \tilde{\tau}_C^* \hat{s}' = \frac{\tau_{Cs}^*}{\cos \alpha_s} \hat{s}' \\
 \vec{\tau}_b^* &= \tilde{\tau}_b^* \hat{s}' = \frac{\tau_{bs}^*}{\cos \alpha_s} \hat{s}'
 \end{aligned} \tag{66}$$

donde el subíndice s significa componentes en la dirección \hat{s} , siendo el versor $\hat{s}' = \cos \alpha_s \hat{s} + \sin \alpha_s \hat{p}'$ (ver Figura 3.5). De modo que, la ecuación [45] se puede generalizar a

$$\tilde{\xi}^* = \frac{\tilde{\tau}_b^* - \tilde{\tau}_C^*}{\left(\mu_c |\bar{k}_n| \hat{i}_{v_p} - \bar{k}_t \right) \cdot \hat{s}'} \tag{67}$$

la cual es usada para calcular la tasa de transporte de la carga de fondo

$$\vec{q}_b^* = \tilde{\xi}^* \vec{v}_p^* \tag{68}$$

Cuando el canal es recto, se tiene que $\cos \alpha_s = 1$, y $\text{sen} \alpha_s = 0$; por lo tanto, $\hat{s} = \hat{s}'$ y $\tilde{\xi}^* = \xi^*$.

La ecuación [67] puede ser escrita de manera más explícita

$$\xi^* = \frac{\tau_{bs}^* - \tau_{Cs}^*}{(\mu |\cos \beta| \hat{t}_{v_p} \cdot \hat{s}' - \vec{k}_t \cdot \hat{s}') \cos \alpha_s} \quad [69]$$

Es ahora necesario obtener expresiones para τ_{bs} y τ_{Cs} . Si en la ecuación [48] se introduce u_b^* de la ecuación [58], teniendo en cuenta la ecuación [60], e imponiendo que $\vec{v}_p = 0$, resulta que

$$\frac{1}{a} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_s} \frac{u_{bs}^{*2}}{\tau_{C0}^*} (\hat{s} + \tan \alpha_s \hat{p}') + \frac{\vec{k}_t}{\mu_C} = |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p} \quad [70]$$

Para condiciones críticas, la ecuación [36] se expresa como

$$u_{bs}^{*2} = a \tau_{Cs}^* \quad [71]$$

Introduciendo la ecuación [71] en la [70] se obtiene

$$\frac{\tau_{Cs}^*}{\tau_{C0}^*} \vec{s}_p + \frac{\vec{k}_t}{\mu_C} = |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p}^0 \quad [72]$$

donde

$$\vec{s}_p \equiv \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_s} (\hat{s} + \tan \alpha_s \hat{p}') \quad [73]$$

Elevando al cuadrado la ecuación [72] se tiene

$$\left(\frac{\tau_{Cs}^*}{\tau_{C0}^*} \right)^2 + \frac{2 \vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{\mu_C s_p^2} \frac{\tau_{Cs}^*}{\tau_{C0}^*} + \frac{1}{\mu_C^2} \frac{k_t^2}{s_p^2} - \cos^2 \beta = 0 \quad [74]$$

cuya solución con sentido físico es

$$\frac{\tau_{cs}^*}{\tau_{c0}^*} = -\frac{1}{\mu_c} \frac{\vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{s_p^2} + \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{1}{\mu_c^2} \left[\left(\frac{\vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{s_p^2} \right)^2 - \frac{k_t^2}{s_p^2} \right]} \quad [75]$$

Las siguientes expresiones son necesarias para evaluar la ecuación [75]:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{s_p^2} &= \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha_s)^{3/2}} \left(\sin \alpha + \frac{u_r(0)}{U} \sqrt{\frac{8}{Bfa}} \tan \omega \cos^2 \alpha \right) \\ \frac{k_t^2}{s_p^2} &= \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha_s)^2} \left(\sin^2 \alpha + \frac{\tan^2 \omega \cos^4 \alpha}{1 + \tan^2 \omega \cos^2 \alpha} \right) \end{aligned} \quad [76]$$

Se observa que, cuando $\alpha_s = 0$ y $u_r = 0$, la ecuación [75] se reduce a la [52].

Las expresiones para calcular q_{bp} y q_{bs} son idénticas a las expresiones [55], con $\tilde{\xi}$ reemplazando a ξ , es decir

$$\begin{aligned} q_{bs}^* &= \tilde{\xi}^* v_p^* \cos \psi \\ q_{bp}^* &= \tilde{\xi}^* v_p^* \left(\cos \psi \sin \alpha \sin \omega + \sin \psi \sqrt{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega \cos^2 \alpha} \right) \end{aligned} \quad [77]$$

3.3. MODELO MORFOLÓGICO

Una vez determinadas las tasas de transportes de sedimentos, se puede proceder a calcular la evolución del lecho del canal mediante la ecuación de Exner (ecuación (78)), la cual surge de aplicar el principio de conservación de masa de sedimentos (Raudkivi, 1990):

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{1}{1 - \lambda} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r q_{by}) + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} \right] = 0 \quad [78]$$

donde z_0 es la elevación del lecho, t es la coordenada del tiempo, λ la porosidad del sedimento de fondo, q_{bx} y q_{by} son las cargas volumétricas de sedimento por

unidad de ancho en sentido longitudinal y transversal respectivamente, donde no se considera ninguna carga de sedimentos suspendidos.

En el presente trabajo, se asumen condiciones longitudinales uniformes (o cambios muy suaves en dicha dirección), es decir, $\partial/\partial x = 0$.

3.4. MODELO DE FALLAS DE MÁRGENES

La erosión de márgenes se tiene en cuenta a través del siguiente algoritmo, el cual asume que el nivel de agua es igual al nivel de la margen (figura 3.6):

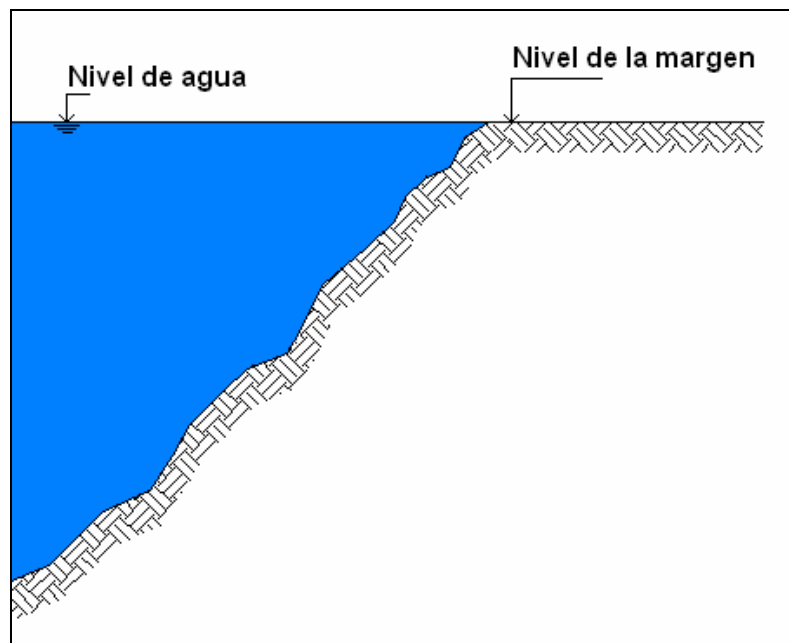


Figura 3.6 Nivel de la margen coincidente con el nivel del pelo de agua

- Después de cada paso de cálculo se determina la pendiente de la margen
- Si la pendiente de la margen es menor que la pendiente crítica, dada por la condición $\tan \omega_c = \mu_c$, no se realiza ninguna acción.
- Por el contrario, si la pendiente de la margen es igual o mayor a la pendiente crítica, se considera un proceso de "deslizamiento" local: La

altura del nodo de la margen se disminuye hasta lograr que la pendiente sea la crítica, y un nuevo nodo se agrega al dominio de cálculo (hacia el exterior del canal) para representar la nueva ubicación de la margen.

En la figura 3.7 se observa como funciona el mecanismo de falla.

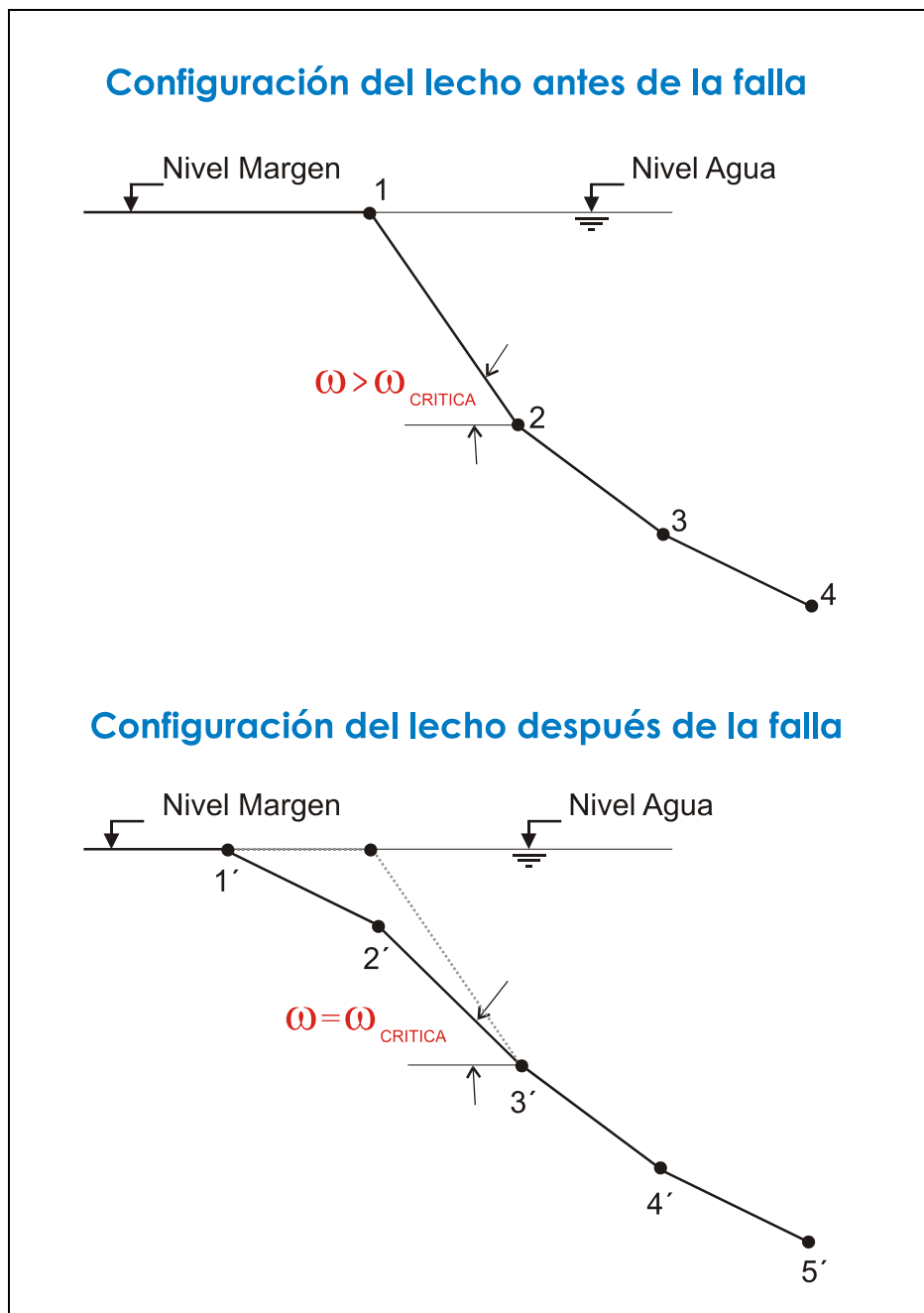


Figura 3.7 Funcionamiento del mecanismo de falla de márgenes

Es de destacar que este modelo de falla está implementado tanto en la margen derecha como en la izquierda, a fin de considerar la asimetría de erosión en las mismas que provoca el caso de un canal curvo, debido a la aparición del efecto de la corriente secundaria del fluido.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL



*Mirar el río hecho de tiempo y agua
y recordar que el tiempo es otro río,
saber que nos perdemos como el río
y que los rostros pasan como el agua*

“Arte poética”, Jorge Luis Borges.

4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

4.1. IMPLEMENTACIÓN

El modelo matemático presentado en el capítulo anterior se implementó en un código computacional, siguiendo el esquema presentado en el diagrama de flujos de la figura 4.1.

Observando el diagrama de flujos, se ve que primero hay que ingresar los datos de entrada. Los mismos comprenden:

- El número de nodos en los que se quiere discretizar la sección transversal del canal (N).
- El tiempo de simulación requerido (NT)
- El paso de avance temporal (Δt)
- Altura del pelo de agua (H_0).
- El ancho inicial de la solera del canal (B_0).
- La pendiente de ambas márgenes.
- El radio de curvatura de la margen interior (R_c).
- El coeficiente de Manning
- La pendiente longitudinal del canal (I_x).
- Diámetro medio del material constitutivo del canal (d_{50}).
- Densidad del sedimento (ρ_s).

Es de destacar, que se podría ingresar directamente una batimetría, lo que haría que no fuese necesario definir ni las pendientes de las márgenes ni el ancho inicial de solera.

Una vez que se definidos los datos anteriores, se procede a realizar cálculos iniciales, entre los que se encuentran:

- Cálculo del pelo de agua y de la elevación del fondo para todos los nodos que representan la sección transversal del canal.
- Cálculo del área y del radio hidráulico de la sección.
- Cálculo del caudal.
- Cálculo del factor geométrico B_g para todos los nodos.
- Cálculo del factor de fricción f para todos los nodos.

Una vez que se le ingresaron los datos de entrada al programa y se realizaron los cálculos iniciales, el mismo resuelve, mediante los submodelos hidrodinámicos, las velocidades longitudinales y la velocidad transversal en el problema propuesto. Una vez que se cuenta con el campo de velocidades resuelto, se pasa al submodelo sedimentológico, en el cual se determinan las tasas de transporte de fondo en ambas direcciones. A partir de conocer los transportes de sedimentos, se puede calcular la evolución del lecho, a través del submodelo morfológico. Finalmente, con el nuevo lecho, se analiza, mediante los modelos de fallas de márgenes (uno para margen derecha y otro para margen izquierda) si hay erosión en las mismas.

Todo este proceso se repite hasta llegar al tiempo de análisis previamente establecido.

El código computacional del presente trabajo se escribió en el lenguaje Fortran 90 en su versión Visual Fortran 5.0 para plataforma Windows. Fortran es un lenguaje de programación de propósito general, principalmente orientado a la computación matemática, por ejemplo para realizar aplicaciones científicas y de ingeniería. Fortran es un acrónimo de FORMula TRANslator (es decir Sistema de Traducción de Fórmulas Matemáticas). Fue el primer lenguaje de programación de alto nivel. El desarrollo de Fortran se inicio en la década de 1950 en IBM y existen muchas versiones desde entonces. Este lenguaje de alto nivel se usa principalmente en ingeniería y ciencias exactas, donde, por lo general, se involucran cálculos matemáticos complejos. Si

bien el lenguaje era inicialmente un lenguaje imperativo, las últimas versiones incluyen elementos de la programación orientada a objetos.

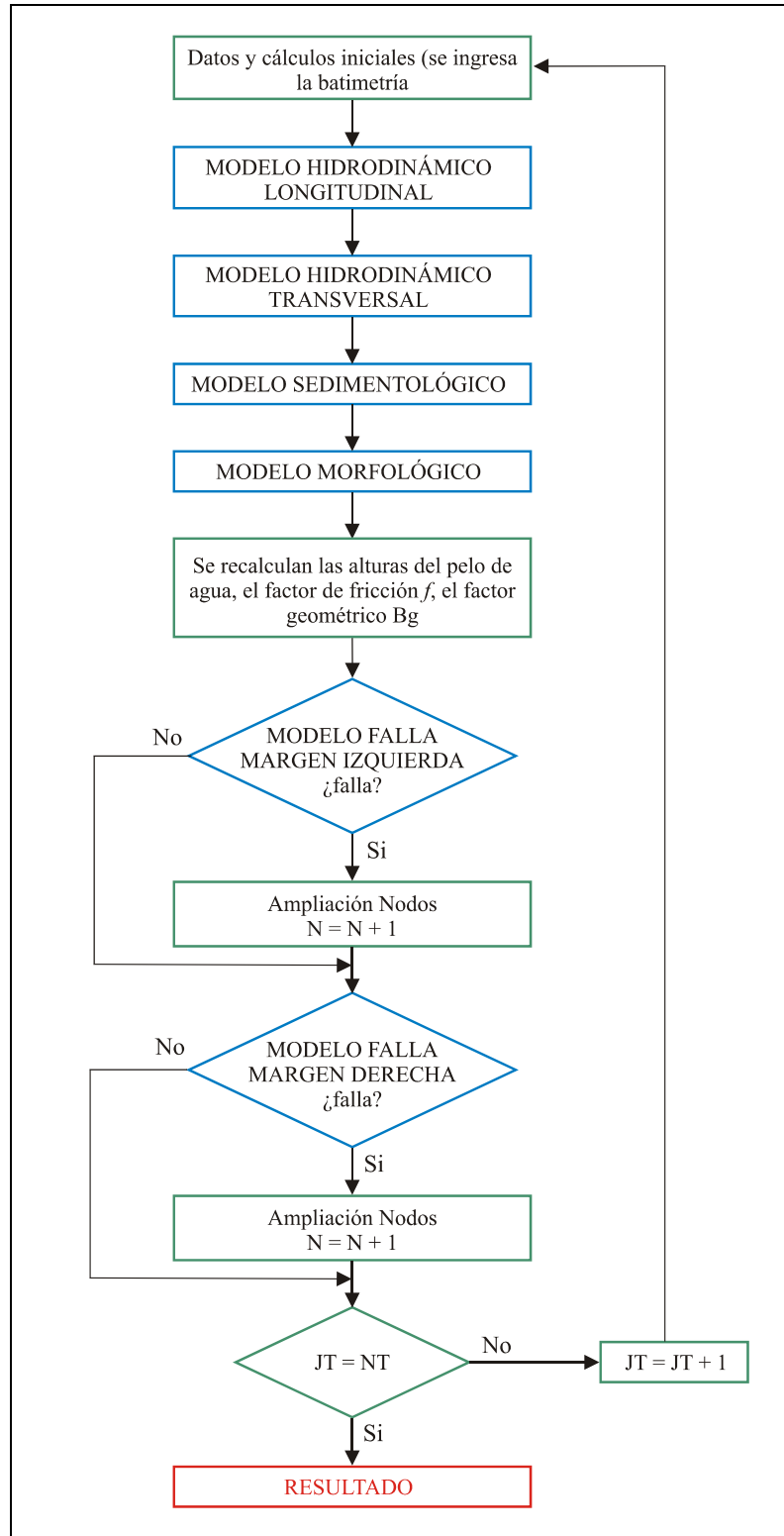


Figura 4.1 Diagrama de flujos del código computacional

4.2. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO HIDRODINÁMICO

En la presente tesis, la ecuación diferencial no lineal [4] se resuelve en forma numérica. Dicha ecuación es discretizada usando un esquema de diferencias finitas centrado. El sistema algebraico no lineal resultante es resuelto mediante el método de Newton-Raphson. Como resultado, se obtiene la velocidad longitudinal promediada en la dirección vertical.

Como condición de borde para la ecuación [4] se toma a la [6].

4.2.1. Esquema de diferencias finitas

En el apéndice II se realiza una pequeña introducción al método de diferencias finitas.

4.2.2. Método de Newton Raphson

La explicación de este método se encuentra en el apéndice III

4.3. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO SEDIMENTOLÓGICO

4.3.1. Resolución del sistema de ecuaciones [40]

A partir del sistema de ecuaciones [40], se pueden obtener las incógnitas v_p^* y ψ , necesarias para conocer las tasas de transporte.

Dicho sistema se resuelve mediante el método de Newton-Raphson (ver apéndice III)

Para resolver el sistema no lineal de ecuaciones [40], las mismas pueden ser reescritas del siguiente modo

$$\sqrt{A^2 + x^2 - 2Axy}(A - xy) - By + C = 0 \quad [79]$$

$$\sqrt{(A^2 + x^2 - 2Axy)(1 - y^2)}x + B\sqrt{1 - y^2} - D = 0 \quad [80]$$

donde

$$x = v_p^* \quad [81]$$

$$y = \cos \psi \quad [82]$$

$$A = u_b^* \quad [83]$$

$$B = a \tau_{co}^* |\cos \beta| \quad [84]$$

$$C = a \frac{\tau_{co}^*}{\mu_c} \operatorname{sen} \alpha \quad [85]$$

$$D = a \frac{\tau_{co}^*}{\mu_c} \frac{\operatorname{sen} \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \quad [86]$$

Operando con las expresiones [79] y [80] se obtiene

$$(A - xy)^2 (A^2 + x^2 - 2Axy) - (By - C)^2 = 0 \quad [87]$$

$$(1 - y^2) (BA - Cx)^2 - D^2 (A - xy)^2 = 0 \quad [88]$$

Las ecuaciones [87] y [88] constituyen un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, x e y . Para la aplicación del método de Newton-Raphson, se definen las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ de la siguiente forma:

$$f(x, y) = (A - xy)^2 (A^2 + x^2 - 2Axy) - (By - C)^2 \quad [89]$$

$$g(x, y) = (1 - y^2) (BA - Cx)^2 - D^2 (A - xy)^2 \quad [90]$$

Los elementos de la matriz Jacobiana son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(A - xy)^2 (x - Ay) - 2y(A - xy)(A^2 + x^2 - 2Axy) \quad [91]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x(A - xy)(A^2 + x^2 - 2Axy) - 2xA(A - xy)^2 - 2B(By - C) \quad [92]$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2yD^2(A - xy) - 2C(BA - Cx)(1 - y^2) \quad [93]$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xD^2(A - xy) - 2y(BA - Cx)^2 \quad [94]$$

Llamando

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad \bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [95]$$

el sistema no lineal de las ecuaciones [89]- [90] es resuelto a través del siguiente procedimiento iterativo (Gerald & Wheatley 1994):

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k - [\bar{J}_k]^{-1} \cdot \bar{F}_k \quad [96]$$

4.3.2. Resolución del sistema de ecuaciones [65]

Según lo visto en el desarrollo del modelo sedimentológico, y a fin de considerar el efecto de la curvatura, el sistema de ecuaciones [40] se reemplaza por el sistema, el cual, de nuevo, puede ser resuelto eficientemente usando el método de Newton-Raphson

Análogamente, el sistema de ecuaciones [65] puede ser escrito como

$$\sqrt{A''^2 + A'^2 + x^2 - 2A''x\sqrt{1-y^2} - 2A'xy(A'' - x\sqrt{1-y^2})} - B\sqrt{1-y^2} + C = 0 \quad [97]$$

$$\sqrt{A''^2 + A'^2 + x^2 - 2A''x\sqrt{1-y^2} - 2A'xy(A' - xy)} - By + D = 0 \quad [98]$$

donde ahora la variable y es

$$y = \text{sen } \psi \quad [99]$$

y los nuevos parámetros A' y A'' son:

$$A' = u_{bp}^* \quad [100]$$

$$A'' \equiv u_{bs}^* = \frac{u_b^*}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_s}} = \frac{A}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_s}} \quad [101]$$

donde

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{U_r}{U} \sqrt{\frac{8}{Bfa}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega \cos^2 \alpha} \quad [102]$$

El resto de los parámetros son iguales a los definidos en el punto 3.3.1.

Las ecuaciones [97]-[98] se resuelven nuevamente usando el método de Newton-Raphson, con las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dadas por

$$f(x, y) = \sqrt{A''^2 + A'^2 + x^2 - 2A''x\sqrt{1-y^2} - 2A'xy(A'' - x\sqrt{1-y^2})} - B\sqrt{1-y^2} + C \quad [103]$$

$$g(x, y) = \sqrt{A''^2 + A'^2 + x^2 - 2A''x\sqrt{1-y^2} - 2A'xy(A' - xy)} - By + D \quad [104]$$

y los elementos de la matriz Jacobiana por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x - A''E - A'y)}{F} (A'' - xE) - EF \quad [105]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(-A'x + A''xy/E)}{F} (A'' - xE) + \frac{By}{E} + \frac{Fxy}{E} \quad [106]$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{(x - A''E - A'y)}{F} (A' - xy) - Fy \quad [107]$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{(-A'x + A''xy/E)}{F} (A' - xy) - Fx - B \quad [108]$$

Siendo

$$E = \sqrt{1 - y^2} \quad [109]$$

$$F = \sqrt{A''^2 + A'^2 + x^2 - 2A''xE - 2A'xy} \quad [110]$$

Llamando

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad \bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [111]$$

el sistema no lineal de las ecuaciones [103]- [104] es resuelto a través del siguiente procedimiento iterativo (Gerald & Wheatley 1994):

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k - [\bar{J}_k]^{-1} \cdot \bar{F}_k \quad [112]$$

4.4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO MORFOLÓGICO

La resolución numérica del modelo morfológico, consiste en resolver la ecuación de Exner (ecuación [78])

En el presente trabajo, se asumen condiciones longitudinales uniformes (o cambios muy suaves en dicha dirección), es decir, $\partial/\partial x = 0$. Por lo tanto la ecuación [78] es discretizada mediante el siguiente esquema explícito centrado de diferencias finitas (Carnahan, Luther & Wilkes):

$$\frac{[z_0]_j^{n+1} - (1-\theta)[z_0]_j^n + \theta([z_0]_{j-1}^n + [z_0]_{j+1}^n)}{\Delta t} + \frac{[r]_{j+1/2}^n ([q_{by}]_{j+1}^n - [q_{by}]_j^n) - [r]_{j-1/2}^n ([q_{by}]_j^n - [q_{by}]_{j-1}^n)}{(1-\lambda)[r]_j^n \Delta y^2} = 0 \quad [113]$$

donde n es el índice de la coordenada del tiempo, j es el índice de la coordenada espacial, y $0 \leq \theta \leq 1$ un factor de ponderación. Incrementando θ desde 0 a 1, se produce un incremento de la difusión numérica.

VALIDACIÓN DEL MODELO



*El río no ofrece, no quita, no ordena.
El río anda por dentro de sí, con la libertad de quien nada demanda.*

“Apuntes sobre la creación”, César Bisso

5. VALIDACIÓN DEL MODELO

5.1. VALIDACIONES DEL MODELO PROPUESTO

Para validar los modelos matemáticos propuestos, se evaluaron dos diferentes casos, para los cuales se contaban con resultados experimentales y teóricos anteriores.

En primer lugar, se ensayo un canal recto con márgenes erosivas, para comprobar que la metodología propuesta puede ocuparse con éxito del problema original de Kovacs & Parker (1994).

En segundo lugar, se ensaya un canal curvo con márgenes fijas (es decir, sin posibilidad de erosionarse), a fin de validar los efectos del flujo secundario incorporado.

Para ambos casos, se asumen condiciones de uniformidad longitudinal, es decir, $\partial/\partial x = 0$.

En los ensayos propuestos anteriormente, lo que se analiza es la evolución temporal de la sección transversal en el tiempo.

5.1.1. Canal recto

El experimento realizado por Ikeda (1981) se elige como la primer prueba de validación. El canal es recto, prismático, y simétrico, con una pendiente longitudinal de 0.00215. La figura 5.1 muestra la forma trapezoidal inicial de la sección transversal del canal, de la cual el fondo y las márgenes son de arena con un $d_{50} = 1.3$ milímetros.

Siguiendo los ensayos de Kovacs & Parker (1994), se adoptaron los siguientes valores para los distintos parámetros del modelo: $a^{1/2} = 11.9$, $\tau_{c0}^* = 0.035$, $\mu_c = 0.84$, $\lambda = 0.35$, $\varepsilon_y / U_* h = 0.13$.

El dominio lateral inicial fue discretizado en 100 intervalos, resultando un paso espacial $\Delta y = 0.00438$ m. El factor de peso para el esquema numérico se tomo en $\theta = 0$, correspondiente a las condiciones de menor difusividad. El paso temporal se

estableció en $\Delta t = 1$ segundo, el cual produce una elevación del lecho no mayor a 1 mm por paso de tiempo, proporcionando así una buena exactitud a la solución, y a su vez, preservando la estabilidad numérica.

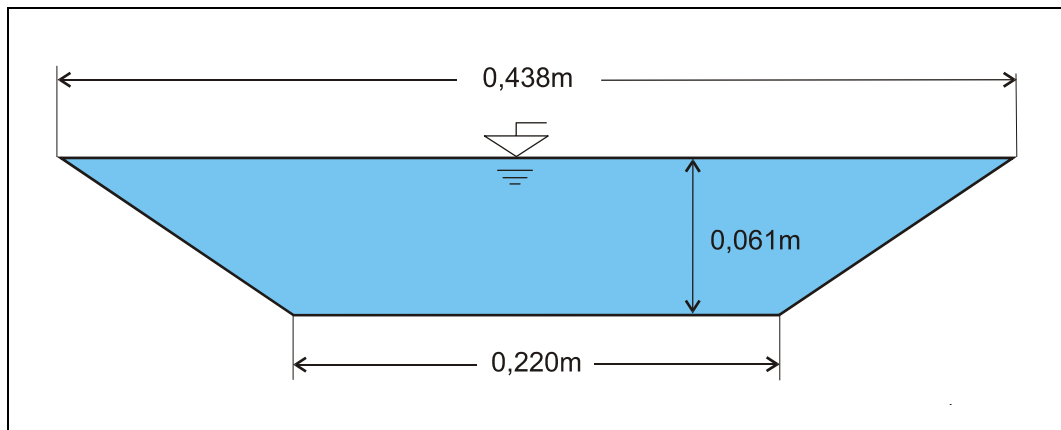


Figura 5.1 Canal utilizado para los ensayos de Ikeda

En las figuras 5.2 a) a 5.2 c) se presenta, solo para la mitad izquierda, el perfil normalizado del canal (B_0 es el ancho inicial del lecho, e y es la profundidad inicial en el centro del canal) según ambos modelos y los resultados experimentales obtenidos por Ikeda (1981). Se observa que el modelo de Kovacs & Parker (1994) captura con más exactitud la pendiente de la margen, lo cual debe ser producto de su elaborado modelo hidrodinámico. Las desviaciones de los datos experimentales con respecto a los valores obtenidos por los modelos teóricos, se deben a la presencia de formas de fondo, cuyo análisis no está incluido en la presente teoría.

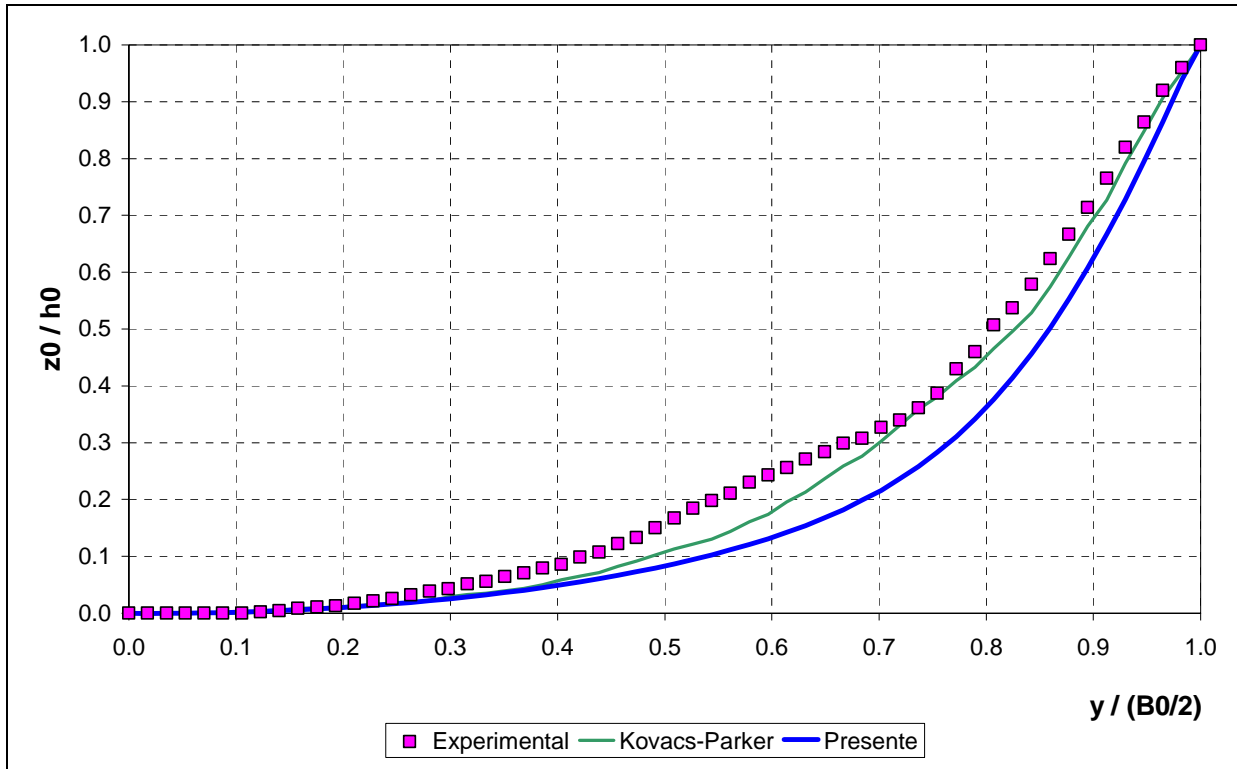


Figura 5.2 a) 1 hora

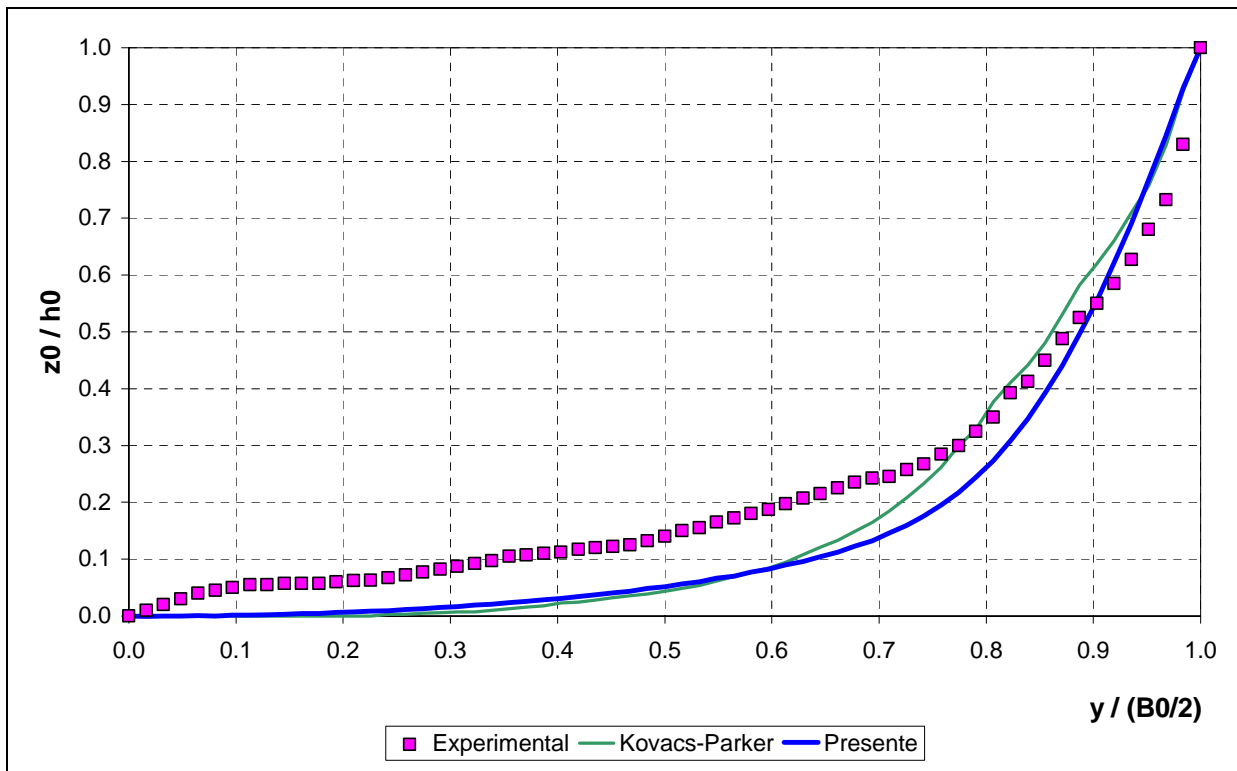


Figura 5.2 b) 4 horas

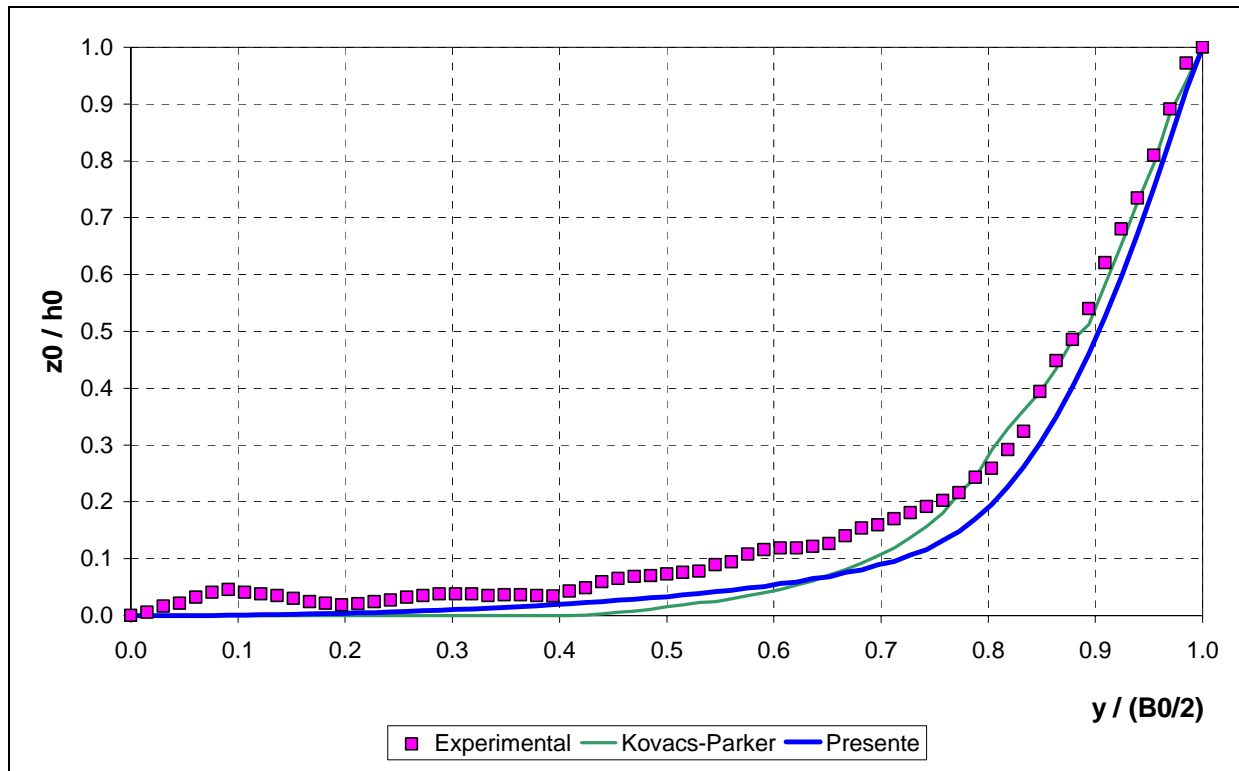
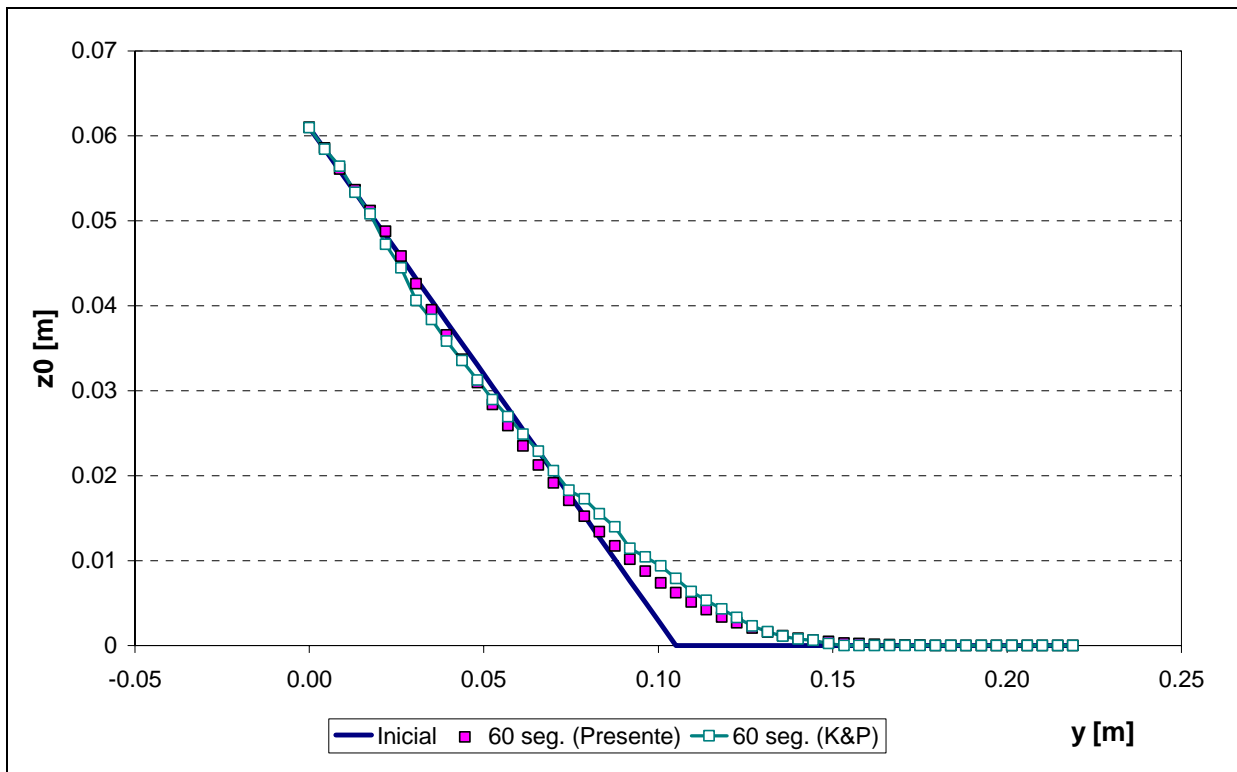


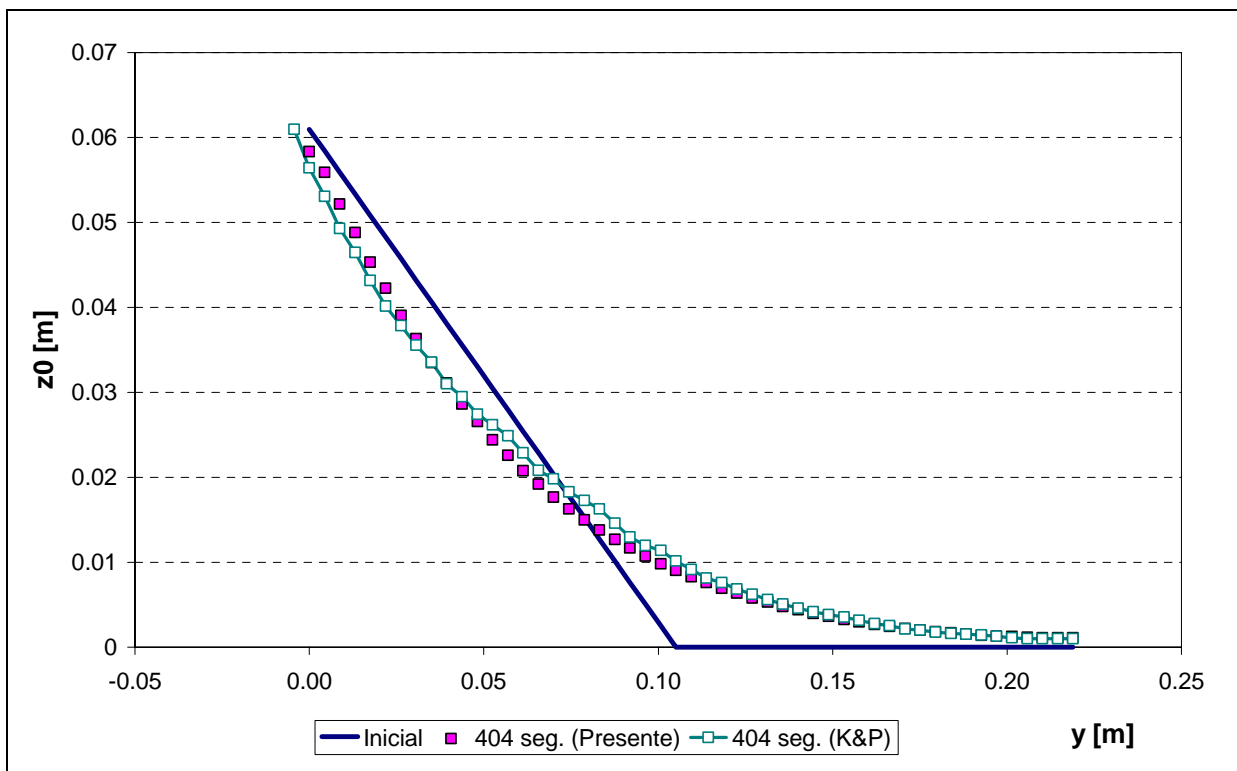
Figura 5.2 c) 12 horas

Figura 5.2 Comparación entre los resultados obtenidos con el presente modelo, el modelo de K & P y los resultados experimentales obtenidos por Ikeda (1981) para la forma de la sección transversal

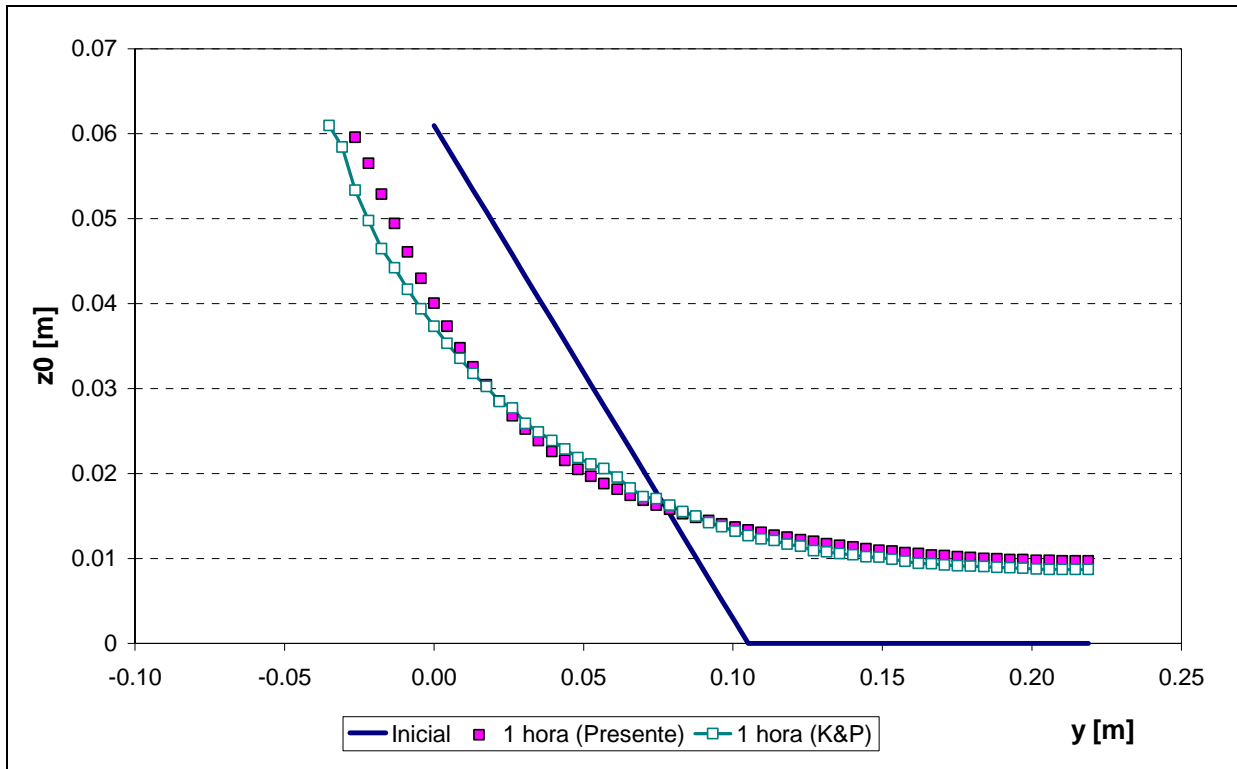
Las figuras 5.3 a) a 5.3 e) muestran la evolución de la sección transversal del canal para distintos tiempos de ensayos (solo para la mitad derecha por la simetría del canal) según el presente modelo, junto con los resultados numéricos obtenidos por Kovacs & Parker (1994), identificados como K&P en las figuras, para los mismos tiempos. Dichos autores utilizaron un modelo hidrodinámico lateral bidimensional (2D), es decir, no desacoplaron las direcciones vertical y lateral del movimiento, y tomaron en cuenta la componente vertical de la velocidad, lo cual conduce a un procedimiento más complejo de cálculo. Es de notar el satisfactorio acuerdo entre las dos soluciones que se observa en las figuras 5.3 a) a 5.3 e). Esto indica, que el modelo postulado en esta tesis (mas simple, pero con todos los procesos físicos predominantes incluidos) es lo suficientemente bueno como para captar todos los fenómenos relevantes.



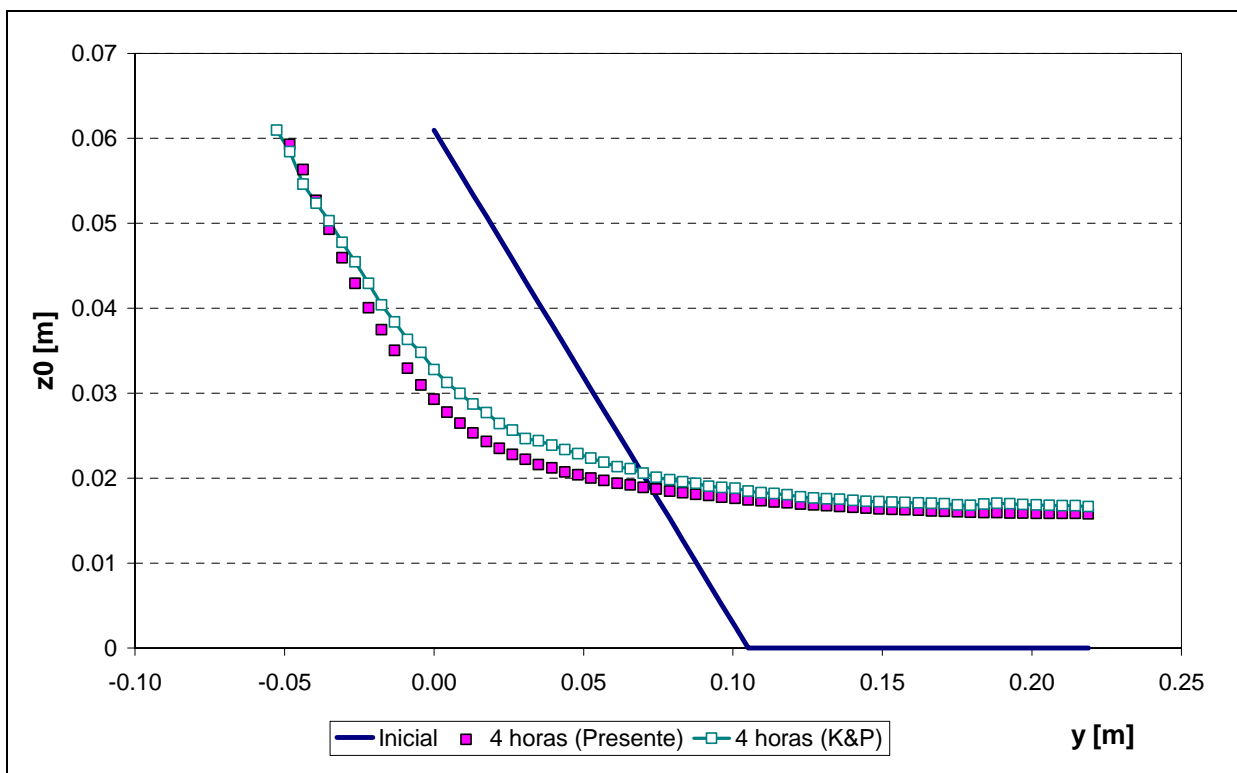
a) 60 segundos



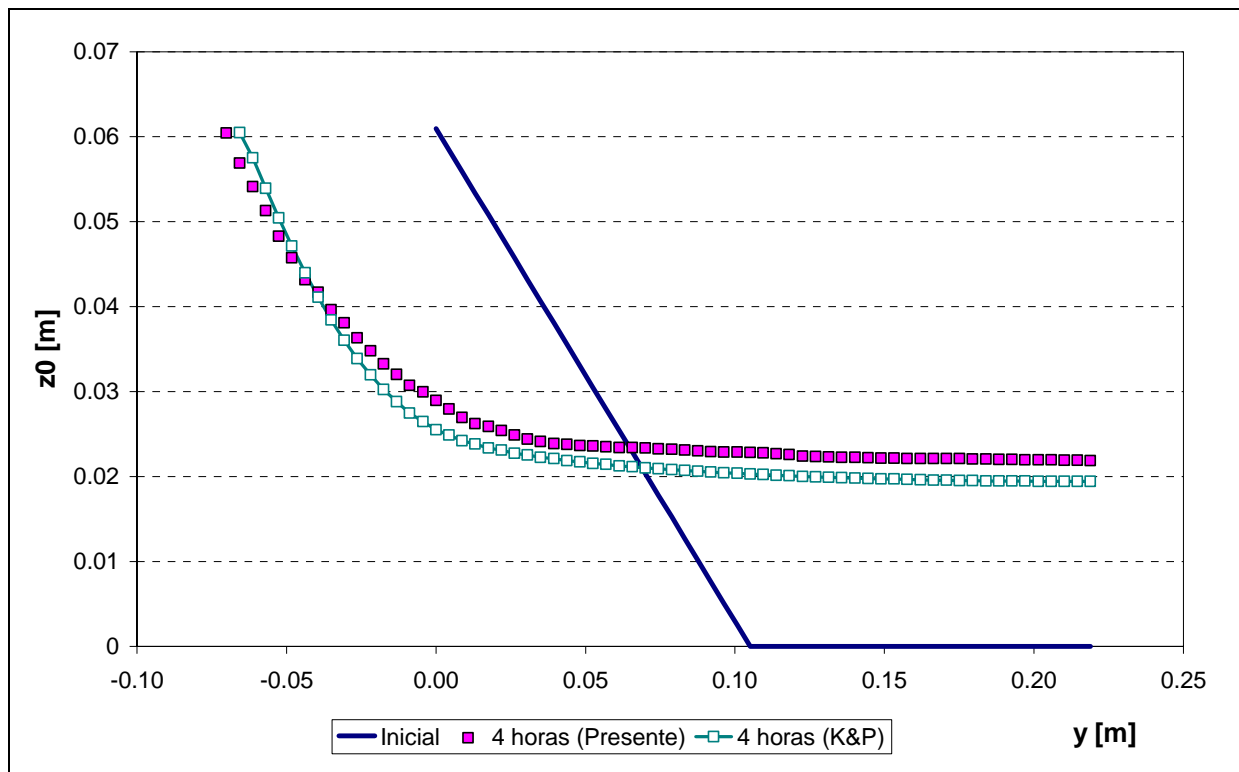
b) 404 segundos



c) 1 hora



d) 4 horas



e) 12 horas

Figura 5.2 Comparación de los resultados de la evolución de la sección lateral entre K&P (Kovacs and Parker1994) y el presente modelo

Se presentan comparaciones similares en la figura 5.4 para la evolución temporal del ancho superior W y de la profundidad h , contrapuestos con los valores iniciales (W_0 es el ancho superior inicial del canal, y h_0 es la profundidad inicial en el centro del canal). En el caso del ancho superior, se observa que la presente aproximación, la cual da resultados en forma escalonada debido a la naturaleza impulsiva del algoritmo de erosión de márgenes, sigue la tendencia de los resultados de K & P, sobrestimando la tasa de erosión en las primeras etapas, pero dando una mejor aproximación para las mismas a medida que el tiempo transcurre. Con respecto a la evolución de la profundidad en el centro del canal, el actual modelo provee un mejor acuerdo con los resultados experimentales.

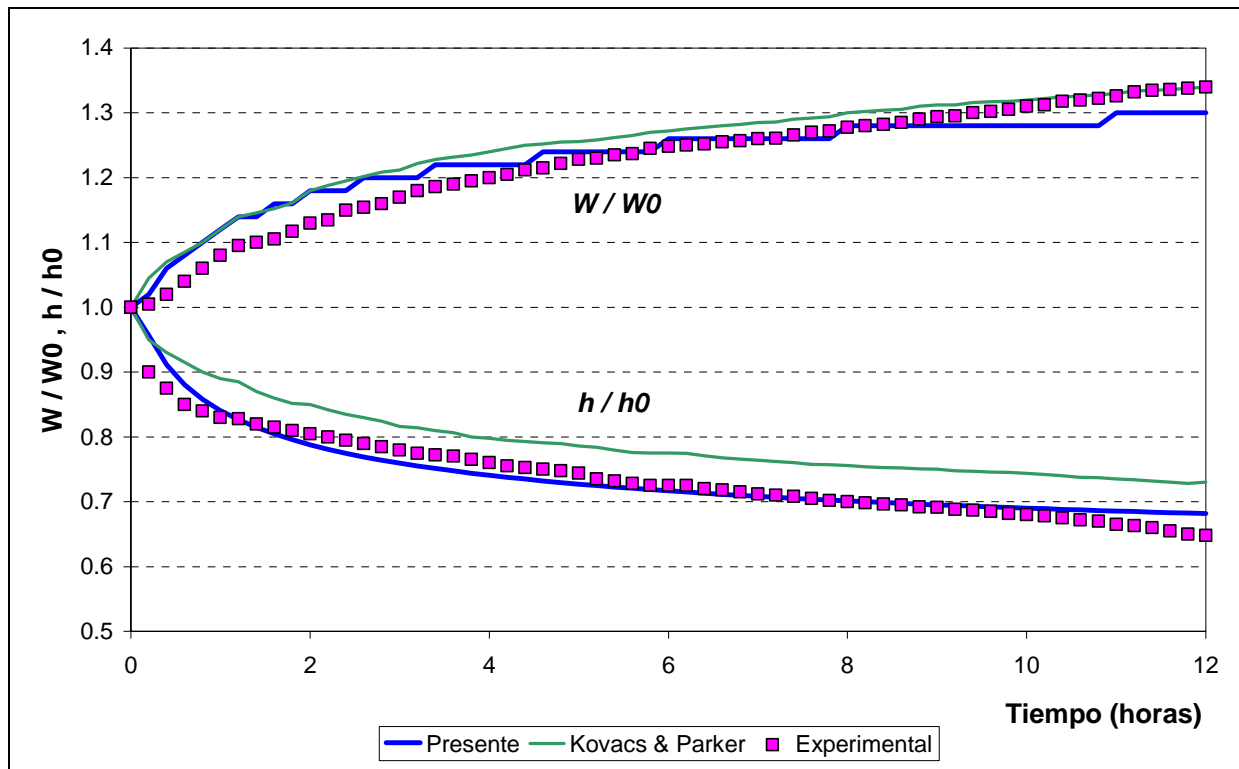


Figura 5.4 Comparación entre los resultados del presente modelo, el modelo de K & y los resultados experimentales obtenidos por Ikeda (1981) para la evolución del ancho superior y la profundidad en la zona central.

5.1.2. Canal Curvo

El segundo test de validación fue el experimento realizado por Kikkawa et al. (1976). El canal experimental (figura 5.5), es un canal curvo, con paredes rígidas, un ancho $B = 1$ m, una pendiente de fondo longitudinal $I_x = 0.002$, una profanidad inicial uniforme $h = 0.063$ m, un radio de curvatura uniforme $R_c = 4.5$ m. El material constitutivo del fondo es arena, con un $d_{50} = 0.9$ mm. El valor del coeficiente de fricción fue tomado del caso del canal recto, i.e., $\mu_c = 0.84$. El caudal fue de $Q = 30$ l/s.

El ancho del canal fue discretizado con 100 intervalos, resultando un paso espacial $\Delta y = 0.01$ m. Para este caso, fue necesario tomar un factor de peso del esquema numérico $\theta = 1$ para lograr que el modelo fuese numéricamente estable. Se tomo un paso temporal $\Delta t = 1$ segundo.

Tomando como profundidad de margen h_b a la profundidad correspondiente al nodo adyacente al extremo correspondiente, los mejores resultados se obtuvieron para $\kappa_b = 420$.

Es de notar, que en el presente ensayo no se esperan erosiones de márgenes.

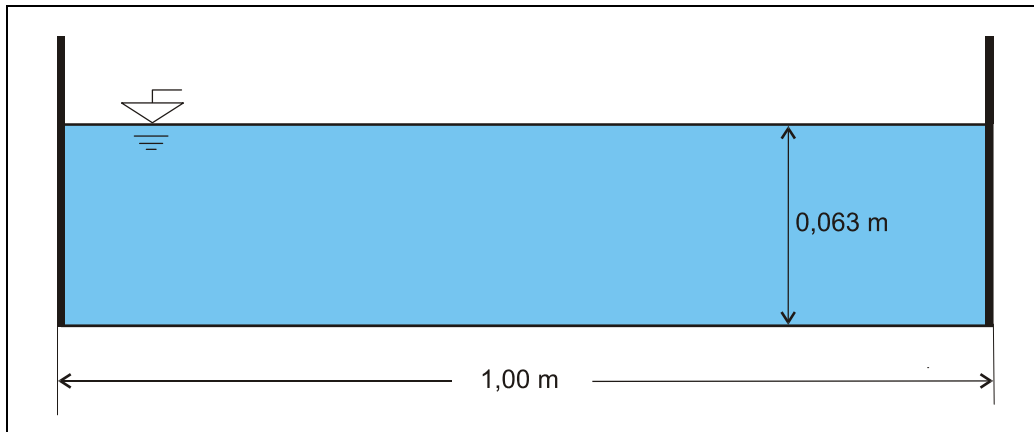


Figura 5.5 Canal utilizado para los ensayos de Kikkawa

La figura 5.6 muestra la comparación entre las predicciones del modelo y los datos experimentales obtenidos por Kikkawa et al. (1976), usando el modelo de velocidad lateral propuesto por el mismo autor, que llamaremos de aquí en adelante el modelo de Kikkawa por simplicidad. El acuerdo es satisfactorio, en vista de que el modelo representa correctamente la tendencia de evolución del canal, y da la correcta magnitud de los cambios en la altura del fondo. La desviación mas significativa, tanto cualitativa y cuantitativamente, ocurre cerca de la margen derecha ($y = 1$). Siendo la solución sensible al tratamiento de la capa límite, a través de la mascara, una formulación mas elaborada para esta capa, podría resultar en una mejoría de los resultados obtenidos.

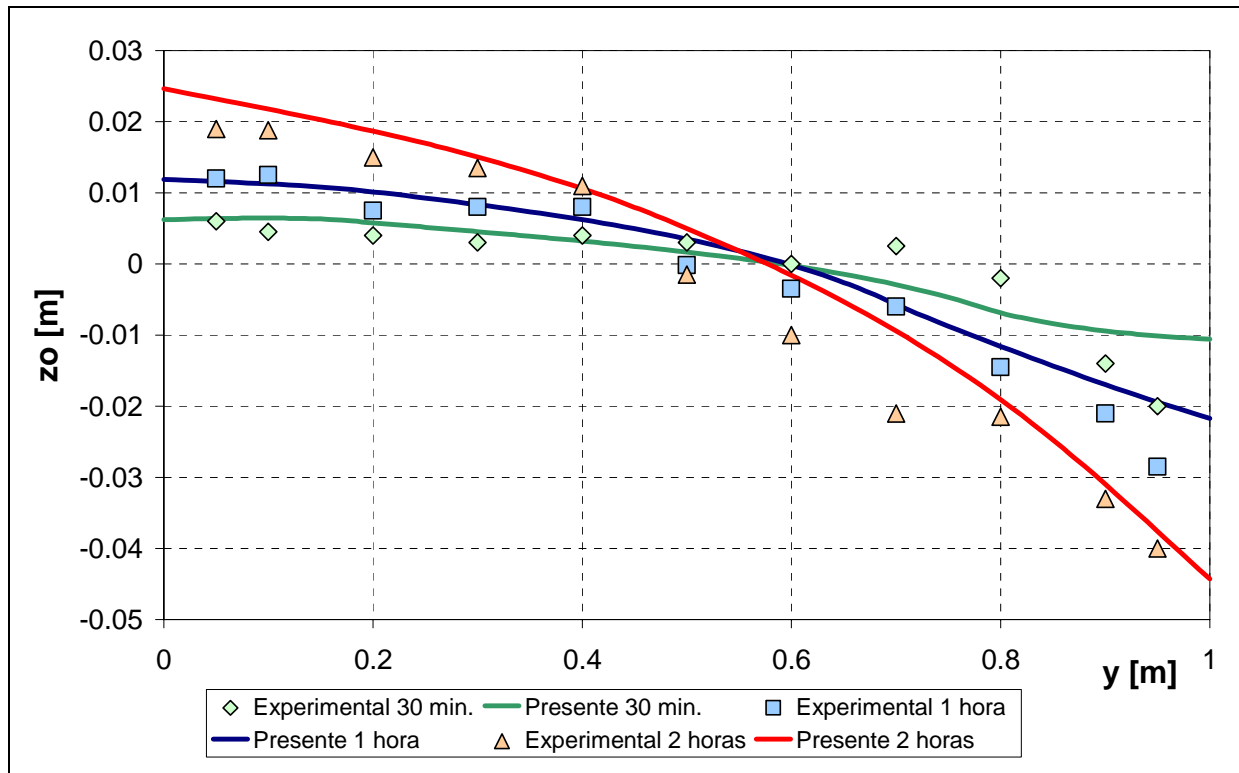
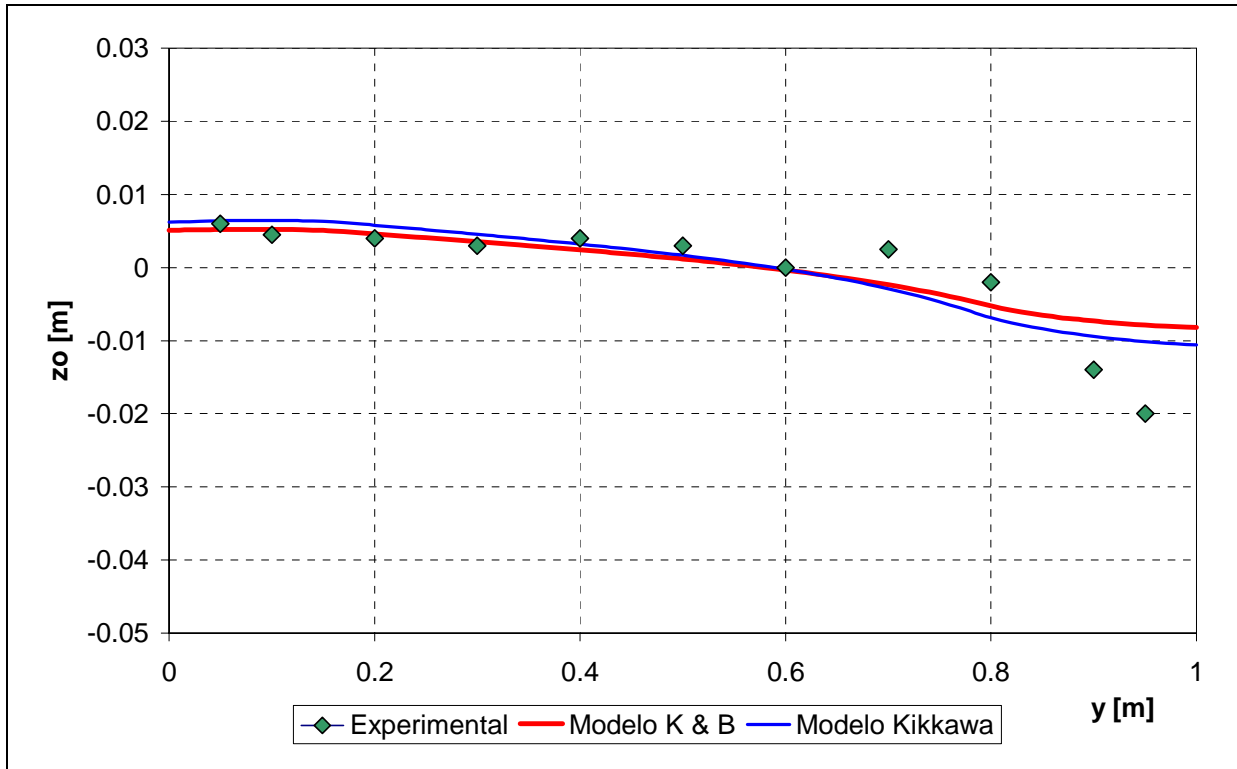
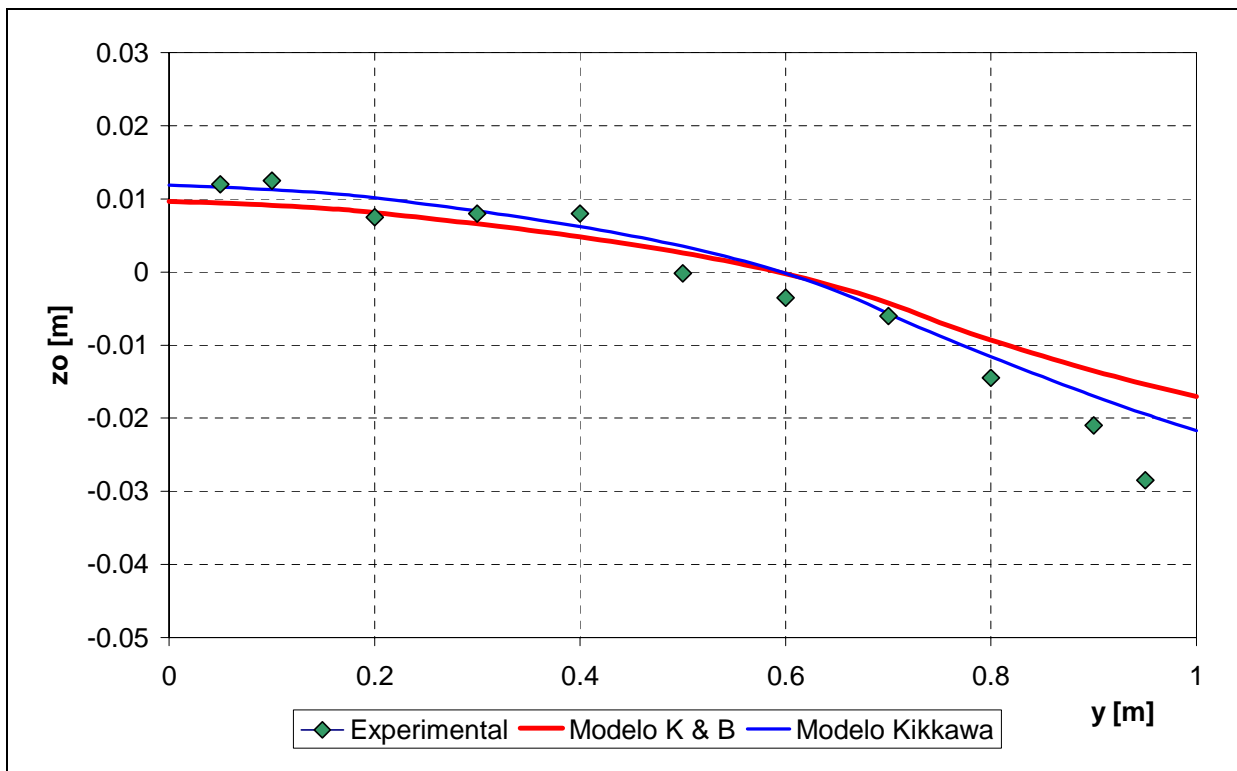


Figura 5.6 Comparación entre datos experimentales y los resultados del modelo propuesto usando el modelo de velocidad lateral de Kikkawa (Kikkawa et al. 1976).

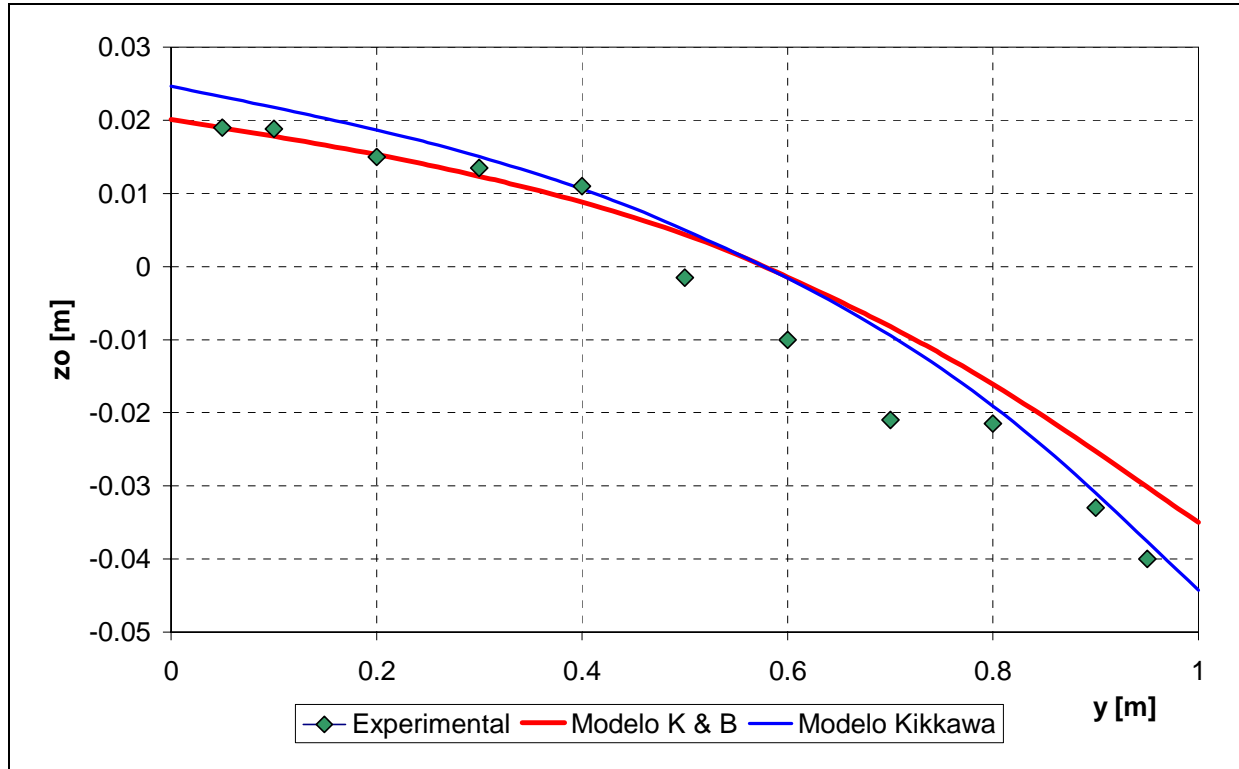
En las figuras 5.7 a) a 5.7 c) se presentan los resultados usando el modelo de velocidad lateral de Kalkwijk & Booij (1986), o sencillamente el modelo K & B en adelante, y se los compara con los resultados experimentales y con la solución obtenida a partir del modelo de Kikkawa. Se puede observar que el nivel de concordancia con los resultados experimentales es similar al obtenido con el modelo de Kikkawa, mostrando que el grado de detalle de los distintos modelos de velocidad lateral no son significativos en vista de la precisión de los resultados experimentales.



a) 30 minutos



a) 1 hora



c) 2 horas

Figura 5.7 Comparación entre los resultados experimentales y los resultados obtenidos con los modelos paramétricos de velocidad lateral de Kalkwijk & Booij (1986) and Kikkawa et al. (1976)

ENSAYOS NUMÉRICOS



*El agua del río va huyendo de sí misma:
Tiene miedo de su eternidad*

“La fuga inútil”, Dulce María Loynaz.

6. ENSAYOS NUMÉRICOS

Ya validada la metodología propuesta para simular el problema de la erosión de márgenes no cohesivos en canales de forma arbitraria (ya sean rectos o curvos), se presenta una serie de ensayos numéricos para ver la potencialidad y las limitaciones de la misma.

En las figuras 6.1 y 6.2 se ve el canal base a partir del cual se realizaron las distintas pruebas. La forma y las dimensiones de la sección transversal del mismo no son arbitrarias, sino que se adoptaron a partir de un caso real, como es el correspondiente a la canalización del Río Reconquista (Ver Apéndice IV).

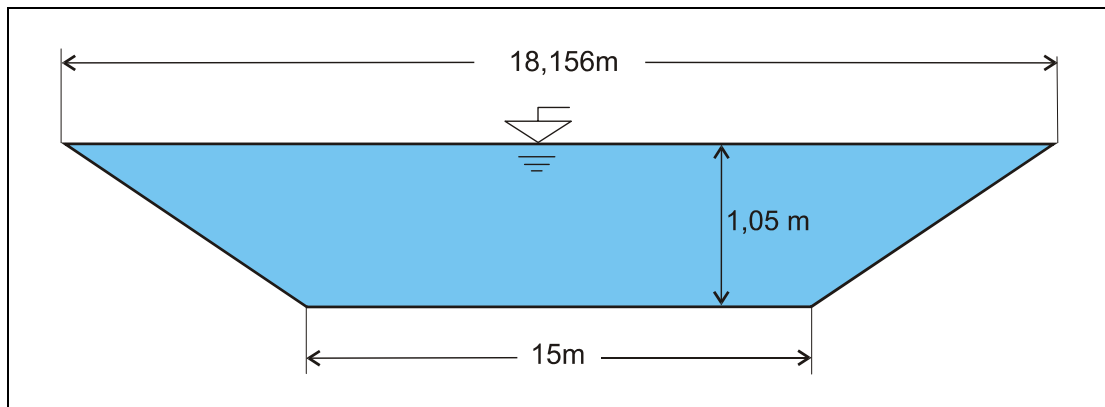


Figura 6.1 Canal utilizado para los ensayos numéricos – Sección Transversal.

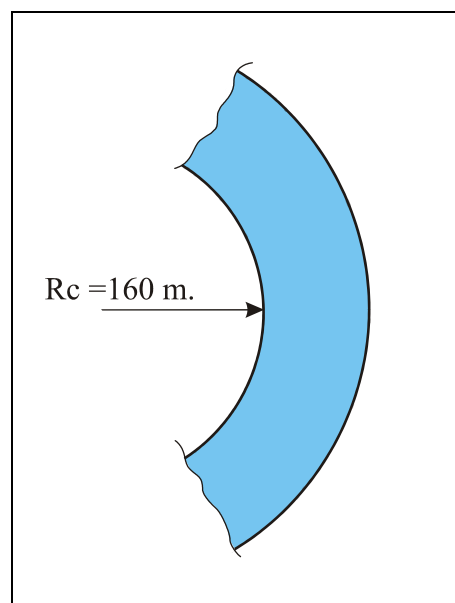


Figura 6.2 Canal utilizado para los ensayos numéricos – Vista superior.

El canal es prismático y simétrico, con una pendiente longitudinal de 0,002. La margen interior (margen izquierda), tiene un radio de curvatura $R_c=160$ m. El material constitutivo del fondo y de las márgenes es arena, la cual tiene un $d_{50} = 0,9$ milímetros. el caudal fue de $30 \text{ m}^3/\text{s}$.

Se adoptaron los siguientes valores para los distintos parámetros del modelo:
 $\tau_{c0}^* = 0.035$, $\mu_c = 0.58$, $\lambda = 0.35$, $\varepsilon_y / U_* h = 0.13$.

El dominio lateral inicial fue discretizado en 100 intervalos, resultando un paso espacial $\Delta y = 0.18156$ m. El paso temporal se estableció en $\Delta t = 5$ segundo.

En primer lugar se muestra la evolución temporal de la sección transversal del canal. Estos ensayos se repiten para una serie de distintos radios de curvatura que se le asigna al canal.

Luego se presentan una serie de gráficos que describen la evolución del ancho del canal a través del tiempo, para distintos radios de curvatura y para distintos tirantes de agua.

Por último se muestran los resultados de los ensayos de estabilización del canal.

6.1. EVOLUCIONES TEMPORALES DE LA SECCIÓN

En la figura 6.3 se muestra como evoluciona la sección transversal para el canal base para distintos tiempos (15 minutos, 30 minutos, 1 hora, 6 horas, 12 horas, 18 horas, 1 día). Como es de notar, se produce una erosión asimétrica en las márgenes, producida por la corriente secundaria del flujo, que aparece debido a la curvatura del canal. Se observa, como era de esperar, grandes erosiones en la margen externa (es decir, en la margen con mayor radio de curvatura), en cambio, en la margen interior se alcanzan a ver erosiones de mucho menor magnitud. Por ejemplo, para un día de simulación, la erosión en la margen derecha es aproximadamente de 1,2 veces el ancho de la superficie libre inicial.

Para poner bien de manifiesto la asimetría en la acreción de ambas márgenes, se ve que la erosión en la margen derecha, para un día de simulación, es casi ocho veces mayor que en la margen izquierda. También se observa, que para el mismo

tiempo de ensayo, el canal alcanza un ancho de la superficie libre dos veces y media mayor que el inicial.

En las figuras 6.4 y 6.5 se ven los resultados de dos ensayos similares al anterior, y con el mismo canal, pero variando en ambos casos el radio de curvatura. En la figura 6.4 se ve el ensayo realizado con un radio de curvatura $R_c=450$ metros ($R_0/B_0=30$, llamando R_0 al radio de curvatura de la margen interior inicial, y B_0 al ancho de solera inicial del canal). Si bien se observa la misma tendencia que en la figura 6.3, es decir mayor erosión en la margen externa, se nota que la misma es de menor magnitud. Esto se lo relaciona con el hecho de que un radio de curvatura mayor, produce una corriente secundaria de menor intensidad, lo que a su vez determina menores tasas de transporte transversal de sedimentos. Como para tener una idea de la merma en la erosión de la margen externa, la misma es, para un día de simulación, de 0,7 veces el ancho de la superficie libre inicial (recordemos que en el caso anterior era de 1,2 veces). En este caso el canal alcanza un ancho de la superficie libre un poco menor que el doble del inicial. Si nos focalizamos ahora en la margen interna, se ve una erosión mayor que en el caso anterior, lo que intuitivamente es de esperar, ya que al aumentar el radio de curvatura, se tiende a una erosión más pareja o simétrica de las márgenes. Esta erosión es casi dos veces mayor que la que se presenta en el primer ensayo.

En el tercer ensayo realizado (figura 6.5), se le impuso al canal un radio de curvatura $R_c=3000$ metros ($R_0/B_0=200$). Este ensayo, en el cual el radio de curvatura es mucho mayor que el ancho del canal, se asemeja al caso de tener un canal recto. Como vimos en las validaciones, en un canal recto, las erosiones en ambos costados son simétricas, fenómeno que se nota en este ensayo, en donde se tienen erosiones bastante semejantes en ambas márgenes. Las tendencias que se observaban al pasar del primer ensayo ($R_0/B_0=10.66$) al segundo ($R_0/B_0=30$), se mantienen al analizar este tercer ejemplo. La erosión de la margen externa, al día de simulación, es de 0,5 veces el ancho de la superficie libre inicial (anteriormente eran de 1,2 y 0,7 veces respectivamente). El canal alcanza un ancho de la superficie libre semejante al del caso anterior, pero con la salvedad de que ahora las erosiones son semejantes en ambas márgenes. La erosión en la margen interna (o margen izquierda) es 2,5 veces

mayor que en el primer caso, y 1,5 veces mayor que el segundo (todo esto para el mismo tiempo de ensayo anteriormente mencionado).

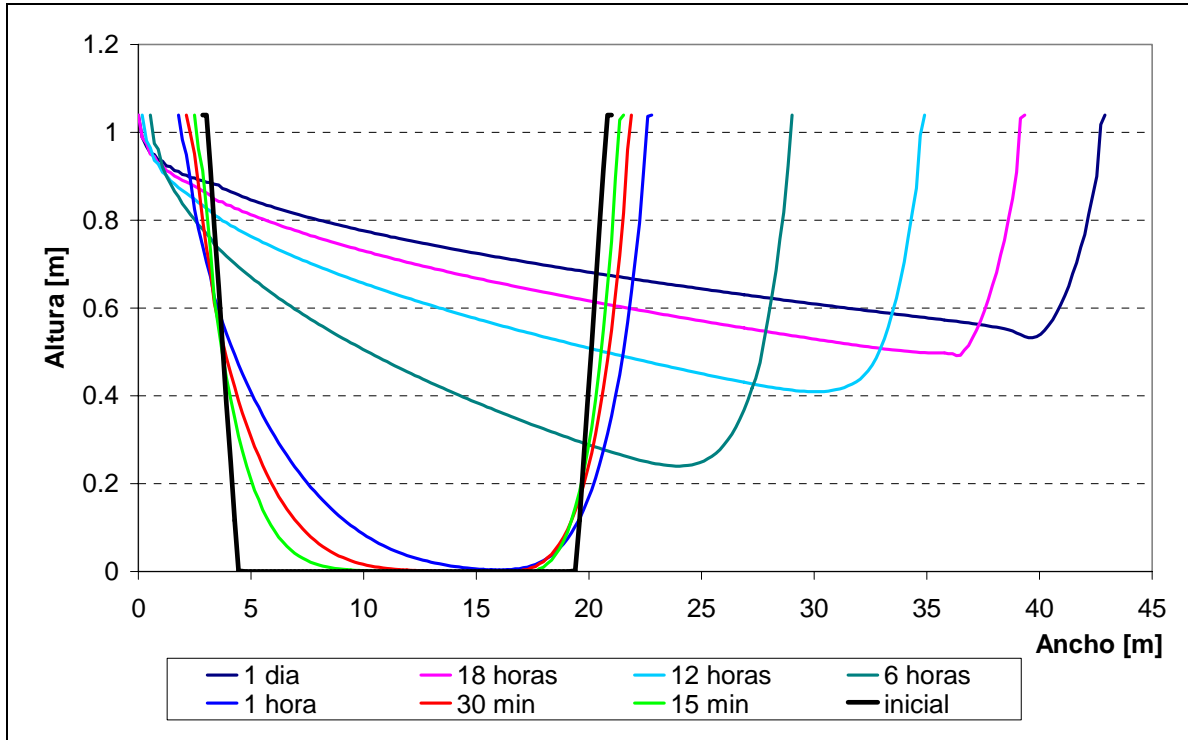


Figura 6.3 Evolución de la sección transversal del canal base a través del tiempo

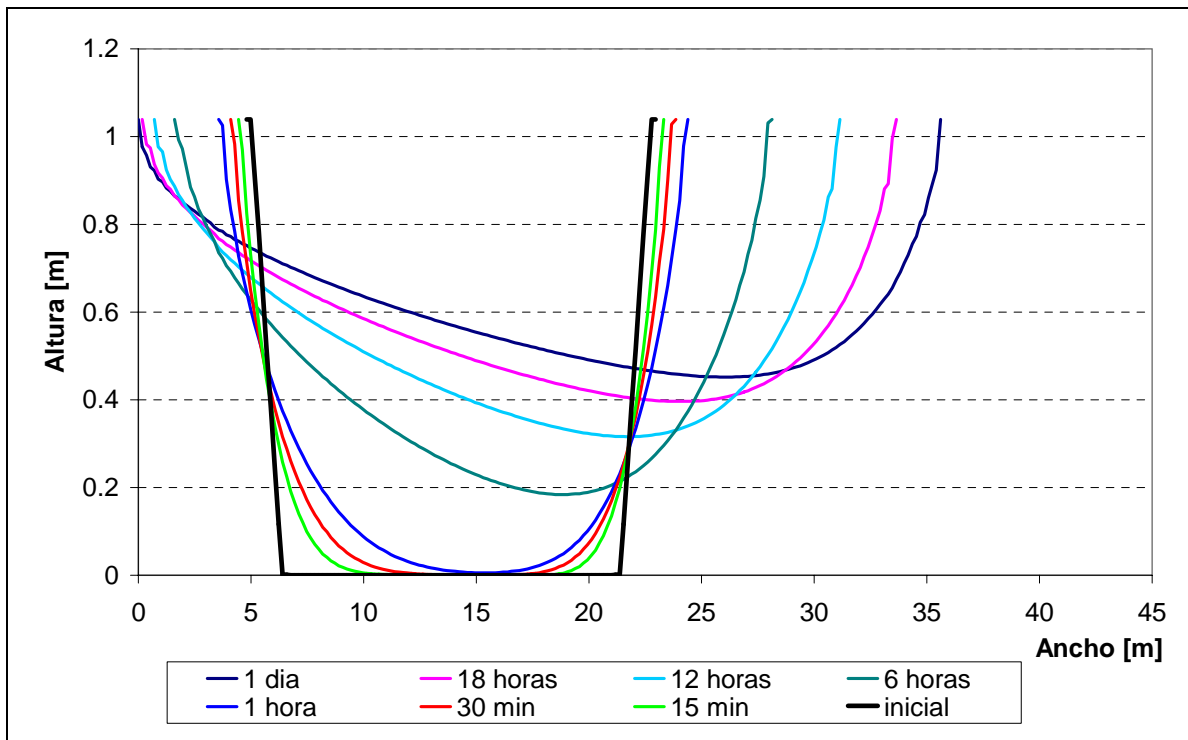


Figura 6.4 Evolución de la sección transversal del canal base (pero con $R_c=450m$) a través del tiempo

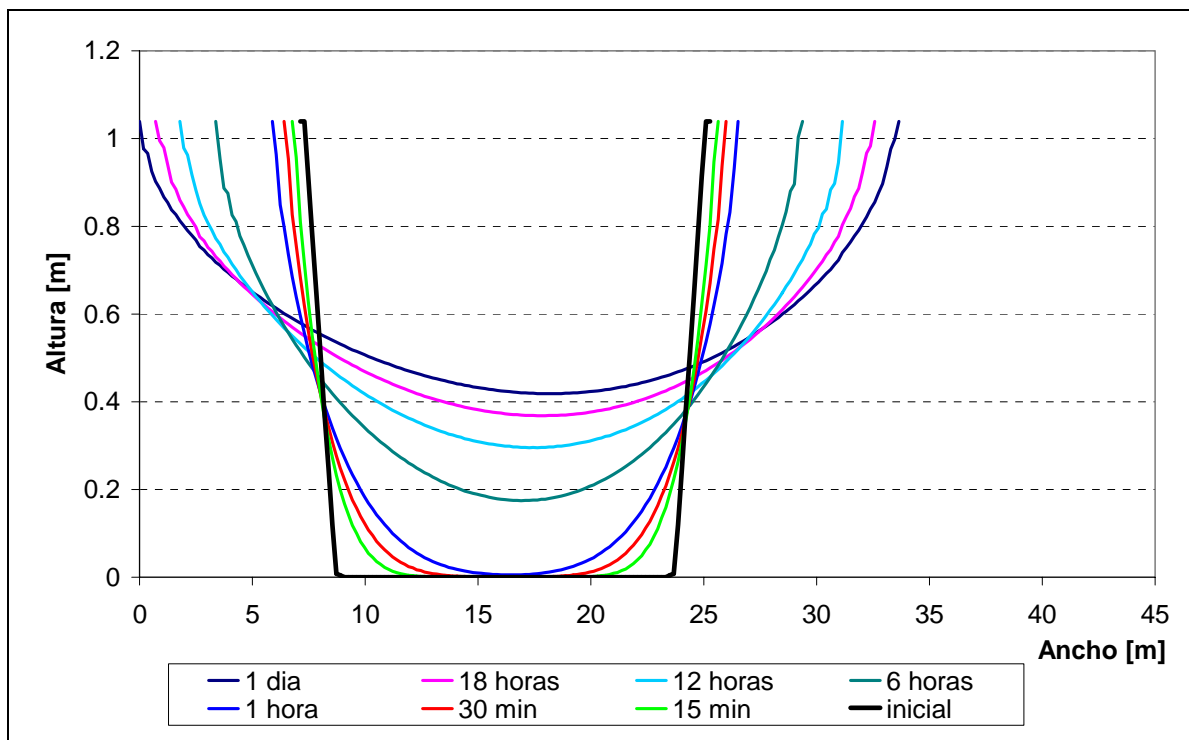


Figura 6.5 Evolución de la sección transversal del canal base (pero con $R_c=3000m$) a través del tiempo

En la serie de figuras siguiente (figuras 6.6 a 6.8) se muestran las formas que adopta la sección en distintos tiempos para una serie de radios de curvatura.

En la figura 6.6 se presentan una serie de ensayos de 12 horas. Los diferentes ensayos fueron realizados para canales semejantes al denominado "Canal Base", pero variándole el radio de curvatura a los mismos (los ensayos tuvieron un rango del factor R_0/B_0 que va desde $R_0/B_0=10.66$ a $R_0/B_0=200$). Las figuras 6.7 y 6.8 presentan los mismos resultados pero para ensayos de 6 horas y 1 hora respectivamente.

En las figuras 6.6 y 6.7 se nota claramente el efecto que producen pequeños radios de curvatura con respecto al ancho del canal. Como se dijo anteriormente, esto produce importantes corrientes secundarias, que a su vez, traen aparejados tasas de transporte transversales de sedimentos significativas. También se observa con claridad, que un canal con una relación $R_0/B_0=200$, para un tiempo de ensayo de un día, se comporta prácticamente como un canal recto, y las erosiones esperables en ambas márgenes son similares.

En la figura 6.8, correspondiente a un ensayo de 1 hora, no se llega a apreciar claramente el efecto del radio de curvatura, aunque se ven diferencias en las formas de las distintas secciones, estas no son muy significativas. Esto se debe a que la serie de distintos canales no tuvieron tiempo suficiente para evolucionar.

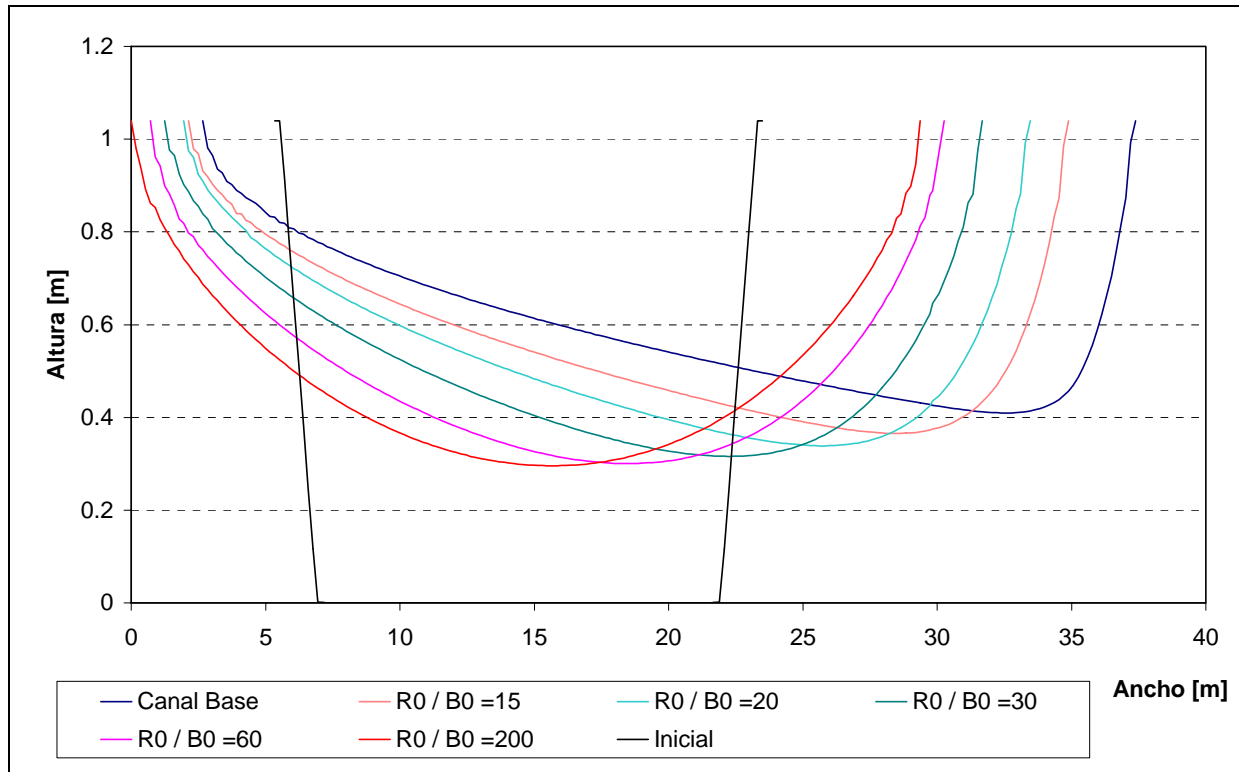


Figura 6.6 Forma de la sección transversal de diversos canales a las 12 horas

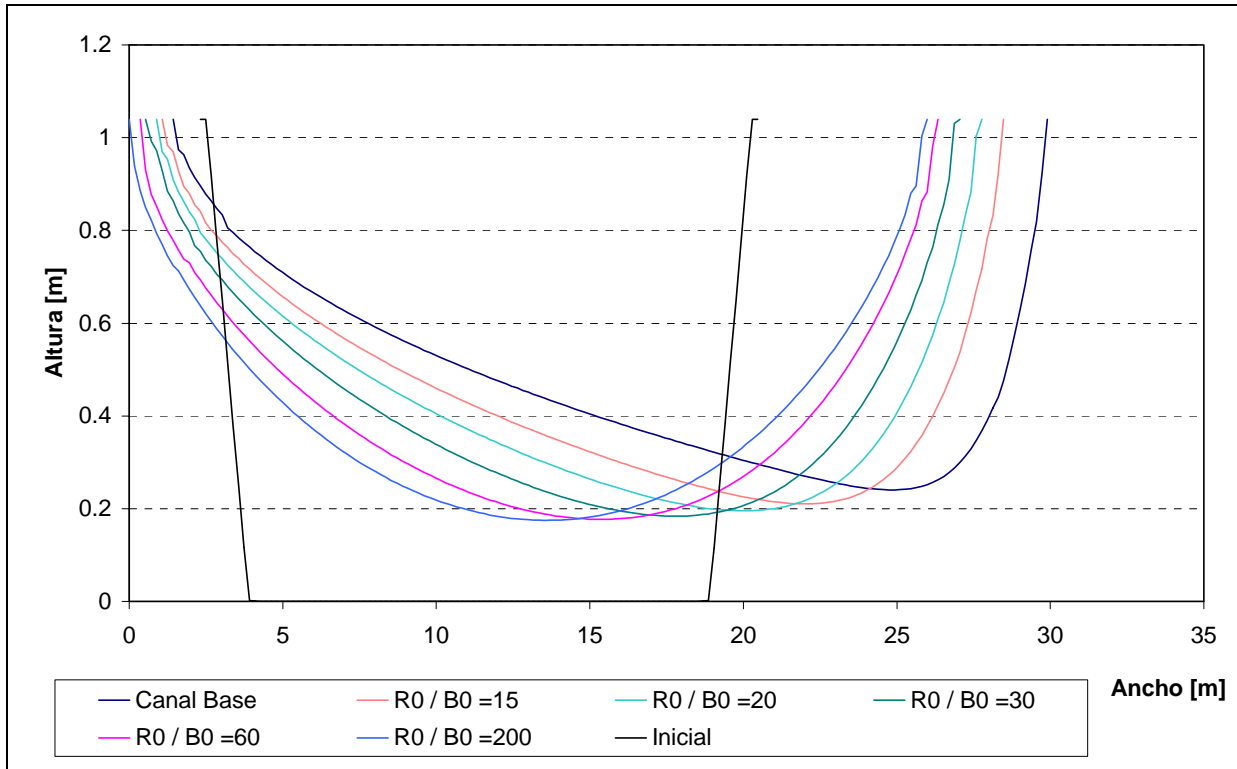


Figura 6.7 Forma de la sección transversal de diversos canales a las 6 horas

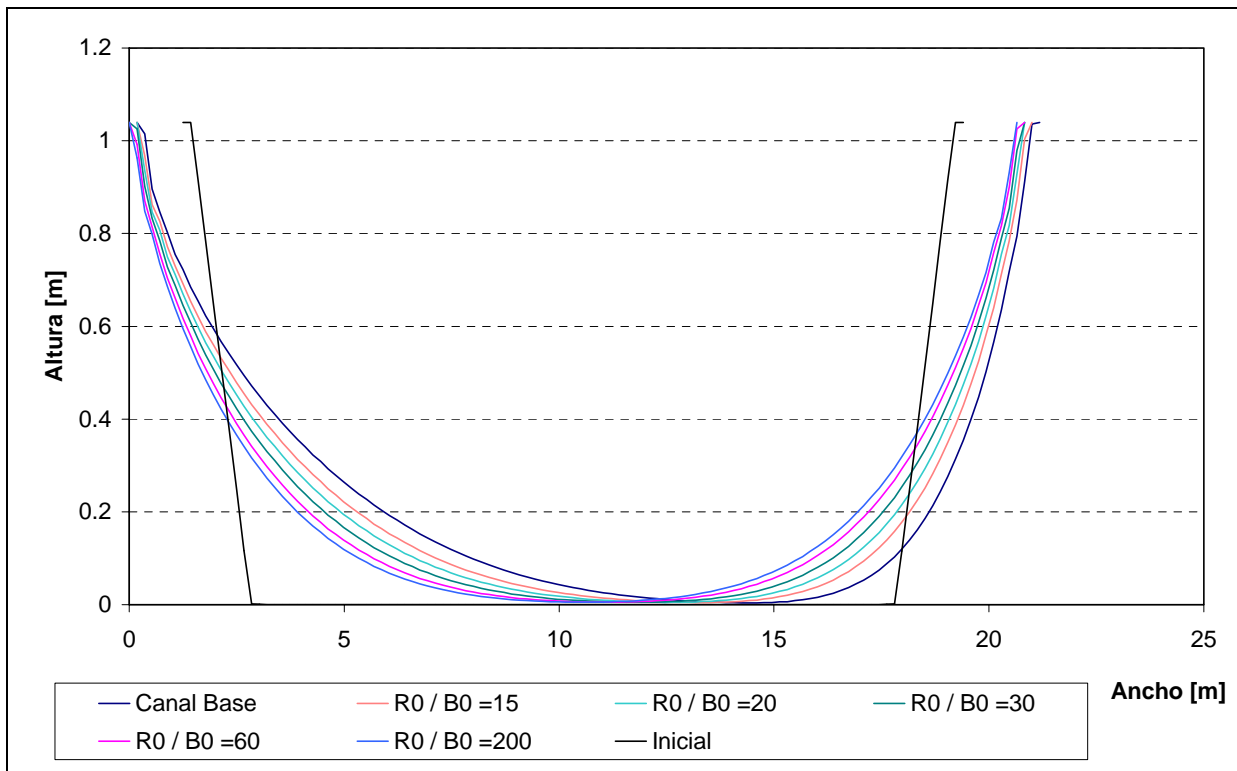


Figura 6.8 Forma de la sección transversal de diversos canales a la hora

A partir de los resultados de todos los ensayos anteriores, y con la idea de independizar los gráficos del canal con el que se realizaron, se construyó el gráfico que se muestra en la figura 6.9. En el se ve la evolución del ancho del canal con respecto a su ancho inicial en la superficie libre (W_0) a través del tiempo. Es de esperar que por lo tanto se mantengan las mismas conclusiones obtenidas en los ensayos anteriores, es decir, la influencia del radio de curvatura en los procesos erosivos de márgenes. Sin embargo, es interesante observar, que esta influencia no es tan significativa cuando la relación R_0/B_0 supera el valor de 40 (de hecho, el ancho esperable para canales con relaciones que van desde 60 a 200 es prácticamente similar).

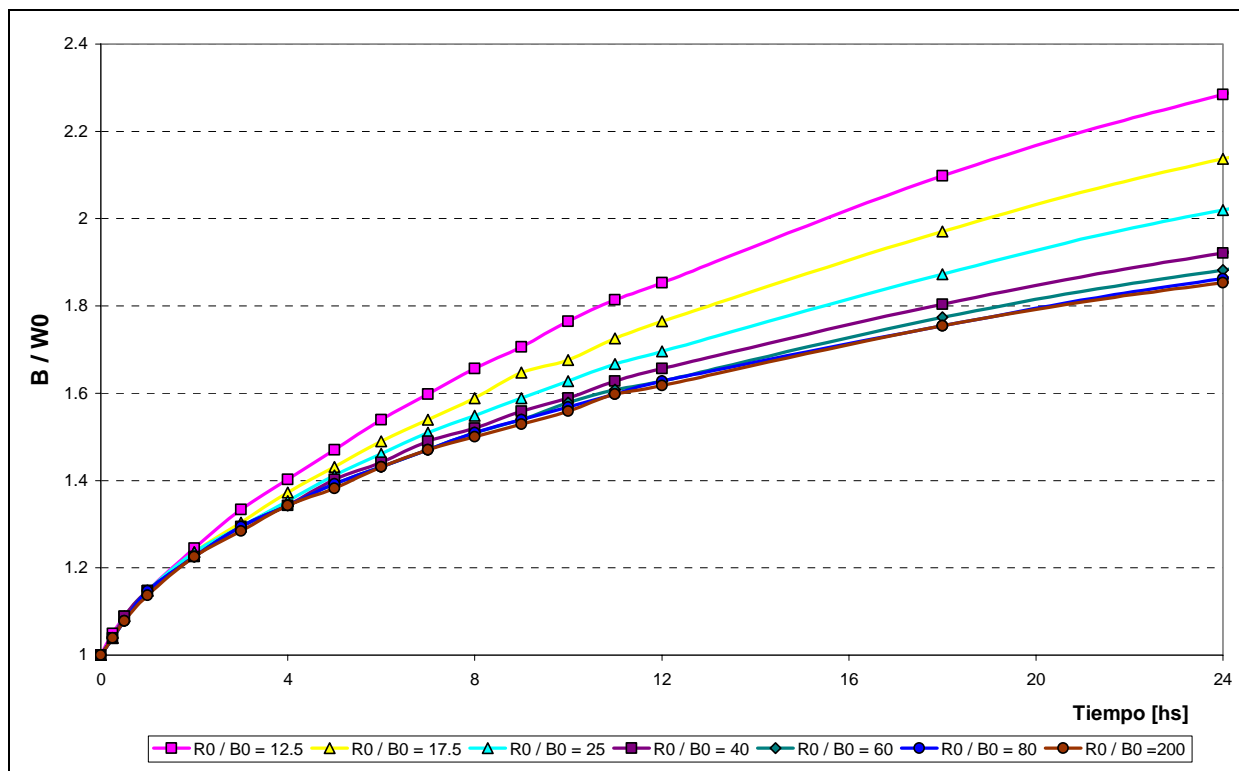


Figura 6.9 Evolución del ancho superior de varios canales con respecto a la solera inicial de los mismos a través del tiempo

Hasta ahora, la variable de análisis era el radio de curvatura. En la figura 6.10, se presentan otra serie de ensayos, en donde lo que se varió, para idénticos canales, es el pelo de agua del mismo. Si se analiza las ecuaciones de los distintos modelos

hidrodinámicos, se ve claramente que es esta variable la que influye notablemente en los valores que adoptan las corrientes de flujo (ya sea longitudinal o transversal). Se ensayaron tres canales ($R_0/B_0=17.5$, $R_0/B_0=25$ y $R_0/B_0=60$) con la relación H_0/B_0 correspondiente al canal base (relación que adopta el valor $H_0/B_0=0.07$). Luego, se hicieron los mismos ensayos, pero con una relación H_0/B_0 del doble que la anterior, es decir, $H_0/B_0=0.14$. Queda expuesto en la figura la gran influencia de esta variable. Para el caso del canal con la relación $R_0/B_0=17.5$, al variar la altura del pelo de agua, se observó un aumento del ancho del canal (expresado en la relación B/W_0 , siendo W_0 el ancho inicial en la superficie libre del canal) del 50%. Para los canales caracterizados mediante las relaciones $R_0/B_0=25$ y $R_0/B_0=60$, el aumento en el ensanchamiento del canal es de 40% y 30% respectivamente.

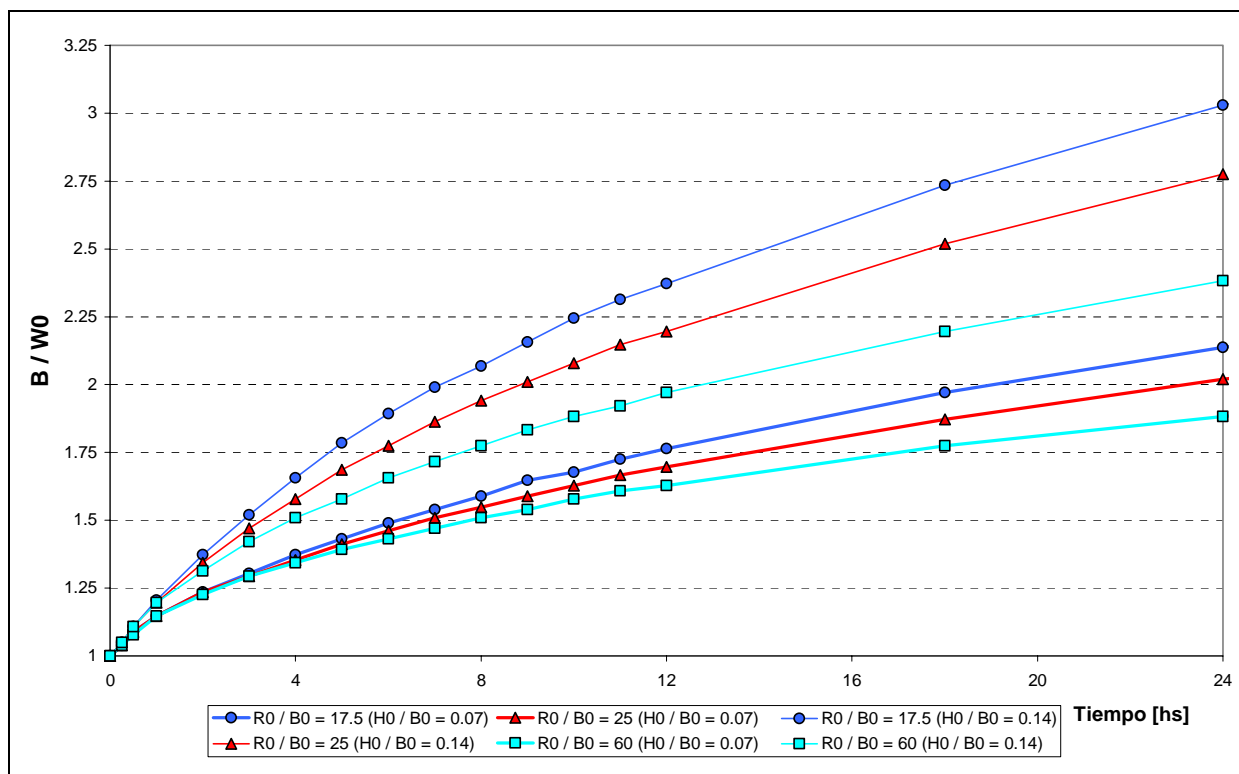


Figura 6.10 Influencia de la altura del pelo de agua en la evolución del ancho del canal

6.2. ENSAYO DE ESTABILIZACIÓN

En esta sección se presenta una serie de ensayos realizados para poder verificar si los canales llegaban a estabilizarse en su evolución. Para tal fin se realizaron 8 ensayos (cada uno para un canal semejante al canal base, pero con relaciones

$R_0/B_0=12.5$, $R_0/B_0=17.5$, $R_0/B_0=25$, $R_0/B_0=40$, $R_0/B_0=60$, $R_0/B_0=80$, $R_0/B_0=200$ y $R_0/B_0=10000$). Los ensayos simularon una evolución de 24 días.

La figura 6.11 muestra los resultados obtenidos en dichos ensayos, expresando la evolución de la relación B/W_0 a través del tiempo. Analizando la figura, se nota una clara tendencia a la estabilización de los distintos canales. Un detalle importante de observar, es que la estabilización de los canales se produce prácticamente en el mismo tiempo, independientemente del radio de curvatura de los mismos. Esta estabilización se produce aproximadamente entre las 288 y 336 horas (es decir, entre los 12 y 14 días).

En el gráfico se observa una zona gris. Esta zona indica que en ese recinto el modelo propuesto no garantiza los resultados, ya que el canal, al irse erosionando toma valores en la relación R_0/B que están fuera de las consideraciones realizadas al desarrollar el modelo (la relación mínima que se pudo simular fue de $R/B \approx 11$).

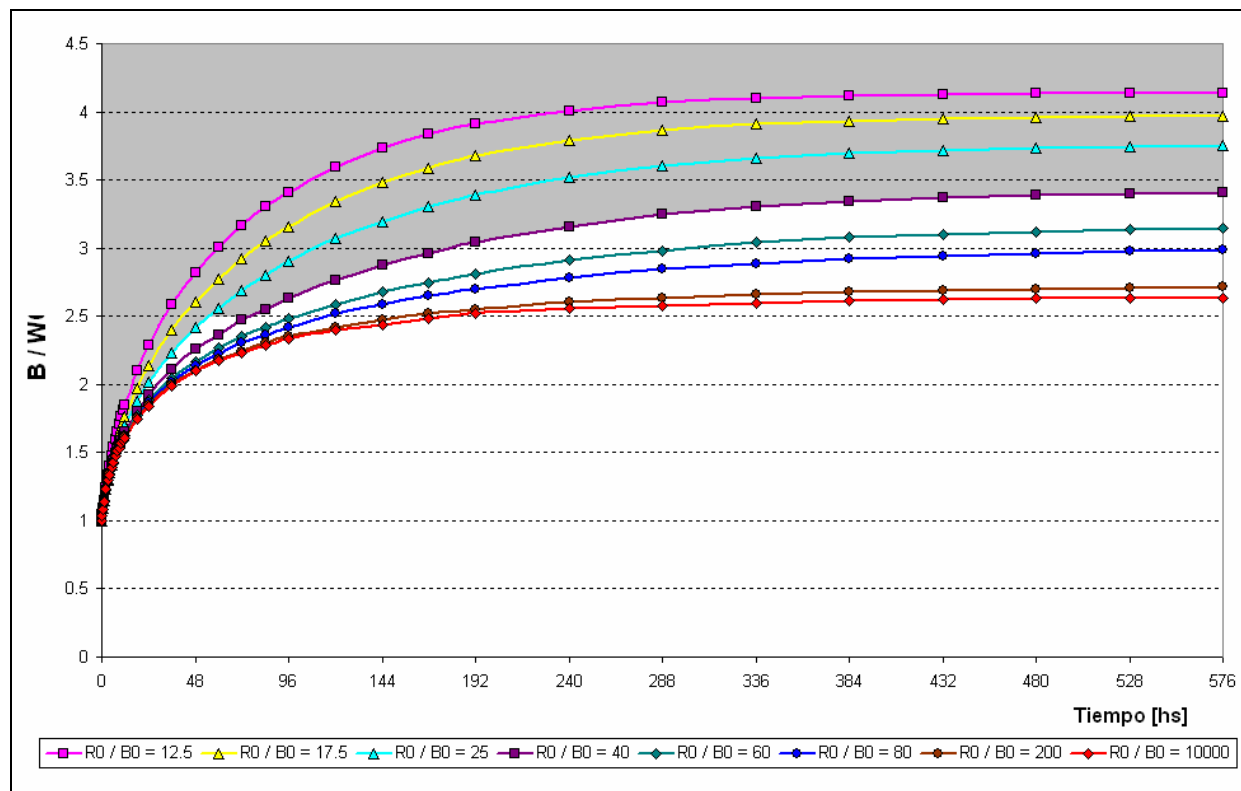


Figura 6.11 Ensayo de estabilización para un mismo canal con distintos radios de curvatura

Para ver bien las asimetrías en las erosiones de ambas márgenes, se presenta la figura 6.12. En ella se observa la relación entre la erosión de la margen interna (margen que como ya vimos esta sometida a una menor erosión debido al efecto de la corriente secundaria) y la margen externa, para el tiempo máximo de simulación (24 días). Es de esperar que esta relación sea igual a la unidad en el caso de tener un canal recto, en donde las erosiones son simétricas. Se puede observar en el gráfico que a partir de una relación $R_0 / B_0 = 6000$ el canal se comporta prácticamente como recto (es decir, la influencia del flujo secundario es despreciable).

La figura 6.13 es similar a la 6.12, pero muestra con mayor detalle la relación entre las erosiones de ambas márgenes para relaciones de R_0 / B_0 mas pequeñas, en donde se ven las mayores asimetrías.

En ambas figuras es bien notorio que al aumentar el radio de curvatura, la asimetría en las erosiones es cada vez menor.

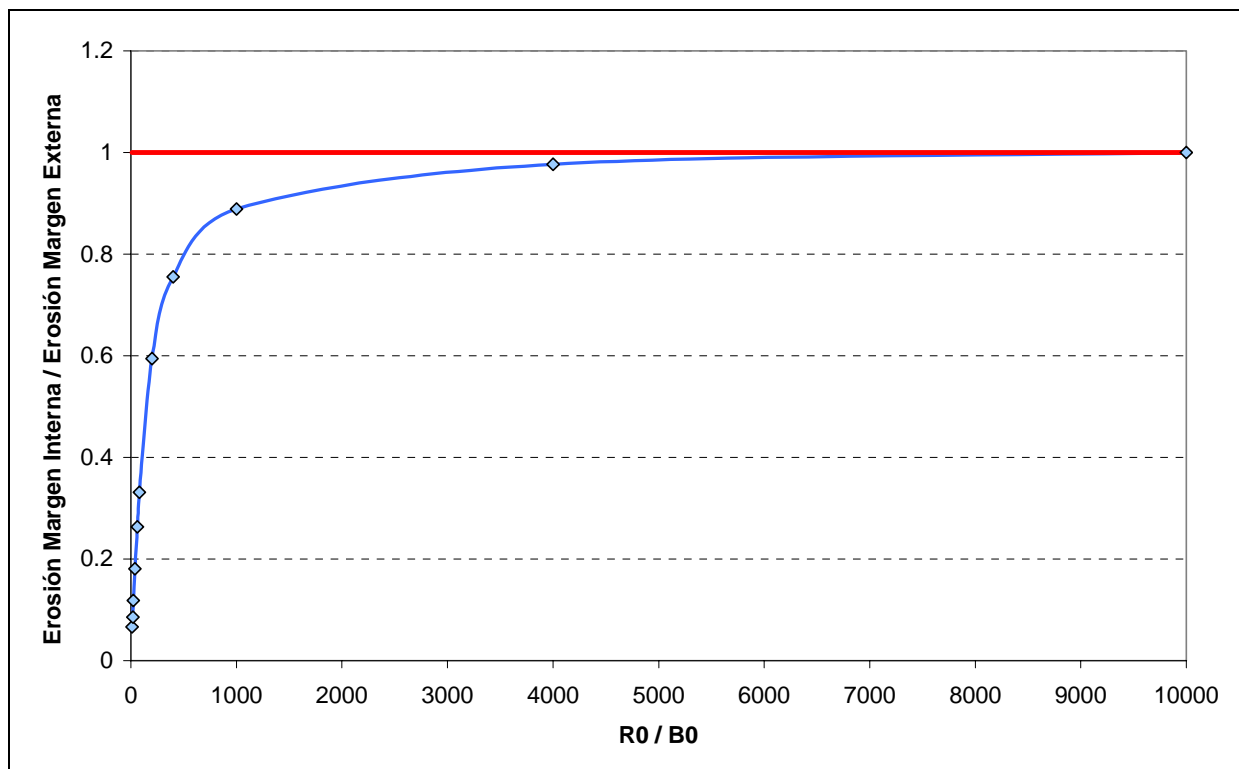


Figura 6.12 Asimetría en las erosiones de ambas márgenes en función del radio de curvatura (expresado a partir de la relación R_0/B_0).

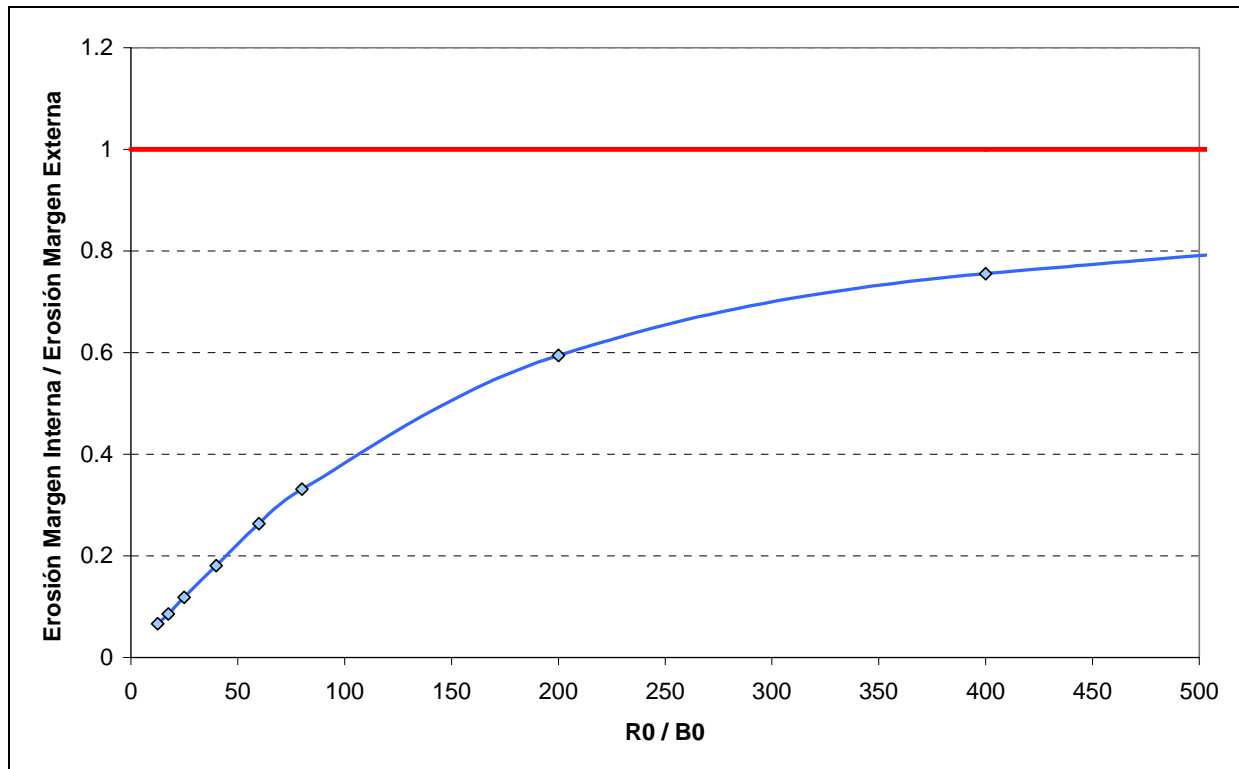
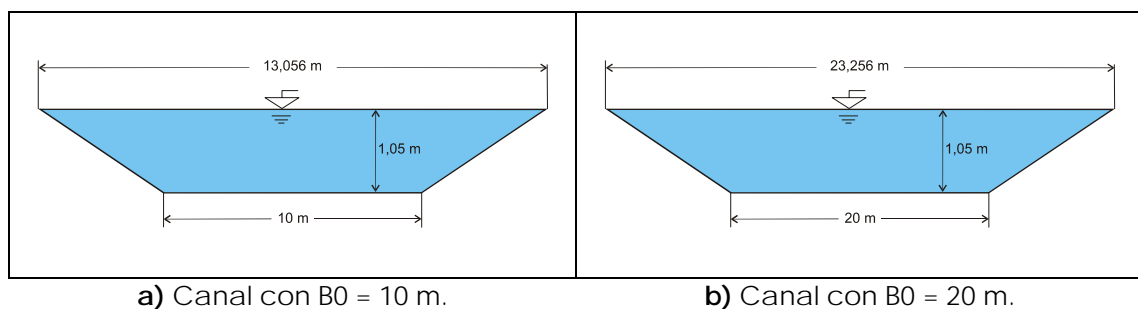


Figura 6.13 Detalle de la asimetría en la erosión de ambas márgenes para las relaciones R_0/B_0 mas pequeñas.

A fin de verificar la generalidad de los gráficos presentados en las figuras 6.12 y 6.13, se ensayaron dos nuevos canales (figura 6.14) y se estudiaron las asimetrías en las erosiones de sus márgenes para el mismo tiempo de simulación de los gráficos anteriores (24 días).

Analizando las figuras 6.15 y 6.16 se ve que la relación entre la asimetría en la erosión y R_0/B_0 para los nuevos canales ensayados, se ajusta bastante bien a la curva presentada en primer lugar.



a) Canal con $B_0 = 10$ m.

b) Canal con $B_0 = 20$ m.

Figura 6.14 Secciones de los nuevos canales ensayados.

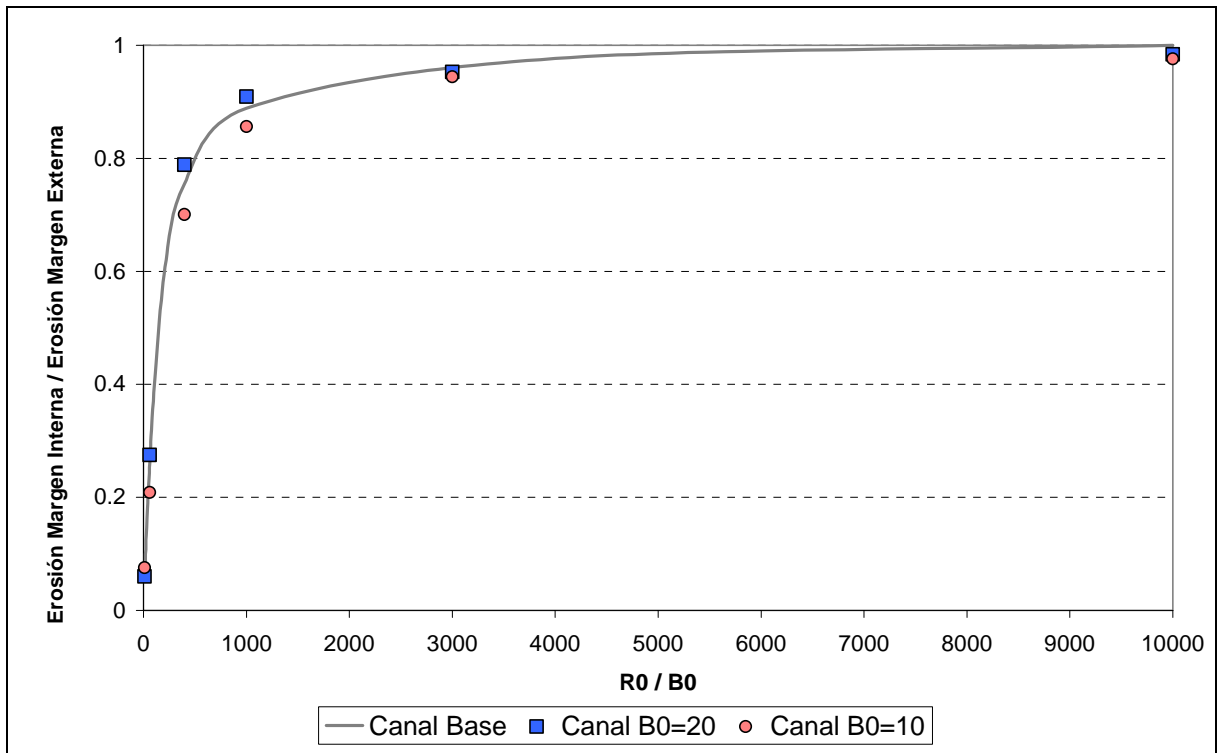


Figura 6.15 Comparación en la asimetría de las erosiones de ambas márgenes para distintos canales.

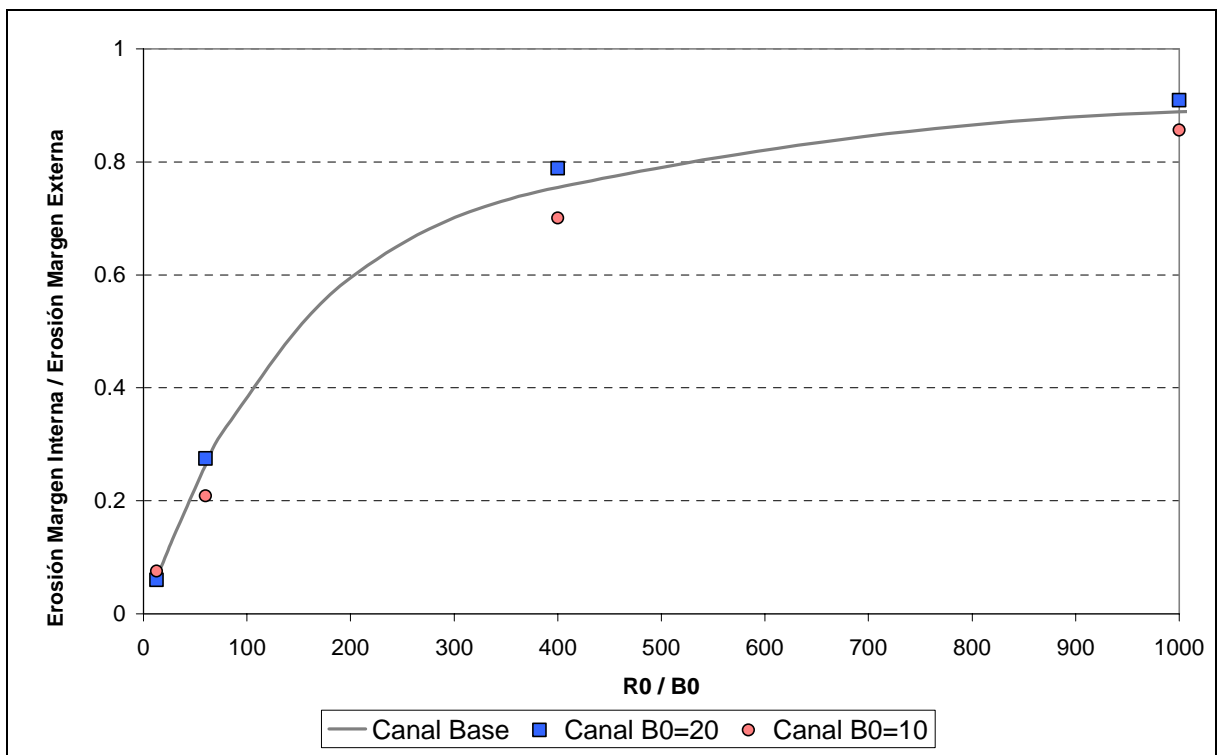


Figura 6.16 Detalle de la comparación en la asimetría de las erosiones de ambas márgenes para distintos canales.

CONCLUSIONES



*Cómo miraré yo el río,
que me parece que fluye de mí!...*

“Integridad”, Dulce María Loynaz.

7. CONCLUSIONES

A continuación, se destacan las conclusiones más importantes que se pueden sacar del análisis de este modelo y su funcionamiento. De igual modo, se especifican los pasos a seguir para seguir desarrollando al mismo, a fin de obtener un modelo lo más dúctil y general posible.



Se desarrolló un modelo de evolución de cauce y márgenes apto para canales curvos de material no cohesivo. El modelo planteado para el proceso combinado hidrodinámico-sedimentológico-morfológico ha mostrado una buena performance, a pesar de estar basado en una formulación unidimensional, lo cual indica que capta los mecanismos esenciales del fenómeno de cambio morfológico con evolución de márgenes.



El submodelo sedimentológico planteado presenta una gran ventaja con respecto a la gran mayoría de los modelos desarrollados hasta el momento. Dicha ventaja radica en que el mismo se plantea a partir de primeros principios en lugar de la utilización de fórmulas empíricas (el planteo se basa en la conservación de momento de las partículas de sedimento de fondo). Este tratamiento, facilita las posteriores generalizaciones del formalismo, en razón de que todos los elementos intervinientes tienen un significado físico bien establecido, a diferencia de las ecuaciones empíricas, que son solamente válidas para las condiciones en las que fueron testeadas y ajustadas.



Fue validado frente a experimentos de laboratorio para canales rectos con márgenes y fondo erosionables y para canales curvos de radio uniforme con márgenes rectangulares no erosionables y fondo erosionable.



Es un modelo de código abierto, lo que le da una gran flexibilidad para seguir incorporando nuevos mecanismos y permite adaptarlo con relativa facilidad a los distintos casos de aplicación.



Se realizaron experimentos numéricos para determinar las relaciones entre variables que predice el modelo, las cuales podrían motivar futuros experimentos de laboratorio para su verificación. De dichos experimentos numéricos se arribó a las siguientes conclusiones:

- ▶ Existe un tiempo de estabilización del proceso erosivo entre doce y catorce días, que resulta aproximadamente independiente del radio de curvatura.
- ▶ El modelo es válido para relaciones entre el radio de curvatura y el ancho del canal (R_0/B_0) mayores a 11 aproximadamente .
- ▶ A partir de una relación entre el radio de curvatura y el ancho del canal (R_0/B_0) de 1000 se empieza a reestablecer la simetría entre la erosión de margen izquierda y derecha, tal como se observa en el canal recto.
- ▶ El modelo desarrollado es aplicable para relaciones de largo y ancho (H_0/B_0) de entre 0.07 y 0.14.
- ▶ El modelo desarrollado es aplicable para tamaños de granos entre 0.06 mm y 64 mm (rango que incluye tanto a arenas como gravas, materiales que no tienen cohesión).



A partir de los visto, resultaría interesante realizar ensayos de laboratorio:

- ▶ Ensayos para verificar los tiempos de estabilización de los canales.

- ▶ Ensayos para verificar las asimetrías en las erosiones de las márgenes para distintos radios de curvatura.
- ▶ Ensayos que verifiquen la relación entre el pelo de agua y la magnitud de las erosiones.
- ▶ Ensayos para verificar las formas de las secciones para distintos tiempos.



El próximo paso sería incorporar la metodología para trabajar con materiales cohesivos que se esta desarrollando para canales rectos.

LISTA DE SIMBOLOS

$a \equiv (u_b / U_*)^2$: factor del cociente de velocidades

$B_g = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \omega}$: factor geométrico para la inclinación de la superficie de fondo

\bar{B} : escala para el ancho del canal

C_D : coeficiente de arrastre del grano de sedimento

d : tamaño del grano

f : factor de fricción de Darcy-Weisbach

\vec{F}_D : fuerza de arrastre

\vec{F}_C : fuerza resistiva dinámica de Coulomb

g : aceleración de la gravedad

h : profundidad local del fluido

h_b : profundidad cerca de la margen

\hat{h} : escala para la profundidad del agua

l_x : pendiente longitudinal del fluido

\hat{k} : versor en la dirección vertical

\vec{k}_t : componente negativa de \hat{k} en el plano del fondo

\vec{k}_n : componente de \hat{k} en la dirección negativa de \hat{n}

L_{ox} : escala espacial longitudinal del observador

L_{oy} : escala espacial lateral del observador

$M(y)$: función moduladora o máscara

\hat{n} : versor normal al plano de fondo

\hat{n}_p : versor en el plano de horizontal, apuntando en la dirección lateral

\hat{n}_s : versor en el plano de horizontal, apuntando en la dirección longitudinal

\hat{p} : versor en la dirección lateral, tangente a la superficie de fondo del canal

\hat{p}' : versor normal a \hat{s} y \hat{n}

$\vec{q}_b^* = \xi^* \vec{v}_p^*$: tasa vectorial adimensional del transporte del volumen de la carga de sedimento de fondo por unidad normal de ancho (adimensionalizada con el factor $d\sigma$)

q_{bx} : carga volumétrica de sedimento longitudinal por unidad de ancho

q_{by} : carga volumétrica de sedimento lateral por unidad de ancho

r : radio de curvatura

$R = (\rho_s / \rho - 1)$: densidad relativa del sedimento

\hat{s} : versor en la dirección longitudinal, tangente a la superficie de fondo del canal

$\hat{s}' = \cos \alpha_s \hat{s} + \sin \alpha_s \hat{p}'$: versor en la dirección de la velocidad del fluido en el fondo

t : coordenada temporal

\hat{t}_{v_p} : versor en la dirección del movimiento de la partícula

$\hat{t}_{v_p}^o$: versor en la dirección de la trayectoria de la partícula para condiciones críticas de iniciación del movimiento

\bar{T} : escala de tiempo del observador

$\vec{u}_b = u_b \hat{s}$: velocidad del fluido en el fondo

\vec{u}_{bc} : velocidad del fluido en el fondo para condiciones críticas de iniciación del movimiento

u_{bp} : componente de la velocidad del fluido en la dirección \hat{p}' , en el fondo

u_{bp}' : componente de la velocidad del fluido en la dirección \hat{p} , en el fondo

u_{bs} : componente longitudinal de la velocidad del fluido en el fondo

u_{tb} : componente de la velocidad del fluido en la dirección \hat{n}_p , en el fondo

$\vec{u}_\Delta, \vec{u}_\Delta'$: velocidad del fluido relativa al movimiento de las partículas en el fondo

U : velocidad longitudinal del fluido promediada en la profundidad

$U_* \equiv (\tau_b / \rho)^{1/2}$: velocidad de corte

\bar{U} : escala para la velocidad longitudinal del fluido

\bar{U} : velocidad longitudinal del fluido promediada transversalmente

\bar{U}_* : velocidad de corte promediada transversalmente

\vec{v}_p : velocidad de la particular de sedimento

W : ancho de la parte superior del canal

\vec{W}_g : peso sumergido de la partícula, tangencial al plano de fondo

y : coordenada lateral

z_0 : elevación del lecho

\tilde{z} : coordenada vertical, apuntando hacia arriba ($\tilde{z} = 0$ en el fondo)

α : ángulo entre el fondo del canal y \hat{n}_s (pendiente longitudinal del canal)

α_s : ángulo entre \vec{u}_b y \hat{s}

β : ángulo entre la vertical y \hat{n}

δ : espesor de la capa límite en la margen

ε : factor de forma para la distribución vertical de la velocidad del fluido

ε_y : viscosidad de torbellino lateral

ε_y^{\square} : escala de difusividad lateral

$\eta = \tilde{z}/h$: coordenada vertical adimensional

κ : constante de von Karman (≈ 0.4)

μ_c : factor de fricción dinámico de Coulomb λ : porosidad del sedimento del fondo

$\xi^*, \tilde{\xi}^*$: volumen adimensional de partículas participantes en el transporte de la carga de fondo

ρ : densidad del fluido

ρ_s : densidad del sedimento

$\sigma \equiv \sqrt{Rgd}$: escala de adimensionalización para la velocidad

τ_c^* : tensión de corte crítica adimensional para la iniciación del movimiento
(adimensionalizada mediante el factor ρRgd)

τ_{c0}^* : tensión de corte adimensional para la iniciación del movimiento (Shields) en un lecho horizontal (adimensionalizada mediante el factor ρRgd)

$\vec{\tau}_b = \tau_b \hat{s}$: tensión de corte en el fondo (actuando en la parte superior de la capa de carga de fondo)

$\vec{\tau}_B$: tensión de corte del fluido actuando en la parte inferior de la capa de carga de fondo)

τ_{Cs} : componente de la tensión de corte crítica para la iniciación del movimiento en la
dirección \hat{s}

τ_{bs} : componente de la tensión de corte en el fondo en la dirección \hat{s}

τ_{bp} : componente de la tensión de corte en el fondo en la dirección \hat{p}'

χ : coeficiente adimensional de la viscosidad de torbellino lateral

ψ : ángulo entre la dirección del movimiento de la partícula y \hat{s}

ω : ángulo entre el fondo del canal y \hat{n}_p

* : indicador de cantidades adimensionales

REFERENCIAS

- Ackers, P., and White, W. R.** (1973). "Sediment transport: New approach and analysis." *J. Hydraulics Div.*, ASCE, 99(11), 2041-2060
- Alonso, C. V., Borah, D. K. and Prasad, S. N.** (1981). "Numerical model for routing graded sediments in alluvial streams." Appendix J, *Rep. Prepared for the U. S. Army Corps of Engrs., Vicksburg District*, USDA Sedimentation Lab., Oxford, Miss.
- Alonso, C. V., and Combs, S. T.** (1986). "Channel width adjustment in straight alluvial streams." *Proc., 4th Fed. Interagency Sedimentation Conf.*, U.S. GPO, Washington, D.C., 5-31 – 5-40.
- Anton, H.**, (2000). *Elementary Linear Algebra*, 8th Edition. Wiley.
- Borah, D. K., and Bordoloi, P. K.** (1989). "Stream bank erosion and bed evolution model." *Sediment Transport Modeling*, S. Wang, ed. ASCE, New York, N.Y., 612-619.
- Brownlie, W. R.** (1983). "Flow depth in sand-bed channels." *J. Hydraulics Engrg.*, ASCE, 109(7), 959-990
- Carnahan, Luther and Wilkes.** "*Applied Numerical Methods*", Ed. Wiley.
- Chang, H. H.** (1988a). "Introduction to FLUVIAL-12 mathematical model for erodible channels." *Twelve selected computer stream sedimentation models developed in the United States*, S. Fan, ed., Fed. Energy Regulatory Commission, Washington, D.C.
- Chang, H. H.** (1988a). *Fluvial Processes in River Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y.
- Chien, N., Wan, Z.**, (1999), *Mechanics of Sediment Transport*, ASCE Press.
- Chow, V. T.** (1973). *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill Inc., Singapore.
- Darby, S.E., Thorne, C.R.** (1992). "Simulation of near bank aggradation and degradation for width adjustment modeling". *Hydraulic and environmental modeling: Estuarine and river waters*, R. A. Falconer, K. Shiono, and R. G. S. Matthews, eds., Ashgate, Aldershot, England, 431-442.
- Darby, S.E., Thorne, C.R.** (1996a) "Numerical simulation of widening and bed deformation of straight sand-bed rivers. I: Model development" *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 122(4), 184-193.
- Darby, S.E., Thorne, C.R.** (1996) "Numerical simulation of widening and bed deformation of straight sand-bed rivers. II: Model evaluation" *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 122(4), 194-202.
- Einstein, H. A.** (1950). "The bed-load function for sediment transportation in open channel flows." *Tech. Bull. No 1026*, U.S. Dept. of Agr., Soil Conservation Service, Washington, D.C.
- Engelund, F. and Hansen, E.** (1967). *A monograph on sediment transport in alluvial streams*. TeknsikForlag, Copenhagen, Denmark.

- Engelund, F.** (1974) "Flow and bed topography in channel bends", Jr. Hydr. Div., ASCE, vol. 100, No. HY11, November, 1631-1648.
- Fread, D. L.** (1971). "Discussion on 'Implicit flood routing in natural channels' by M. Amey and C. S. Fang." J. Hydr. Div., ASCE, 97(7), 1156-1159.
- Fread, D. L.** (1974). "Numerical properties of implicit four-point finite difference equations of unsteady flow" *Tech. Memo. NWS Hydro-18*, National Weather Service, NOAA, Washington, D.C.
- Gerald, C. F. and Wheatley, P. O.** Applied Numerical Analysis. Chapter 10, Third Edition, Addison Wesley, 1984
- Ghamry, H.K., Steffler, P.M.** (2002) "Effect of Applying Different Distribution Shapes for Velocities and Pressure on Simulation of Curved Open Channels" Jr. Hydr. Engrg., ASCE, vol. 128, No. 11, November, 969-982.
- Graf, W. H.** (1971). Hydraulics of sediment transport. McGraw-Hill Inc., New York, N.Y.
- Hasegawa, K., Mochizuki, A.** (1989), "Formation process of an equilibrium cross section in a straight channel of sand-silt river". Fourth International Symposium on River Sedimentation, June 5-9, Beijing, China.
- Ikeda, S.** (1981), "Self-formed straight channels in sandy beds", J. Hydr. Div. ASCE 107 (4), 389-406.
- Ikeda, S., Izumi, N.** (1996), "Stable Channel Cross Sections of Straight Sand Rivers", Water Resources Research, Vol. 27, No. 9, pp. 2429-2438.
- Jain, S. C.**, (2001). Open-Channel Flow. John Wiley and Sons, New York.
- Kalkwijk, J.P., Booij, R.**, (1986), "Adaptation of secondary flow in nearly-horizontal flow", J. of Hydr. Research Vol. 24, No 1.
- Kikkawa, H., Ikeda, S., and Kitagawa, A.**, (1976), "Flow and Bed Topography in Curved Open Channels", Journal of the Hydraulics Division, Vol. 102, No. HY9, September, 1327-1343.
- Keulegan, G. H.** (1938). "Laws of turbulent flow in open channels." *J. Res. of the Nat. Bureau of Standards*, 21, 707-741
- Kovacs, A., Parker, G.** (1994) "A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels", J. Fluid Mech., 267, 153-183.
- Laciana, C.E., Menéndez, A.N.** (2002), "Modelación de la evolución de márgenes de material suelto", XX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, La Habana, Cuba, 1-5 octubre.
- Li, L., and Wang, S. S. Y.** (1993). "Numerical modeling of alluvial stream bank erosion." *Advances in hydro-science and engineering*, S. S. Y. Wang, ed., University of Mississippi, Oxford, Miss., Vol. 1, 2085-2090.
- Li, L., and Wang, S. S. Y.** (1994). "Computational simulation of channel bank erosion and retreat." *Tech. Rep.*, CCHE, Univ. of Mississippi, Oxford, Miss.
- Menéndez, A.N.**, (2003), "Selection of optimal mathematical models for fluvial problems", Third IAHR Symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics, Barcelona, Spain, September, 2003.

- Meyer-Peter, E., and Muller, R.** (1948). "Formulas for bed load transport" *Proc., 2nd Congr. Of the Int. Assn. for Hydr. Res.*, 39-64.
- Molinas, A., and Yang, C. T.** (1986). *Computer program user's manual for GSTARS (generalized stream tube model for alluvial river simulation)*, U.S. Dept. Interior, Bureau of Reclamation, Engrg. And Res. Ctr., Denver, Colo.
- Mosselman, E.** (1992). "Mathematical Modeling of Morphological Processes in Rivers with erodible cohesive banks" PhD thesis, Delft Univ. of Technol., Delft, The Netherlands.
- Osman, A. M.** (1985). "Channel Width Response to Changes in Flow Hydraulics and Sediment Load" PhD thesis, Colorado State Univ., Fort Collins, Colo.
- Parker, G.** (1978) "Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river", *J.Fluid Mech.*, vol. 89, part 1, 109-125.
- Parker, G.** (1978) "Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 2. The gravel river", *J.Fluid Mech.*, vol. 89, part 1, 127-146.
- Parker, G.** (1979) "Hydraulic geometry of active gravel rivers" *J. Hydr. Div., ASCE*, 105, 1185-1201
- Parker, G., Sawai, K., Ikeda, S.** (1982), "Bend theory of river meanders. Part 2. Nonlinear deformation of finite-amplitude bends", *J. Fluid Mech.*, Vol. 115, 303-314.
- Parker, G.**, (1983), Discussion to "Lateral Bed Load Transport on Side Slopes", S. Ikeda, Jr. *Hydr. Div., ASCE*, vol. 110, No. HY2, February, 197-199.
- Parker, G., and Kovacs, A.** (1993). "MYNORCA: A Pascal program for implementing the Kovacs-Parker vectorial bedload transport relation on arbitrarily sloping beds" *Tech. Memo*, No. M-233, St. Anthony Falls Hydr. Lab., Minneapolis, Minn.
- Pizzuto, J. E.**, (1990). " Numerical simulation of gravel river widening" *Water Resour. Res.*, 26, 1971-1980.
- Pujol, A., Menéndez, A.N.**, (1987), Análisis unidimensional de escurrimiento en canales, Eudeba.
- Raudkivi, A. J.**, (1990). *Loose Boundary Hydraulics*, 3rd Edition. Pergamon Press, New York.
- Simon, A., Wolfe, W. J., and Molinas, A.** (1991). "Mass wasting algorithms in an alluvial channel model" *Proc., 5th Fed Interagency Sedimentation Conf.*, U.S. GPO, Washington, D.C., 8-22 – 8-29
- Strickler, A.** (1923). "Beitrage zur frage der geschwindigkeitsformel und der rauhigkeitszalhen fur strome, kanale und geschlossene leitungen" *Mitteilungen des eidgenossicher amtes fur wasserwirtschaft*, Bern. Switzerland, 16g (in German).
- Tritton, D.J.**, (1998), *Physical Fluid Dynamics*, Oxford Science Publications.
- Wang, S. S. Y., and Hu K. K.** (1990). "Improved methodology for formulating finite element hydrodynamic models" *Finite Elements in Fluids*, 8.
- Wark, J.B., Samuels, P.G., Ervine, D.A.** (1990) "A practical method of estimating velocity and discharge in a compound channel", *River flood hydraulics*, W.R. White, ed., John Wiley & Sons, Inc., Chichester, UK, 163-172.

Wiele, S. M. (1992) "A computational investigation of bank erosion and midchannel bar formation in gravel-bed rivers, PhD thesis, Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn.

Wiele, S. M., and Paola, C. (1989). "Calculation of bed stress and bank erosion in a straight channel." *Eos: Trans. A. Geophys. Union*, 70, 329.

Yang, C. T. (1973). "Incipient motion and sediment transport" *J. Hydr. Div., ASCE*, 99(10), 1679-1704.

Yang, C. T. (1984). "Unit stream power equation for gravel" *J. Hydr. Engrg., ASCE*, 110, 1783-1797.

Yang, C. T., Molinas, A., and Song, C. S. (1988). "GSTARs-Generalized stream tube model for alluvial river simulation" *Twelve selected computer stream sedimentation models developed in the United States*, S. Fan, ed., Fed. Energy Regulatory Commission, Washington, D.C.

APÉNDICES



*Fui al río, y lo sentía
cerca de mí, enfrente de mí.
La corriente decía cosas que no entendía.
Me angustiaba casi.
Quería comprenderlo,*

“Fui al río...”, Juan L. Ortiz.

APENDICE I

Obtención de las ecuaciones [24] y [25]

En general, los versores \hat{s} y \hat{p} no son perpendiculares entre sí (ver Figura A1.1). Por lo tanto, es necesario construir una nueva base ortonormal en el plano Π_{sp} .

En primer lugar, los versores \hat{s} y \hat{p} son expresados en términos de sus componentes en xyz:

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\text{sen } \alpha \end{pmatrix} \quad [A1.1]$$

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega \\ -\text{sen } \omega \end{pmatrix} \quad [A1.2]$$

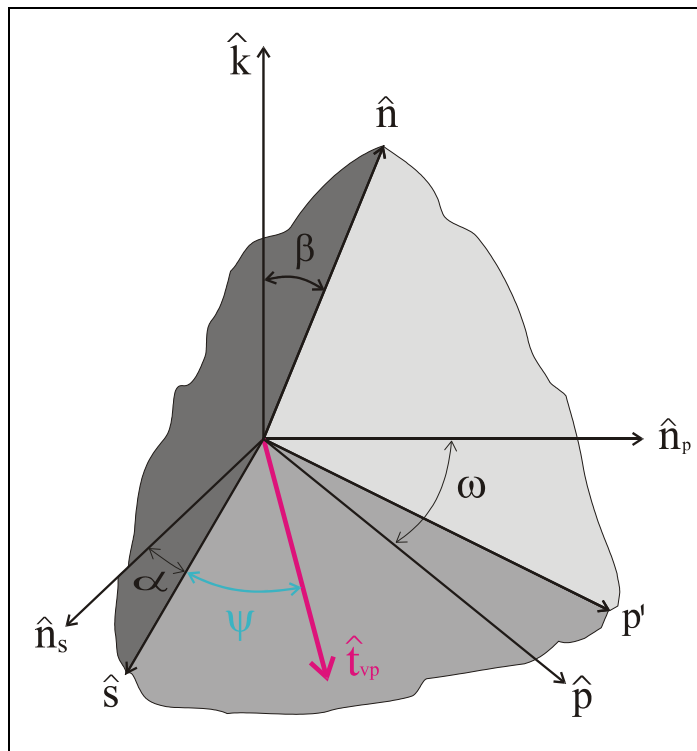


Figura A1.1 Esquema vectorial para la transformación de Gram-Schmidt

Si el primer vector de la nueva base es, el segundo vector de la nueva base es calculado a través del procedimiento de Gram-Schmidt (Anton 2000):

$$\vec{u} = \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \hat{s}}{|\hat{s}|} \hat{s} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \omega \text{ sen } \alpha \cos \alpha \\ \cos \omega \\ -\text{sen } \omega \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad [\text{A1.3}]$$

cuya norma es

$$\|\vec{u}\|^2 = \text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega \quad [\text{A1.4}]$$

Luego, el versor \hat{p}' es

$$\hat{p}' \equiv \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \left(-\text{sen } \omega \text{ sen } \alpha \cos \alpha \hat{n}_s + \cos \omega \hat{n}_p - \text{sen } \omega \cos^2 \alpha \hat{k} \right) \quad [\text{A1.5}]$$

él cual coincide con la ecuación [24].

El versor \hat{k} puede ser expresado, en la nueva base ortonormal $(\hat{s}, \hat{p}', \hat{n})$, como

$$\hat{k} = (\hat{k} \cdot \hat{s}) \hat{s} + (\hat{k} \cdot \hat{n}) \hat{n} + (\hat{k} \cdot \hat{p}') \hat{p}' \quad [\text{A1.6}]$$

Teniendo en cuenta que

$$\hat{k} \cdot \hat{s} = -\text{sen } \alpha \quad [\text{A1.7}]$$

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \beta \quad [\text{A1.8}]$$

$$\hat{k} \cdot \hat{p}' = \frac{-\text{sen } \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \quad [\text{A1.9}]$$

la ecuación [A1.6] se transforma en

$$\hat{k} = -\text{sen } \alpha \hat{s} + \cos \beta \hat{n} - \frac{\text{sen } \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \hat{p}' \quad [\text{A1.10}]$$

Reemplazando la ecuación [A1.10] en la [23], se obtiene

$$\bar{k}_i = \operatorname{sen} \alpha \hat{s} + \frac{\operatorname{sen} \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \hat{p}' \quad [\text{A1.11}]$$

la cual coincide con la ecuación [25].

Referencias

Anton, H., 2000. Elementary Linear Algebra, 8th Edition. Wiley.

APENDICE II

Método de Diferencias Finitas

Este método se utiliza para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales mediante un proceso de discretización. Dentro de los diferentes métodos de discretización posible (elementos finitos, volúmenes finitos, etc.), este es uno de los más simples.

All.1 Problemas de valor de frontera

Se considera el problema de encontrar la función que satisface la ecuación diferencial:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{d\phi}{dx}\right) + c\phi - q = 0, \quad \text{para } 0 < x < L \quad [\text{All.1}]$$

sujeta a las condiciones de borde siguientes

$$\phi(0) = u_0, \quad \left(a\frac{d\phi}{dx}\right)\Big|_{x=L} = Q_0 \quad [\text{All.2}]$$

donde $a = a(x)$, $c = c(x)$, $q = q(x)$ y Q_0 son datos del problema. La ecuación [All.1] es utilizada para la descripción analítica de variados procesos físicos, como por ejemplo, problemas de conducción de calor a través de una pared plana, flujo en canales y tuberías, deformación axial de barras.

All.2 Diferencias Finitas

Se quiere resolver el problema presentado anteriormente, es decir, determinar la función $\phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial [All.1] en el dominio $0 \leq x \leq L_x$ junto a las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L_x$. Para resolver este problema por el método de diferencias finitas, se comienza por diferenciar la variable independiente

x , esto implica construir una grilla o malla de $L+1$ puntos discretos igualmente espaciados x_l ($l=0,1,2,\dots,L$) sobre el rango $0 \leq x \leq L_x$, con $x_0=0$, $x_L=L_x$ y $x_{l+1} - x_l = \Delta x$.

El paso siguiente consiste en reemplazar aquellos términos de la ecuación diferencial que involucren diferenciación por términos que contengan operaciones algebraicas. Este proceso trae implícito una aproximación y puede efectuarse mediante la utilización de aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas de una función. Este procedimiento se presenta a continuación.

All.3 Aproximación de derivadas mediante diferencias finitas

Mediante el teorema de Taylor podemos escribir, exactamente,

$$\phi(x_{l+1}) = \phi(x_l + \Delta x) = \phi(x_l) + \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_l} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_{x=x_l + \theta_l \Delta x} \quad [\text{All.3}]$$

Donde θ_l es algún número en el rango $0 \leq \theta_l \leq 1$. Mediante el subíndice l notamos una evaluación en el punto x_l , pudiendo escribir

$$\phi_{l+1} = \phi_l + \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_{l+\theta_l} \quad [\text{All.4}]$$

Por lo tanto

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l = \frac{\phi_{l+1} - \phi_l}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_{l+\theta_l} \quad [\text{All.5}]$$

Esto conduce a la denominada aproximación en diferencias hacia delante o *forward difference* de la primera derivada de una función, donde

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l \approx \frac{\phi_{l+1} - \phi_l}{\Delta x} \quad [\text{All.6}]$$

El error E en esta aproximación está dado por

$$E = -\frac{\Delta x}{2} \left. \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right|_{l+\theta_1} \quad [\text{AII.7}]$$

Dado que E es igual a una constante multiplicada por Δx , se dice que el error es $O(\Delta x)$. Esto se conoce como orden del error.

De manera similar, se utiliza el teorema de Taylor para obtener

$$\phi_{l-1} = \phi_l - \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right|_{l+\theta_2} \quad [\text{AII.8}]$$

donde $0 \leq \theta_2 \leq 1$. Se puede reescribir la ecuación [AII.8] de la siguiente forma

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l = \frac{\phi_l - \phi_{l-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right|_{l+\theta_2} \quad [\text{AII.9}]$$

Esto conduce a la denominada aproximación en diferencias hacia atrás o *backward difference* de la primera derivada de una función, donde

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l \approx \frac{\phi_l - \phi_{l-1}}{\Delta x} \quad [\text{AII.10}]$$

Tanto en las aproximaciones por diferencia hacia delante o atrás, el error es del mismo orden, o sea, $O(\Delta x)$. Ahora, si se reemplaza a las ecuaciones [AII.4] y [AII.8] por las siguientes ecuaciones expandidas

$$\phi_{l+1} = \phi_l + \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right|_l + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{d^3 \phi}{dx^3} \right|_{l+\theta_3} \quad [\text{AII.11}]$$

$$\phi_{l+1} = \phi_l - \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right|_l - \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{d^3 \phi}{dx^3} \right|_{l+\theta_4} \quad [\text{AII.12}]$$

y si restamos las ecuaciones [All.11] y [All.12] se puede obtener una representación mas precisa de la primera derivada. La ecuación resultante

$$\phi_{l+1} - \phi_{l-1} = 2\Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\left. \frac{d^3\phi}{dx^3} \right|_{l+\theta_3} + \left. \frac{d^3\phi}{dx^3} \right|_{l-\theta_4} \right) \quad [\text{All.13}]$$

puede utilizarse para derivar la aproximación de diferencia central o *central difference*

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_l \approx \frac{\phi_{l+1} - \phi_{l-1}}{2\Delta x} \quad [\text{All.14}]$$

El error obtenido es $O(\Delta x^2)$, por lo tanto puede verse que se ha obtenido una mejor aproximación que la lograda con las diferencias hacia delante o hacia atrás.

Se demuestra que la aproximación a la segunda derivada está dada por

$$\left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_l \approx \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1}}{\Delta x^2} \quad [\text{All.15}]$$

donde el error de la aproximación es $O(\Delta x^2)$.

All.4 Solución de una ecuación diferencial por el método de diferencias finitas

Se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$k \frac{d^2\phi}{dx^2} = -Q(x) \quad [\text{All.16}]$$

Cuyas condiciones de borde son

$$\phi(0) = \bar{\phi}_0, \quad \phi(L_x) = \bar{\phi}_{L_x} \quad [\text{All.17}]$$

Si se evalúa la ecuación en un punto de la grilla x_l , se obtiene, exactamente

$$k \left. \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right|_l = -Q_l \quad [\text{All.18}]$$

y mediante la aproximación dada por la ecuación [All.15] para la segunda derivada, se obtiene

$$k \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1}}{\Delta x^2} = -Q_l \quad [\text{All.19}]$$

Esta ecuación se traslada para cada punto interior x_l ($l=1,2,\dots,L-1$) de la malla de diferencias finitas. Escribiendo las ecuaciones para cada punto de la malla

$$\begin{aligned} -\phi_2 + 2\phi_1 &= \frac{\Delta x^2 Q_1}{k} + \bar{\phi}_0 \\ -\phi_3 + 2\phi_2 - \phi_1 &= \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \\ -\phi_4 + 2\phi_3 - \phi_2 &= \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \\ &\vdots \\ -\phi_{L-1} + 2\phi_{L-2} - \phi_{L-3} &= \frac{\Delta x^2 Q_{L-2}}{k} \\ 2\phi_{L-1} - \phi_{L-2} &= \frac{\Delta x^2 Q_{L-1}}{k} + \bar{\phi}_{L_x} \end{aligned} \quad [\text{All.20}]$$

Si ϕ es un vector columna cuya transpuesta es $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{L-2}, \phi_{L-1})$, el conjunto de ecuaciones [All.20] puede escribirse en forma matricial como

$$K\phi = f \quad [\text{All.21}]$$

donde

$$\kappa = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

[AII.22]

$$f = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x^2 Q_1}{k} + \bar{\phi}_0 \\ \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x^2 Q_{L-1}}{k} + \bar{\phi}_{L_x} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el problema original de determinar una función continua incógnita $\phi(x)$ ha sido reemplazado por el problema de resolver una ecuación matricial para el conjunto discreto de valores $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{L-2}, \phi_{L-1}$.

El método de diferencias finitas da por lo tanto información acerca de los valores de la función en los puntos de la malla, pero no da información acerca de los valores de la función entre estos puntos. Es decir, se aproxima la ecuación sobre un número discreto de puntos y no a través de la región.

La solución de la ecuación [AII.21] puede calcularse en forma eficiente teniendo en cuenta que la matriz κ es simétrica y tridiagonal. El hecho de que el error en la aproximación es de $O(\Delta x^2)$, indica que la reducción del espaciamiento de la malla reduciría el error y produciría soluciones más precisas.

Referencias

Tassi, P.A. y Engelberger, C.R. "Introducción a las Diferencias Finitas"

APENDICE III

Método de Newton-Raphson

Este método, el cual es un método iterativo, es uno de los más usados y efectivos para encontrar raíces. A diferencia de otros métodos, el método de Newton-Raphson se basa en un proceso iterativo.

Supóngase que se tiene la aproximación x_i a la raíz x_r de $f(x)$ (ver figura AIII.1), se traza la recta tangente a la curva en el punto $(x_i, f(x_i))$; ésta cruza al eje x en un punto x_{i+1} que será la siguiente aproximación a la raíz x_r .

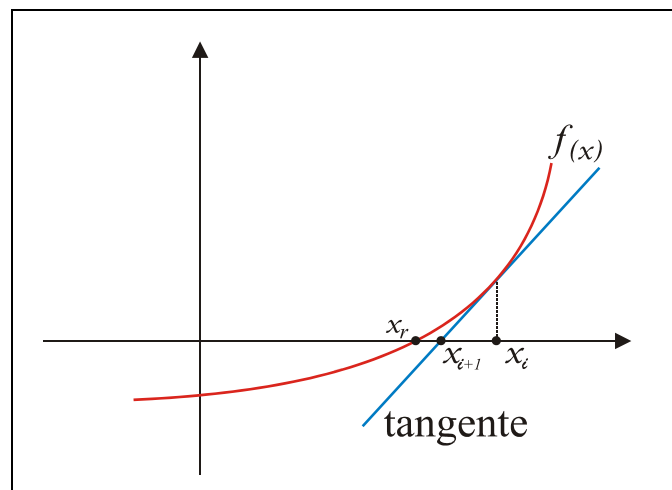


Figura AIII.1 Aproximación a una raíz a partir del método de Newton-Raphson

Para calcular el punto x_{i+1} , se calcula primero la ecuación de la recta tangente. Se sabe que tiene pendiente

$$m = f'(x_i) \quad [\text{AIII.1}]$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i) \quad [\text{AIII.2}]$$

Haciendos $y = 0$:

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i) \quad [\text{AIII.3}]$$

y despejando x , se obtiene

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad [\text{AIII.4}]$$

que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la siguiente aproximación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{Si} \quad f'(x_i) \neq 0 \quad [\text{AIII.5}]$$

Es de notar que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos que aseguren que encontrar la raíz buscada, y de hecho no se tiene ninguna garantía de que la solución obtenida se aproxime a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde si converge a la raíz lo hace con una gran rapidez.

También se observa que en el caso de que $f'(x_i) = 0$, el método no se puede aplicar. De hecho, se ve geoméricamente que esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje x en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso x_i mismo es una raíz de $f(x)$

APENDICE IV

Canalización del Río Reconquista

AIV.1 La Cuenca del río Reconquista

El río Reconquista tiene su nacimiento en la confluencia de los Arroyos La Choza y Durazno en el partido de General Rodríguez. Poco después se suma a éstos el arroyo La Horqueta, último tributario aguas arriba de la presa Ingeniero Roggero, la obra hidráulica de mayor significación, reguladora del cauce principal, y puesta en funcionamiento a comienzo de los años setenta. Ya en tránsito hacia el este, constituye el límite natural entre el partido de Merlo y Moreno, distrito de donde recibe el aporte del arroyo Las Catonas por su margen izquierda.

Desde aquí, el curso cambia su dirección hacia el noreste y en las inmediaciones de Campo de Mayo recibe la afluencia del arroyo Morón por la margen derecha, punto desde donde se dirige definitivamente hacia el norte. Al internarse en las terrazas bajas del valle del río Luján, al que afluye luego de recorrer 50 Km, su cauce se bifurca en dos cursos naturales, el río Tigre y el llamado Reconquista Chico y a través de ellos y un tercer canal artificial, denominado canal Aliviador (conocido como Cancha Nacional de Remo) une sus aguas a las del río Luján que, a su vez, desemboca tras pocos kilómetros en el río de la Plata.

La cuenca del río Reconquista tiene una superficie de 167.000 hectáreas.

En la llanura alta de la cuenca, 72.000 hectáreas son utilizadas para actividades agropecuarias. En la llanura media y en la baja, 95.000 hectáreas están urbanizadas, con alta densidad de población y asentos de población consolidados aún en zonas inundables. Se mantienen, sin embargo, importantes espacios abiertos, constituidos principalmente por las áreas del CEAMSE y Campo de Mayo.

El total de población de la cuenca, según datos del censo de 1991, es de 3.400.000 habitantes, lo que representa el 10,4% de la población total del país (32,6 millones de habitantes) y un 31,5% de la población de la Capital Federal y su región metropolitana (10,8 millones de habitantes), de los cuales 2.600.000 se benefician directamente con este proyecto.

AIV.1.1 Inundaciones en la Cuenca

La Dirección Provincial de Hidráulica regularizó los caudales de la cuenca superior del río Reconquista a través de presas de embalse de las aguas de los arroyos La Choza y Durazno, y posteriormente, aguas abajo de la confluencia de ambos, la presa Ing. Roggero, ya en el curso principal del río Reconquista, que forma el límite superior del proyecto. Con los volúmenes de embalse creados, se ha alcanzado una regulación de las crecidas de la cuenca superior para un período de recurrencia de 100 años, con un efluente del orden de 100 m³/s.

En épocas de crecientes, el caudal regulado de 100 m³/s se incrementa en los tramos medio e inferior, a través de los aportes de los arroyos de las subcuencas. Los análisis de recurrencia de 10, 25 y 50 años indican que en la sección de la estructura de partición de las aguas entre los cursos naturales y el canal Aliviador, los caudales del río serían del orden de 616, 728 y 907 m³/s respectivamente.

En los últimos años se han ejecutado considerables obras de movimiento de suelos, en una tarea conjunta entre el Gobierno de la Provincia de Buenos Aires y los municipios, con el propósito de limpiar el cauce del río y sus afluentes principales, y con ello mejorar el escurrimiento de las aguas de lluvia de baja recurrencia, solución paliativa aunque poco efectiva, para resolver una grave situación ambiental.

Las precipitaciones intensas originan el desborde del río, con vastas inundaciones en la cuenca baja y media, y graves efectos negativos en áreas muy urbanizadas. Dado el muy significativo deterioro de la calidad de las aguas del río, las crecientes no sólo originan pérdidas físicas, sino que constituyen una grave amenaza para la salubridad de la población, al inundar sus aguas contaminadas, una amplia zona urbanizada. Ha sido posible verificar que: (I) las aguas con elevado grado de contaminación permanecen estancadas en áreas urbanas, luego de las crecientes; (II) las conexiones clandestinas de desechos domésticos e industriales, cuya práctica es normal en la cuenca, son afectadas por los desbordamientos; (III) se contaminan los suelos y los recursos hídricos subterráneos.

Las sobre elevaciones de nivel del río de la Plata que se propagan a sus afluentes, como el Luján, Tigre y Reconquista; obedecen a dos causas de distinto origen, una de ellas es la marea astronómica y la otra, denominada marea meteorológica, se produce por los vientos del cuadrante sudeste.

Las variaciones de nivel del estuario, debidas al fenómeno de los vientos borrascosos, tienen su máximo efecto cuando provienen de la dirección S.S.E. Por efecto de estas sudestadas se embalsan las aguas sobre la costa argentina.

Las crecidas debidas a las lluvias intensas por un lado, y las sudestadas por el otro, no son simultáneas en general, lo que permite considerar a los dos fenómenos como independientes.

Sin embargo, la simultaneidad de intensas precipitaciones con pequeñas sobreelevaciones del nivel de la aguas del río de la Plata, agudiza los efectos del fenómeno, porque en dicho caso se intensifica el desborde del cauce del río Reconquista.

Las inundaciones históricamente más importantes han sido las de los años 1959, 1967, 1982 y 1985, medidas en relación con los perjuicios ocasionados.

La crecida del año 1959 afectó un área de 180 Km² y a 150.000 habitantes. La del año 1985, alcanzó 119 Km², pero incluyó a 300.000 personas, de las cuales un 25% debió ser evacuada.

La inundación de 1985 afecto a 12.000 hectáreas, 305.000 habitantes más 71.000 evacuados.

Las áreas de inundación son mínimas en las cercanías de la presa Ing. Roggero y aumentan en la medida que el cauce se acerca a su desembocadura, lo cual coincide con el incremento de la densidad de población. Por ello, los partidos que presentan un mayor porcentaje de superficie inundada son San Fernando y Tigre, con un 54 % y 26 % respectivamente.

AIV.1.2 Municipios participantes

La cuenca del río Reconquista ocupa, en términos de área, los siguientes partidos: Tigre, San Fernando, San Isidro, Gral. San Martín, San Miguel, Malvinas Argentinas, José C. Paz, Tres de Febrero, Hurlingham, Ituzaingó, Morón, Moreno, Merlo, Vicente López, General Rodríguez, Luján, Marcos Paz, y General Las Heras. Del total de dieciocho (18) partidos, los primeros trece (13), están situados en el área de influencia directa del proyecto (figura AIV.1).

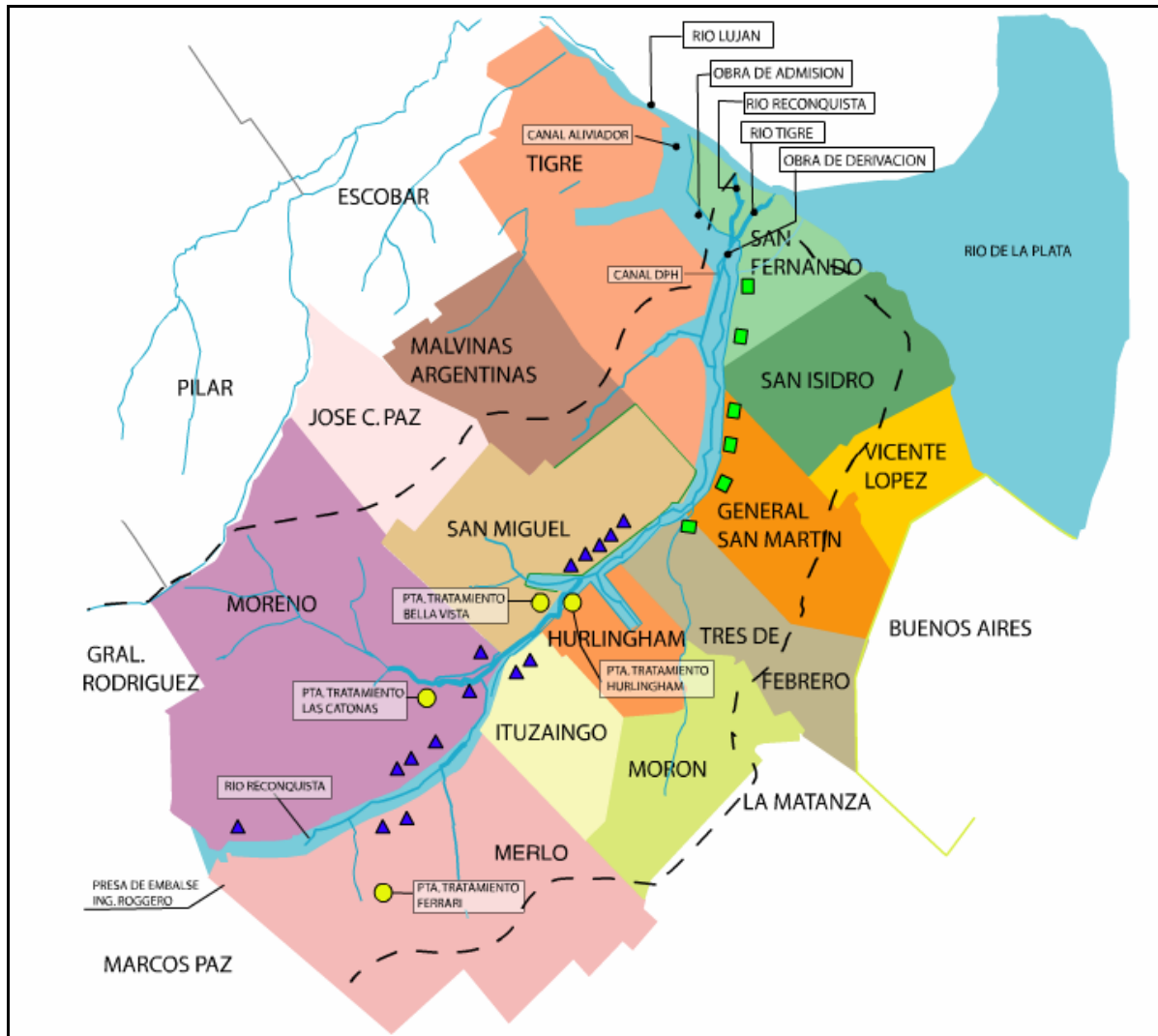


Figura AIV.1 Municipios que integran la cuenca del Río Reconquista

AIV.2 Obras para el control de las inundaciones por lluvias y sudestadas

Las obras para el control de las inundaciones consistieron fundamentalmente en ampliar la capacidad del cauce del Río para permitir un mejor escurrimiento de las aguas hacia su desembocadura en el Río Luján.

Para lograr este objetivo se realizaron las siguientes obras:

- Adecuación del Canal Aliviador.
- Canalización del Río Reconquista.

- Canalización Tramo Inferior de Arroyos.
- Obra y Equipos de Derivación del Río Reconquista.
- Puentes.
- Estaciones de Bombeo.
- Reutilización de Áreas Recuperadas.
- Obras Complementarias.

AIV.2.1 Adecuación del canal Aliviador

El objetivo fue permitir el drenaje de las aguas provenientes de crecidas de origen pluvial de las cuencas superior y media, sin causar inundaciones en las zonas aledañas. Protegiéndolas, además, de la entrada de aguas provenientes del Río de la Plata, en caso de sudestada (marea meteorológica).

Consistió en darle al canal Aliviador mayor capacidad de transporte de caudal pudiendo conducir 914 m³/s.

Las obras que se ejecutaron son las siguientes:

- Extracción y disposición controlada de lodos en el tramo medio del río Reconquista. (Panamericana Km. 12 –Desembocadura arroyo Morón Km. 19).
- Extracción y disposición controlada de lodos en el canal Aliviador; y Adecuación de la Sección Hidráulica del Canal Aliviador.
- Construcción de Obras Complementarias para ingreso de excedentes locales.
- Prolongación del Puente Liniers y Tablestacado Metálico.
- Protección del Puente sobre Ruta 27 con elementos premoldeados de hormigón y geotextil.

AIV.2.2 Canalización del río Reconquista

La canalización del río se realizó desde su encuentro con la ruta Panamericana hasta la Presa Roggero. Se materializa una sección trapezoidal con base de fondo

variable de acuerdo a las necesidades de capacidad que se van incrementando a medida que se incorporan los aportes laterales.

Tenemos así que desde la Presa hasta el Arroyo Laferrere esa base de fondo es de 15 m. Desde allí el Arroyo Las Catonas se incrementa a 30 m., y desde ese punto hasta la ruta Panamericana esa dimensión es de 50 m.

Desde Panamericana hasta Acceso Oeste, se realizó la rectificación de algunos de los meandros que conforman el río, desde allí hasta la Presa Roggero, la canalización acompaña el curso.

En los tres primeros kilómetros contados desde Panamericana hacia arriba, se construyeron terraplenes laterales de defensa.

Se describen a continuación las obras:

- Canalización embocadura (bajo los puentes de la ruta Panamericana).
- Canalización del Tramo Medio (19,90 Km.), desde ruta Panamericana hasta Acceso Oeste.
- Canalización del Tramo Superior (16,94 Km.), desde Acceso Oeste hasta la Presa Roggero.
- Terraplén del Arroyo Las Tunas (adecuación de su tramo final).
- Terraplenes del Canal D.P.H..
- Relleno de la Planta de Tratamiento de Hurlingham.
- Revestimiento del Canal en el Parque Santa María.

AIV.2.3 Canalización Tramo Inferior de Arroyos

Estas obras consistieron en canalizar, rectificar y profundizar el tramo inferior de los cursos de los arroyos Basualdo, Soto y Los Berros, entre otros, a los efectos de dotarlos de la capacidad suficiente como para que puedan conducir hasta el río Reconquista los caudales que se han visto incrementados, como consecuencia de las obras de desagüe, en el tramo superior de esos cursos.

En el caso del arroyo Basualdo, las tareas consistieron en conformar una sección trapecial revestida de hormigón, para que pueda lograrse el escurrimiento necesario en el reducido espacio disponible.

Se realizaron obras de drenaje superficial para devolverle, a numerosas canalizaciones de cursos naturales, su sección de diseño deteriorada por erosión, crecimiento de vegetación o cegamientos por depósitos de basura.

Las obras consistieron en:

- Obras de Drenaje Superficial.
- Canalización del Arroyo Basualdo.
- Canalización Arroyo Los Berros.
- Canalización del Zanjón Fate.
- Alcantarilla de Ruta 202.
- Canalización Arroyo Soto.
- Obra de Admisión Panamericana.
- Cierre de Alcantarillas en Camino del Buen Ayre.
- Protección en el paso de la calle Debenedetti, bajo el Camino del Buen Aire