

# Laboratorio de Hidráulica Aplicada

Cálculo de la refracción de olas  
mediante el método de rayos  
LHA-S4-038-93



INSTITUTO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNICA HIDRICAS

**CALCULO DE LA REFRACCIÓN DE OLAS  
MEDIANTE EL METODO DE RAYOS**

LHA-S4-038-93

Ezeiza, septiembre de 1993

CALCULO DE LA REFRACCIÓN DE OLAS  
MEDIANTE EL METODO DE RAYOS  
LHA-S4-038-93

**Resúmen:** Se presenta un modelo matemático de refracción de olas por el método de rayos.

**Descriptores:** refracción de olas - modelos matemáticos.

**INFORME PRODUCIDO POR**

Ing. R.D. CASTELLANO

**EQUIPO DE TRABAJO**

Ing. R.D. CASTELLANO

Técnico Sr. C.A. HASPERT

**Asesoramiento**

Dr. A.N. MENENDEZ

# INDICE DE MATERIAS

INTRODUCCION . . . . .	1
1. Ecuaciones básicas . . . . .	1
2. Solución numérica . . . . .	4
3. Verificación de resultados . . . . .	6
4. Aplicación . . . . .	7
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS . . . . .	8

**CALCULO DE LA REFRACCIÓN DE OLAS  
MEDIANTE EL METODO DE RAYOS  
LHA-S4-03-93**

**INTRODUCCION**

El conocimiento de las características del oleaje en las zonas costeras es necesario en los proyectos de ingeniería costera y portuaria, para el cálculo de solicitaciones sobre una estructura, o cuando debe estimarse el transporte de sedimentos en las playas, etc. Con frecuencia las características del oleaje son conocidas en ubicaciones que no coinciden con el lugar de interés, ya sea por medición directa o porque se las ha estimado mediante técnicas de pronóstico en base a datos meteorológicos.

El cómputo de las propiedades de las olas en una determinada ubicación donde resulta necesario conocer sus propiedades, a partir de la información en otro punto donde se las conoce, puede realizarse mediante modelos matemáticos de diversa complejidad.

Cuando la topografía del lecho marino no presenta cambios bruscos en su morfología y cuando no existen obstáculos en la trayectoria de las olas, el fenómeno de refracción es dominante en la propagación del oleaje y las ecuaciones que la interpretan son relativamente simples y pueden ser resueltas numéricamente mediante técnicas sencillas.

El modelo matemático de rayos que aquí se presenta se adapta a estas hipótesis y es una herramienta de cálculo simple para la resolución de diversos problemas de la ingeniería marítima.

**1. Ecuaciones básicas**

El fenómeno de refracción del oleaje es el resultado de la deformación de la cresta de la ola producida por la variación de la celeridad de la onda a lo largo de la misma a medida que se propaga en aguas relativamente poco profundas. Tal variación obedece precisamente a las profundidades cambiantes a lo largo de una misma cresta. En aguas profundas cuando la relación entre la profundidad  $d$  y la longitud de onda  $L$  ( $d/L$ ) es mayor que  $1/2$ , la celeridad no se ve afectada por la profundidad y resulta uniforme a lo largo de la cresta; por esta razón la cresta de una onda puede suponerse recta y se propaga sin deformarse. La propagación de olas en aguas de profundidades restringidas, específicamente cuando la relación entre la profundidad local  $d$  y la longitud de onda  $L$  es menor que  $1/2$  ( $d/L < 1/2$ ), se ve afectada por la profundidad; en consecuencia, puntos de una misma cresta originalmente rectilínea, que se propagan en profundidades variables a lo largo de la cresta, lo harán con distintas celeridades induciendo una deformación de la misma, la que en consecuencia dejará de ser rectilínea y adoptará una forma curvada.

La teoría lineal de ondas de pequeña amplitud establece la relación entre la celeridad de una onda y la profundidad en que se propaga, que resulta a partir de la relación de dispersión:

[1]

$$\omega^2 = gk \tanh(kd)$$

donde

$\omega$ : frecuencia =  $2\pi/T$

$d$ : profundidad

$k$ : numero de onda =  $2\pi d/L$

de la ec. [1] se desprende que

[2]

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd)$$

y finalmente

[3]

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kd)$$

La ley de Snell de la óptica es aplicable al fenómeno de refracción de las olas. Puede considerarse la trayectoria de la ola descrita por un conjunto de rayos imaginarios perpendiculares a la cresta de la misma; entre dos ubicaciones (subíndices 1 y 2) pueden establecerse las siguientes relaciones entre la dirección de propagación  $\alpha$ , la longitud de onda  $L$  y la separación  $\beta$  entre dos rayos u ortogonales:

[4]

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\alpha_2)}$$

y

[5]

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)}$$

donde

$L$ : longitud de onda

$\alpha$  : ángulo respecto de una curva de nivel

$\beta$  : separación entre dos rayos ortogonales a la cresta de la ola.

La relación entre dos alturas de ola en las dos ubicaciones 1 y 2 se basa en la conservación de la energía en el tubo confinado entre dos ortogonales a las crestas de las olas:

[6]

$$\beta_1 \frac{\gamma H_1^2 L_1 n_1}{8} = \beta_2 \frac{\gamma H_2^2 L_2 n_2}{8}$$

donde :

$$n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{4 \cdot \pi \cdot d/L}{\sinh(4 \cdot \pi \cdot d/L)} \right]$$

de donde surge que :

[7]

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\left( \frac{L_1 n_1}{L_2 n_2} \right)} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} = k_s \cdot k_r$$

en la que  $k_s$  es el coeficiente de bajío y  $k_r$  es el coeficiente de refracción.

La determinación de  $k_r$  puede realizarse entonces a partir de la determinación de la separación  $\beta$  entre dos ortogonales. Para ello es necesario construir las ortogonales, es decir la trayectoria de cada rayo, lo que se efectúa computacionalmente mediante las ec.[4] y [5].

Las ortogonales son aproximadas por medio de tramos lineales y se calculan sucesivamente las coordenadas  $x$  y de los extremos de cada segmento. Utilizando principios cinemáticos, se pueden formular las siguientes igualdades:

[8]

$$\frac{ds}{dt} = c; \quad \frac{dx}{dt} = c \cos\theta; \quad \frac{dy}{dt} = c \operatorname{sen}\theta$$

[9]

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial c}{\partial x} \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial c}{\partial y} \cos\theta$$

[10]

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial c}{\partial x} \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial c}{\partial y} \cos\theta \right)$$

Resuelta esta etapa, la separación  $\beta$  entre rayos puede ser resuelta numéricamente mediante una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución permite obtener el valor de  $k_r$ . De este modo puede calcularse la altura de ola en un punto cualquiera de la trayectoria del rayo. A partir de consideraciones energéticas resulta posible establecer la siguiente ecuación para la separación  $\beta$  entre rayos:



[11]

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + p(s) \frac{d\beta}{ds} + q(s) \beta = 0$$

donde

$$p(s) = -\frac{\cos\theta}{C} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\sen\theta}{C} \frac{\partial C}{\partial y}$$

y

$$q(s) = \frac{\sen^2\theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{2\sen\theta\cos\theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y} + \frac{\cos^2\theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

siendo C la celeridad en el punto considerado y  $\theta$  el ángulo de propagación de la onda.

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta a lo largo de la coordenada curvilínea s (trayectoria del rayo) para obtener la separación  $\beta$  y a partir de ella el coeficiente de refracción Kr.

## 2. Solución numérica

La solución numérica comienza con la discretización del dominio de cálculo mediante una malla de cálculo con nodos separados en  $dx$  y  $dy$ , en los que se conoce la profundidad d.

En primer lugar se resuelve la longitud de onda L y la celeridad C de la onda para cada nodo mediante la ec. [1]. El cálculo se efectúa mediante iteraciones a partir de un valor inicial igual a la longitud en aguas profundas,  $L_0 = g T^2 / 2\pi$ , y la aplicación de un criterio de convergencia.

Las derivadas espaciales de C se aproximan mediante un esquema en diferencias finitas dado por:

[12]

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

y

[13]

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

El cálculo se inicia a partir de las coordenadas  $x_0$  y  $y_0$  y la dirección  $\theta_0$  en el borde exterior ubicado en aguas profundas. La ec. [10] se resuelve para el nuevo ángulo  $\theta$  de la siguiente forma:

$$[14] \quad \theta^{n+1} - \theta^n = \Delta\theta = \Delta s \left( \frac{\text{sen}\theta^n}{c^n} \cdot \frac{\partial c^n}{\partial x} - \frac{\text{cos}\theta^n}{c^n} \cdot \frac{\partial c^n}{\partial y} \right)$$

Las nuevas coordenadas del extremo del segmento de longitud  $ds$  se calculan mediante:

$$[15] \quad \begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + \Delta s \cdot \cos\left(\frac{\theta^n + \theta^{n+1}}{2}\right) \\ y^{n+1} &= y^n + \Delta s \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta^n + \theta^{n+1}}{2}\right) \end{aligned}$$

Dado que las coordenadas  $x, y$  de los extremos de los segmentos no coinciden necesariamente con nodos de la grilla de cálculo, es necesario interpolar los valores de  $C$ , y de las derivadas espaciales que aparecen en la ec. [14] a partir de los valores en los nodos. Para ello se utiliza la fórmula que sigue:

$$[16] \quad c^n = c_{i,j}(\xi-1)(\eta-1) - c_{i+1,j}(\eta-1)\xi + c_{i+1,j+1}\xi\eta + c_{i,j+1}\eta(\xi-1)$$

donde  $\zeta$  y  $\eta$  son coeficientes que se indican en el esquema de la Figura N° 1.

La ecuación diferencial [11] que establece la separación entre rayos se resuelve mediante el método de Runge-Kutta, a partir de condiciones iniciales para la separación  $\beta$  y su derivada primera,  $p$  (convergencia). La ec. [11] se expresa:

$$[17] \quad \frac{d^2\beta}{ds^2} = F(s, \beta, p)$$

donde

$$p = \frac{d\beta}{ds}$$

En este caso, la función  $F$  resulta:

$$F(s, \beta, p) = -p(s) \cdot p - q(s) \cdot \beta$$

Si se considera  $s = s_0 + mh$  con  $m = 0, 1, 2, \dots$  y se parte de  $m = 0$  (es decir  $s = s_0$ , punto en el que se suponen conocidos

los valores de  $p$  y  $\beta$ ), los valores en el siguiente punto se calculan mediante:

[18]

$$P_{m+1} = P_m + \frac{h}{6} (kp1 + 2kp2 + 2kp3 + kp4)$$

$$\beta_{m+1} = \beta_m + \frac{h}{6} (ky1 + 2ky2 + 2ky3 + ky4)$$

con

$$kp1 = F(s_m, \beta_m, P_m)$$

$$ky1 = P_m$$

$$kp2 = F(s_m + \frac{h}{2}, \beta_m + \frac{h}{2}ky1, P_m + \frac{h}{2}kp1)$$

$$ky2 = P_m + \frac{h}{2}kp1$$

$$kp3 = F(s_m + \frac{h}{2}, \beta_m + \frac{h}{2}ky2, P_m + \frac{h}{2}kp2)$$

$$ky3 = P_m + \frac{h}{2}kp2$$

$$kp4 = F(s_m, \beta_m + hky3, P_m + hkp3)$$

$$ky4 = P_m + hkp3$$

### 3. Verificación de resultados

El modelo matemático fue aplicado para el cómputo de refracción en el caso de tres playas definidas mediante un perfil teórico. En los tres casos la profundidad máxima fue de 162 m y la mínima de 2 m. El primer caso fue el de una playa plana con pendiente uniforme. El segundo caso fue una playa parabólica cóncava y el tercero una playa de perfil parabólico convexo. Las expresiones analíticas respectivas fueron:

$$d = -0.04 x + 162 \text{ (plana)}$$

$$d = \left[ \frac{(x-x_0)}{k} \right]^{\frac{2}{3}} \text{ (cóncava)}$$

$$\text{con } x_0 = 4005,49; k = 1,9426$$

$$d = y_0 - \left[ \frac{(x-x_0)}{k} \right]^{\frac{2}{3}} \text{ (convexa)}$$

$$\text{con } y_0 = 164; x_0 = -5,4923; k = 1,9423$$

Los perfiles de la playa se indican en la Figura N° 2. En estos casos en que las líneas de igual profundidad resultan paralelas, tanto el ángulo de propagación del frente de onda como los coeficientes de refracción y bajío tienen expresiones analíticas que permiten su cálculo:

[19]

$$\theta = \arcsen\left(\left(\frac{C}{C_0}\right) \sen(\theta_0)\right)$$

$$K_r = \left(\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K_s = \left(\frac{L_0}{2 \cdot n \cdot L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$n = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{4 \cdot \pi \cdot \frac{d}{L}}{\sinh\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot d}{L}\right)}\right]$$

Tanto el modelo matemático (solución numérica) como las ec.[19] (solución analítica) se aplicaron a la resolución de la propagación de olas de 10 y 15 segundos de período sobre la playa plana de pendiente uniforme indicada más arriba. El ángulo de incidencia en el borde exterior fue de 30° y 45°. Los resultados comparativos se presentan en las Figuras N° 3 a 6, las que muestran resultados coincidentes. Para la playa parabólica cóncava se utilizó un período de 10 segundos y un ángulo de incidencia de 30°; los resultados se presentan en la Figura N° 7. La Figura N° 8 muestra los resultados para la playa parabólica convexa, período T =10 segundos y dirección de incidencia 30°.

#### 4. Aplicación

El modelo matemático fué aplicado al caso de una topografía real en el golfo de San Jorge, para la caracterización del régimen de olas en Caleta Paula a partir de información en aguas profundas. En esta zona se proyecta la construcción de un puerto pesquero. En este caso, el modelo se implementó en tres etapas o mallas de cálculo, cuya ubicación relativa se muestra en la Figura N° 9.

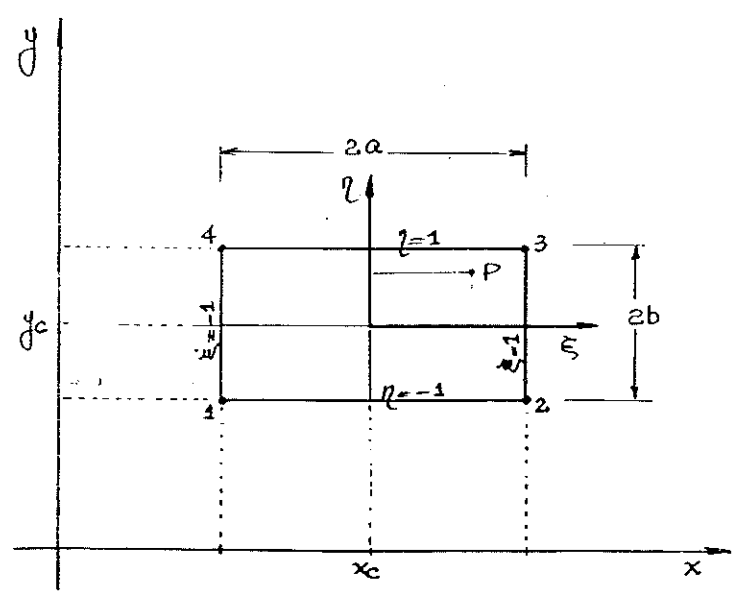
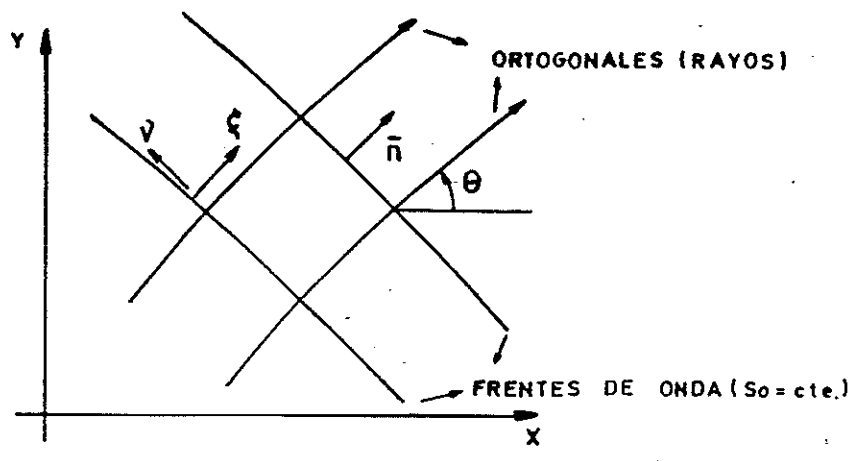
La primera malla, de 100 Km x 120 Km, estuvo constituida por 806 nodos separados 4.000 m; la segunda (16 Km x 10 Km) por 1.066 nodos separados 400 m y la tercera (1000 x 1800 m) por 4.641 nodos y una separación entre nodos de 20 m. Ello obedeció a la necesidad de efectuar el cómputo con mayor detalle en las zonas costeras, donde la topografía del lecho es más cambiante.

La Figura N° 10 muestra una vista tridimensional de la malla 3, en la que se destaca el canal de acceso de 150 m de ancho que da acceso al puerto pesquero.

En las Figuras N° 11 a 13 se muestran los resultados para el caso de olas de dirección SE y de 15 segundos de período, para un nivel del mar de +6,64 m sobre el plano de referencia, correspondiente a pleamar.

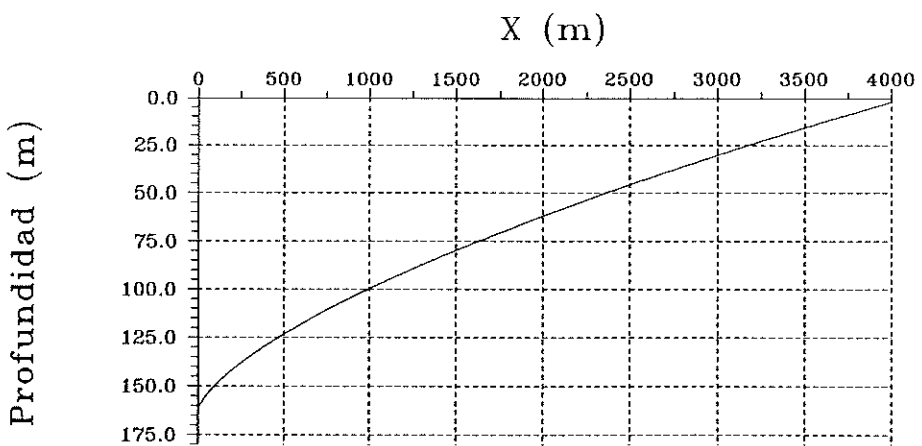
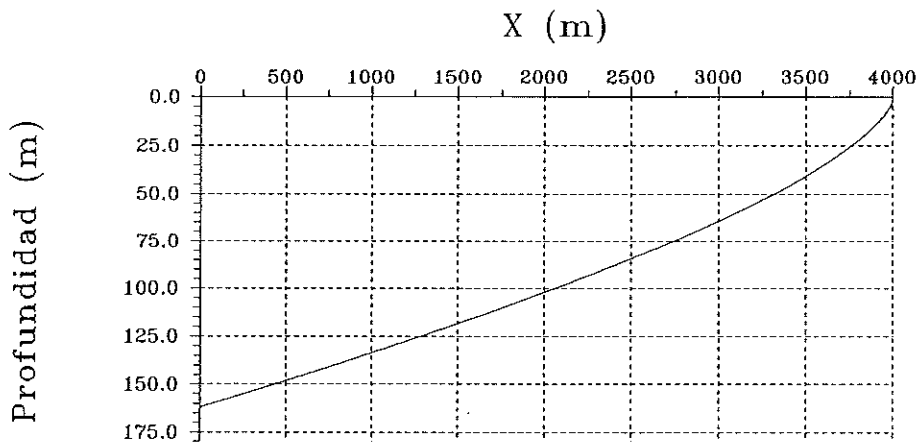
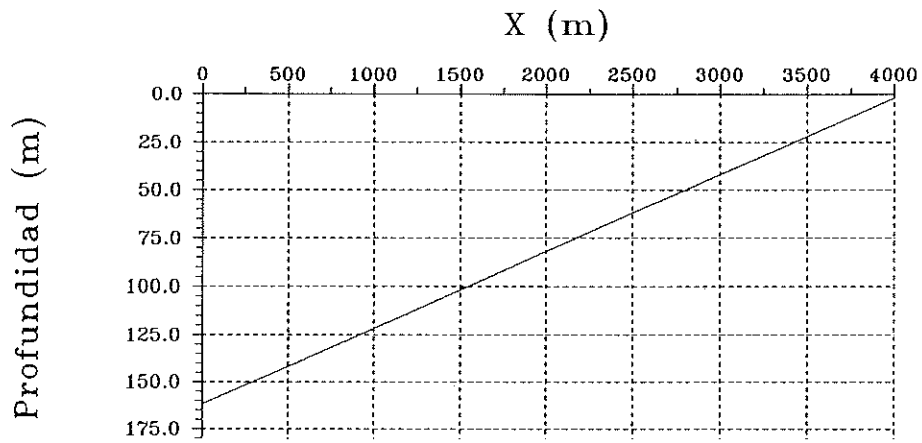
## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Water Wave Mechanics for Engineers and scientists. R. DEAN, R. DALRYMPLE, 1984.
- [2] Difracción-refracción combinadas en ondas de agua. C.A. VIONNET, LHA-064-02-87, Septiembre, 1987.



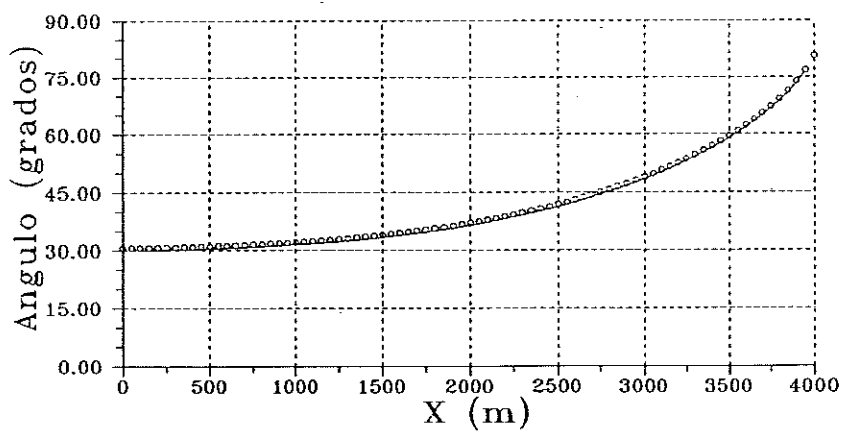
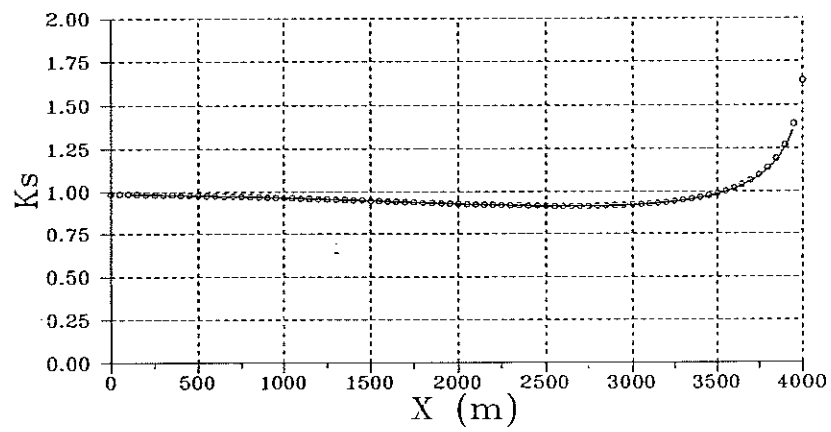
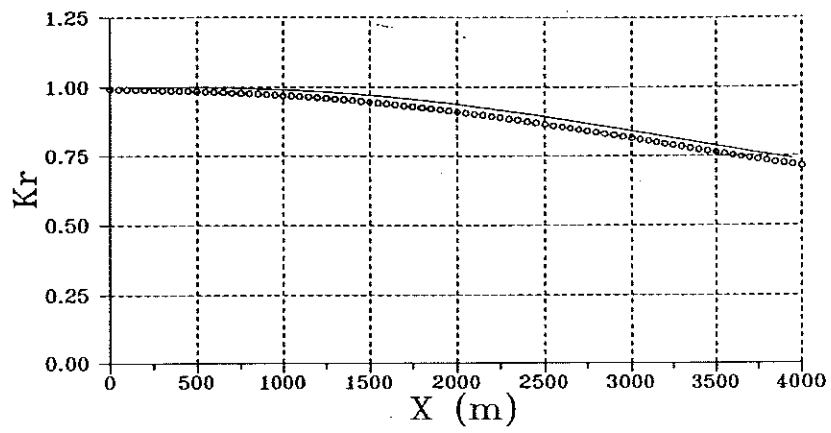
Esquema general para el cálculo numérico

Figura N° 1



Perfil transversal de la playa

Figura N<sup>o</sup>. 2

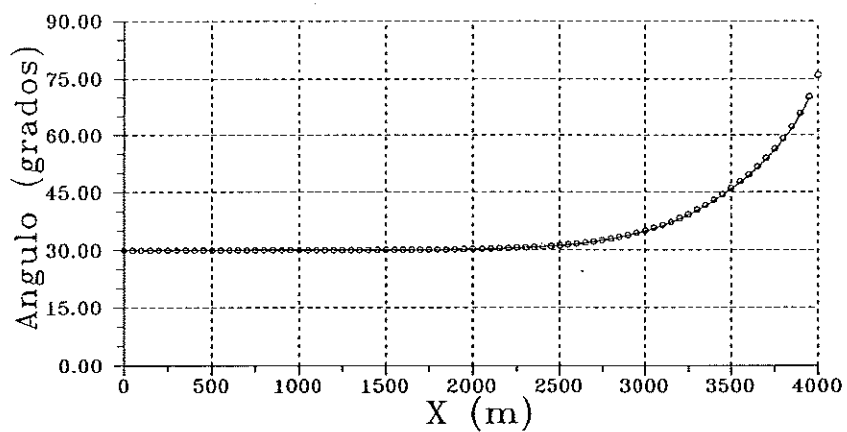
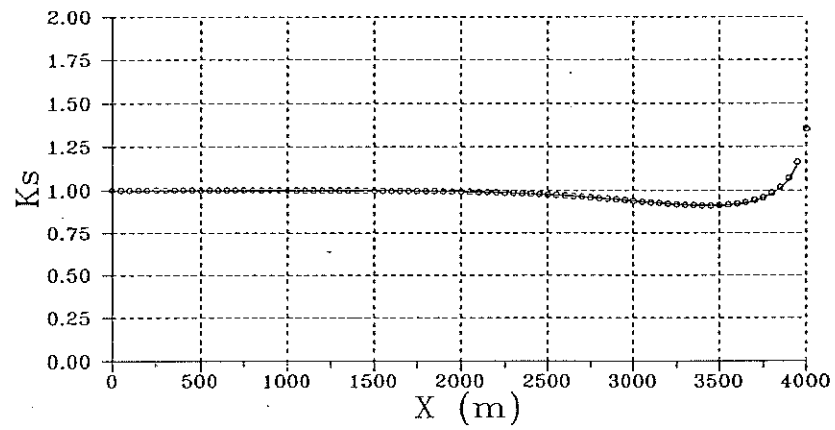
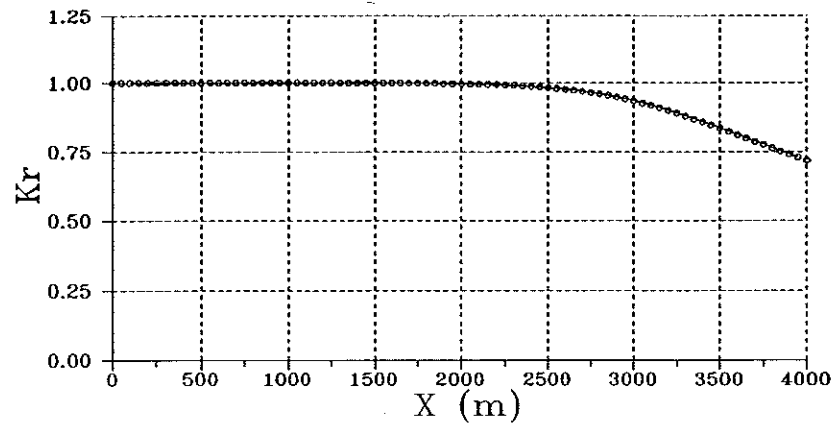


o Solucion analitica  
 - Solucion numerica

Playa plana,  $T = 15$  segundos,  $\theta = 30^\circ$

Figura N<sup>o</sup> 3

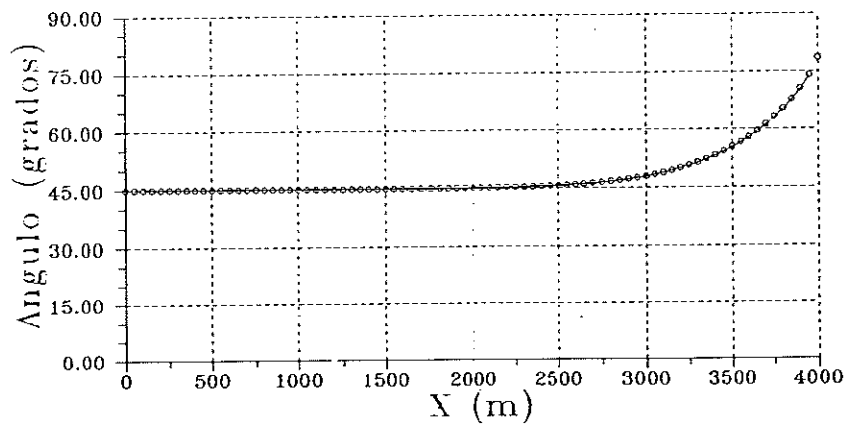
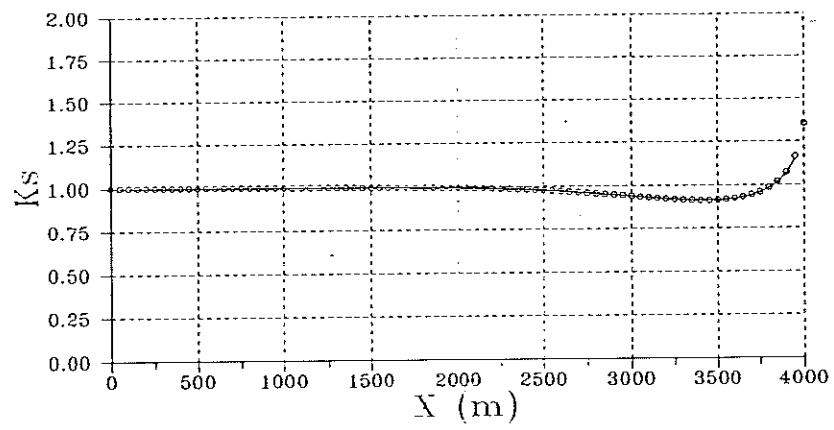
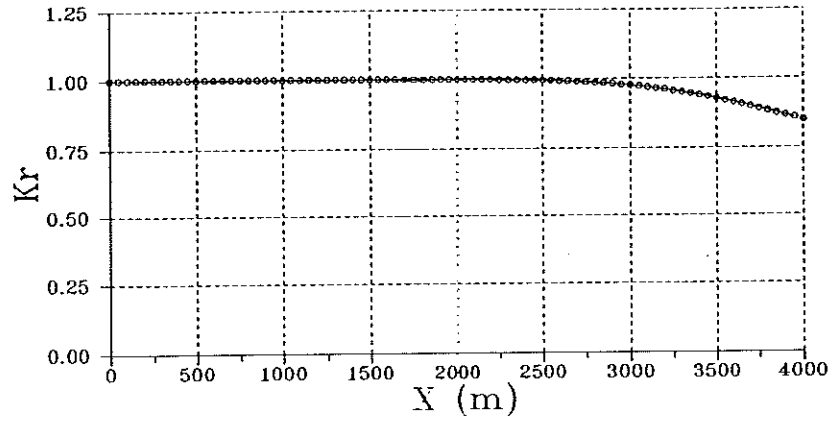




o Solucion analitica  
- Solucion numerica

Playa plana,  $T = 10$  segundos,  $\theta = 30^\circ$

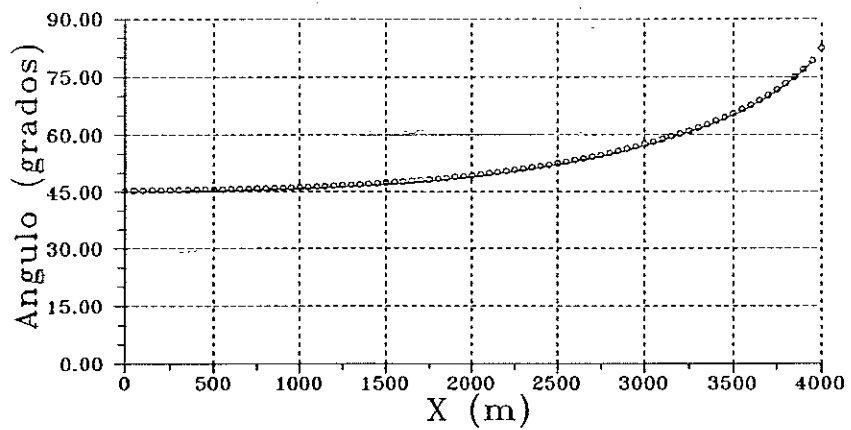
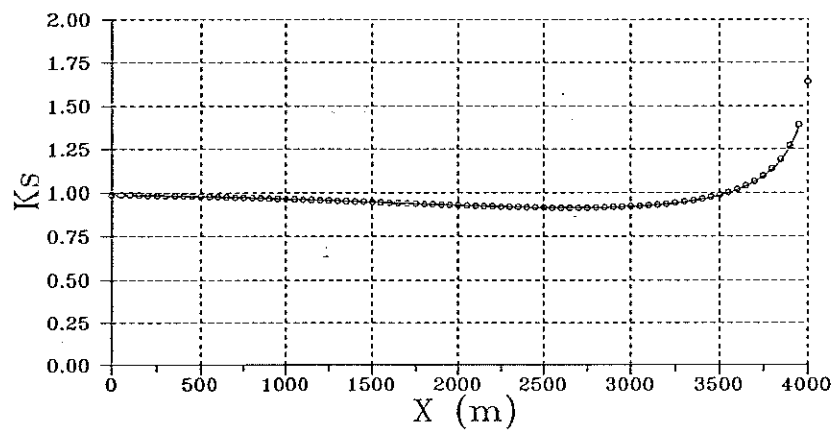
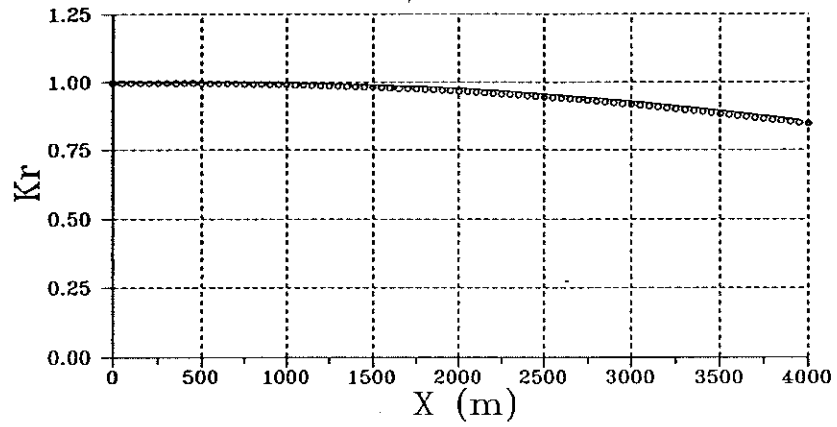
Figura N° 4



o Solucion analitica  
 - Solucion numerica

Playa plana,  $T = 10$  segundos,  $\theta = 45^\circ$

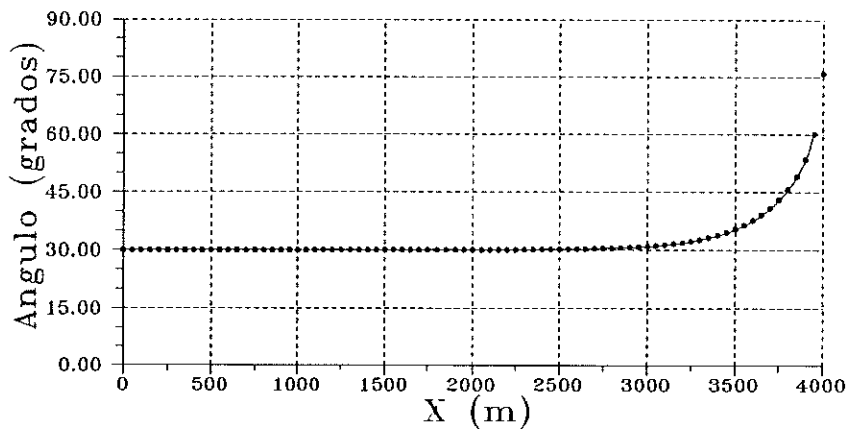
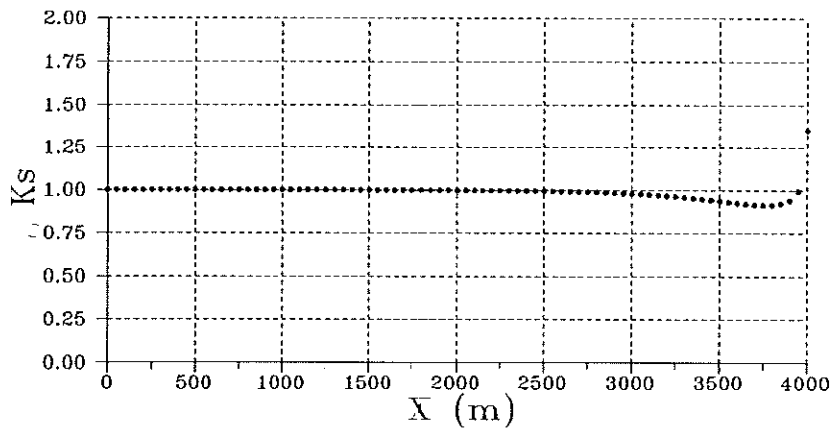
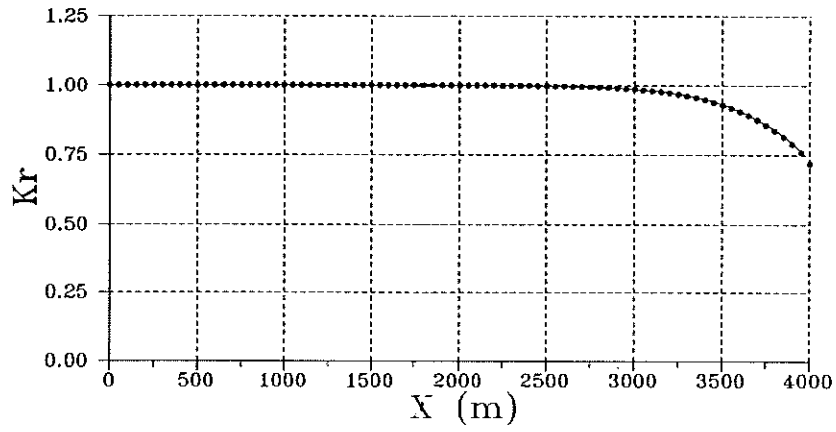
Figura N° 5



o Solucion analitica  
 - Solucion numerica

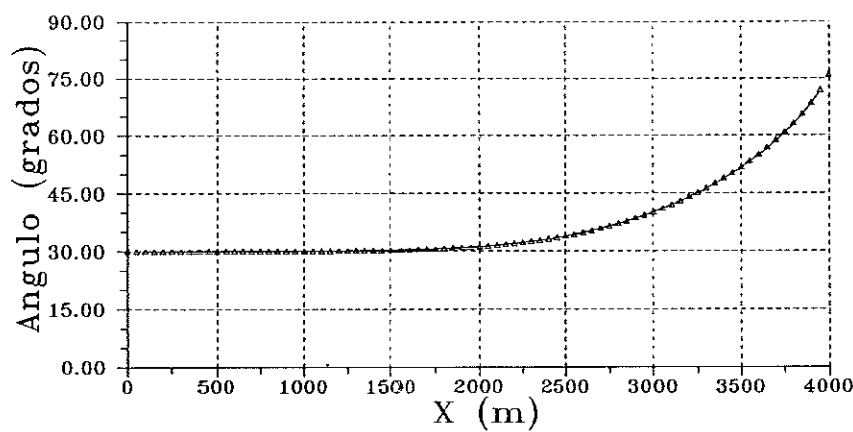
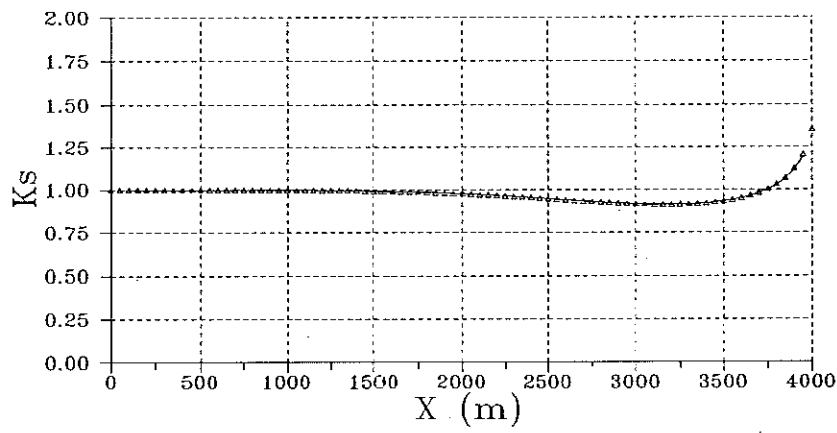
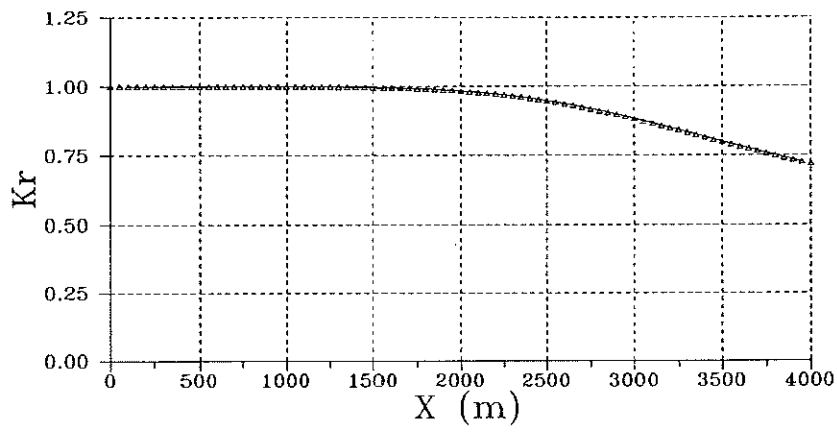
Playa plana,  $T = 15$  segundos,  $\theta = 45^\circ$

Figura N<sup>o</sup> 6



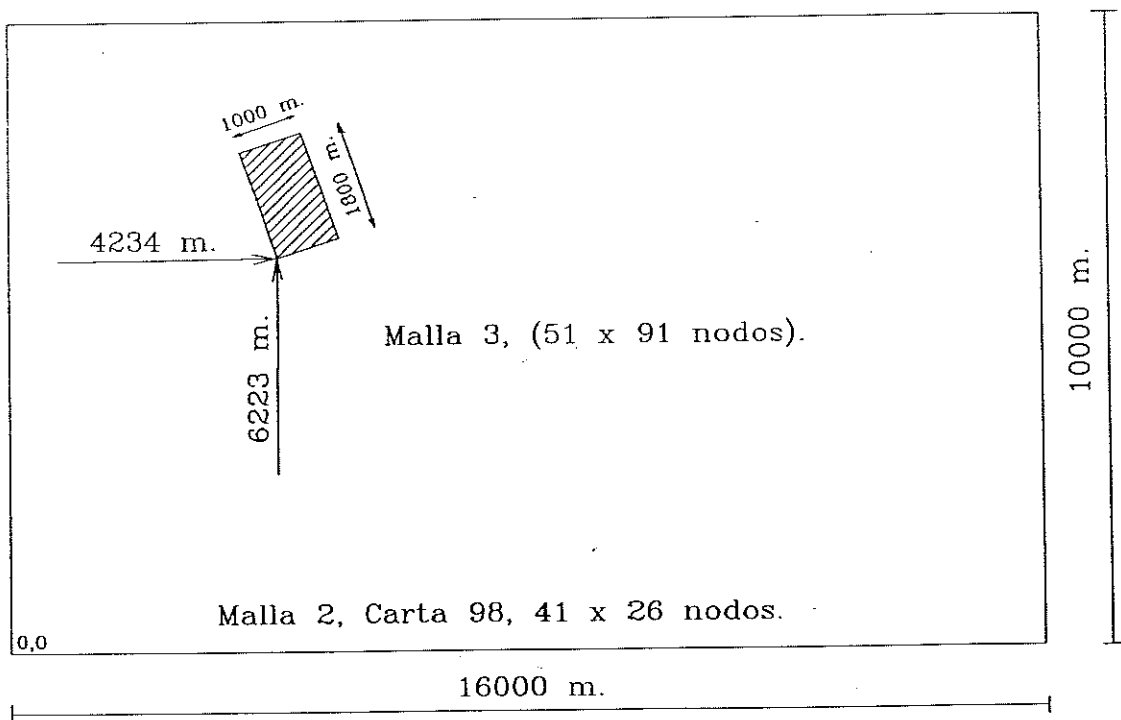
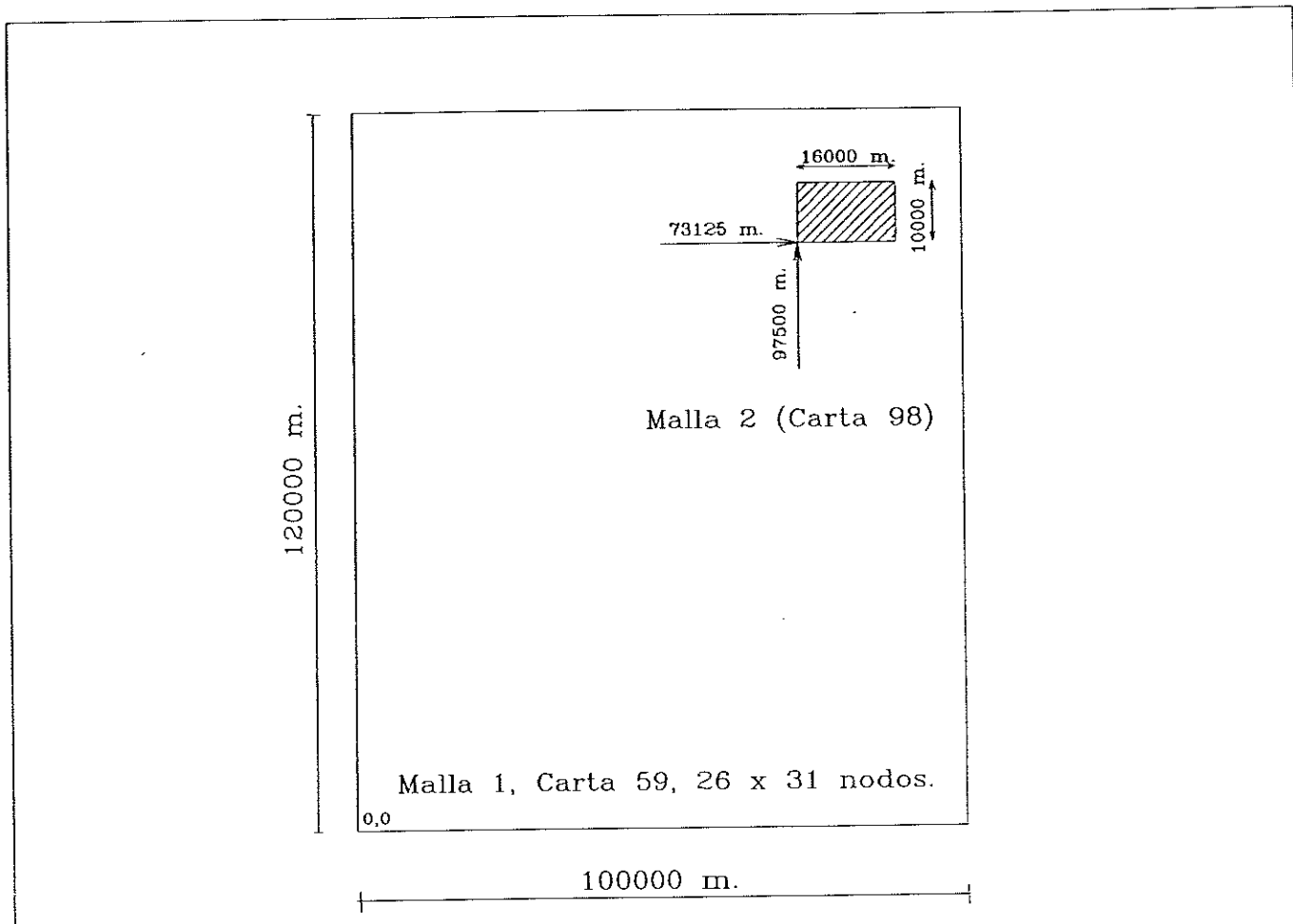
Playa parabólica concava.  $T = 10$  s,  $\theta = 30^\circ$

Figura N° 7



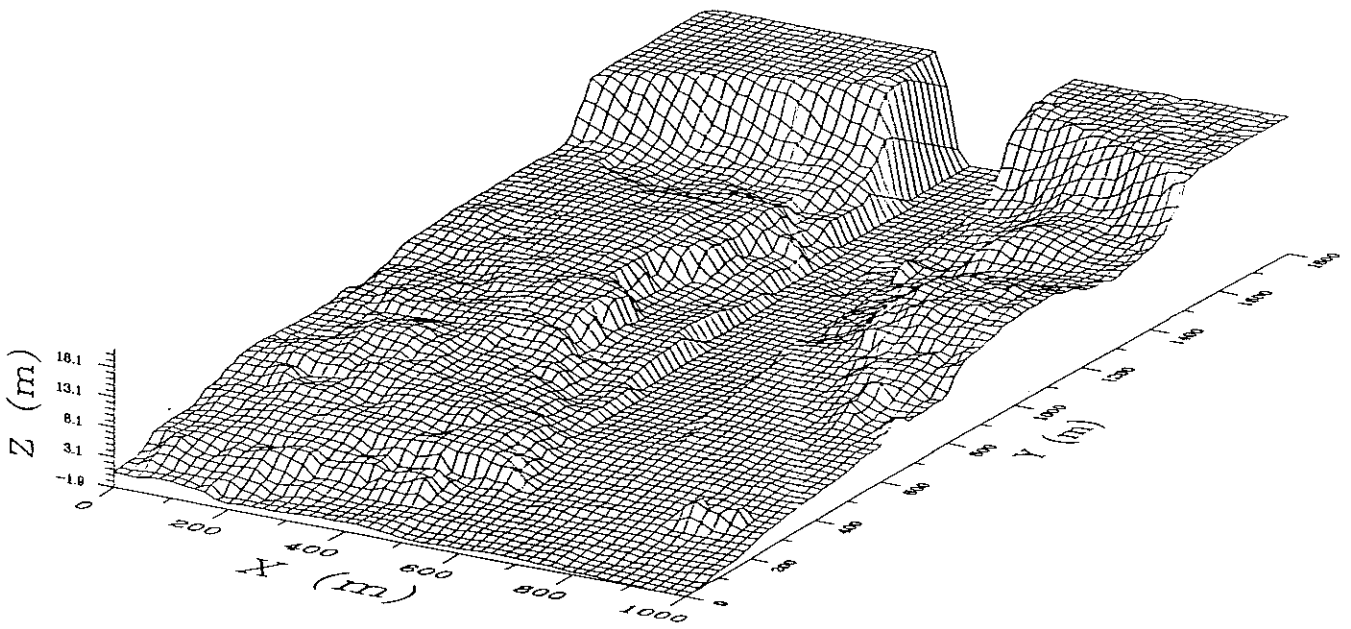
Playa parabólica convexa.  $T = 10$  s,  $\theta = 30^\circ$

Figura N<sup>o</sup> 8



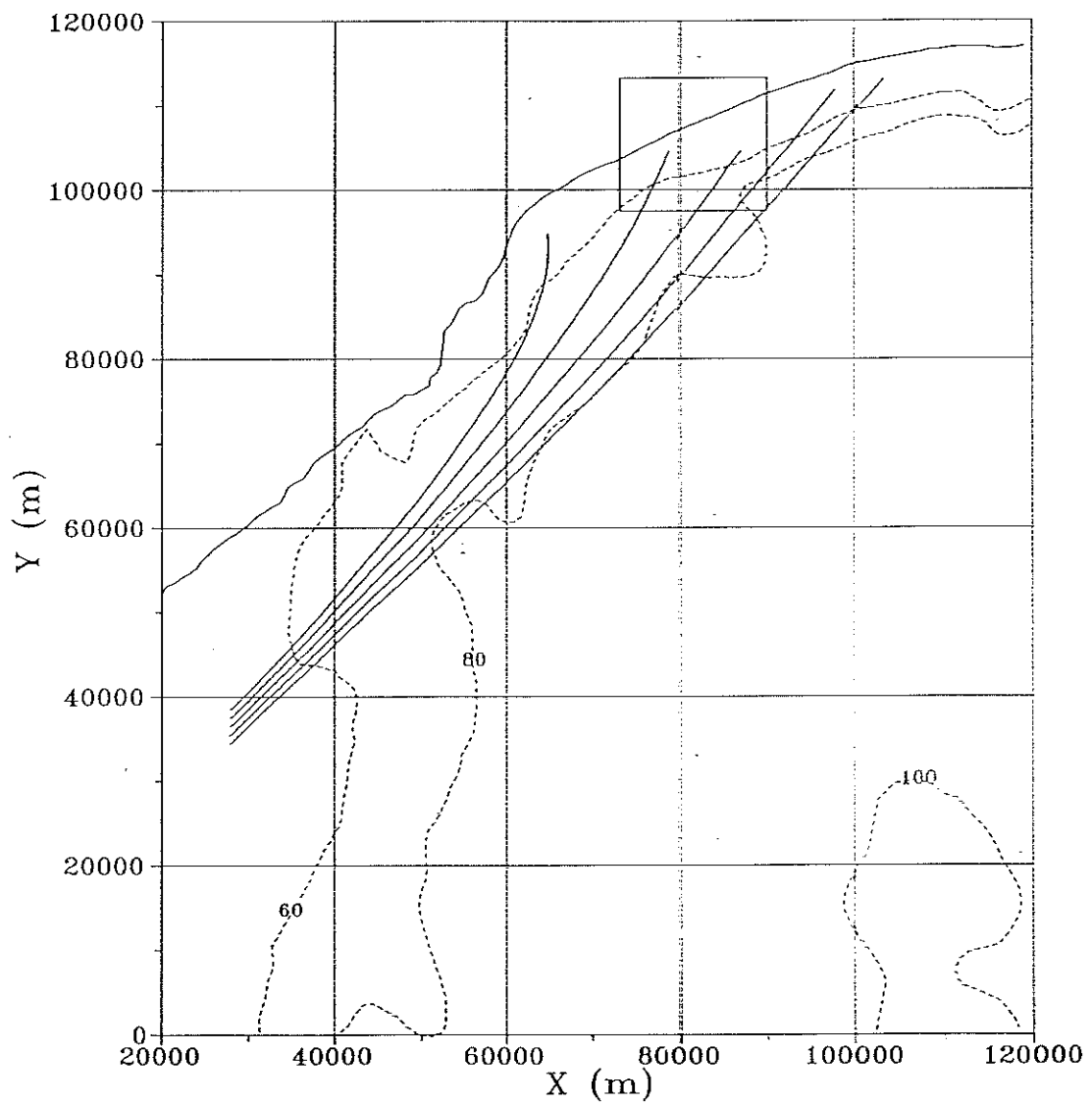
Ubicación relativa de las mallas de cálculo

Figura Nº 9



Vista tridimensional con el canal de acceso

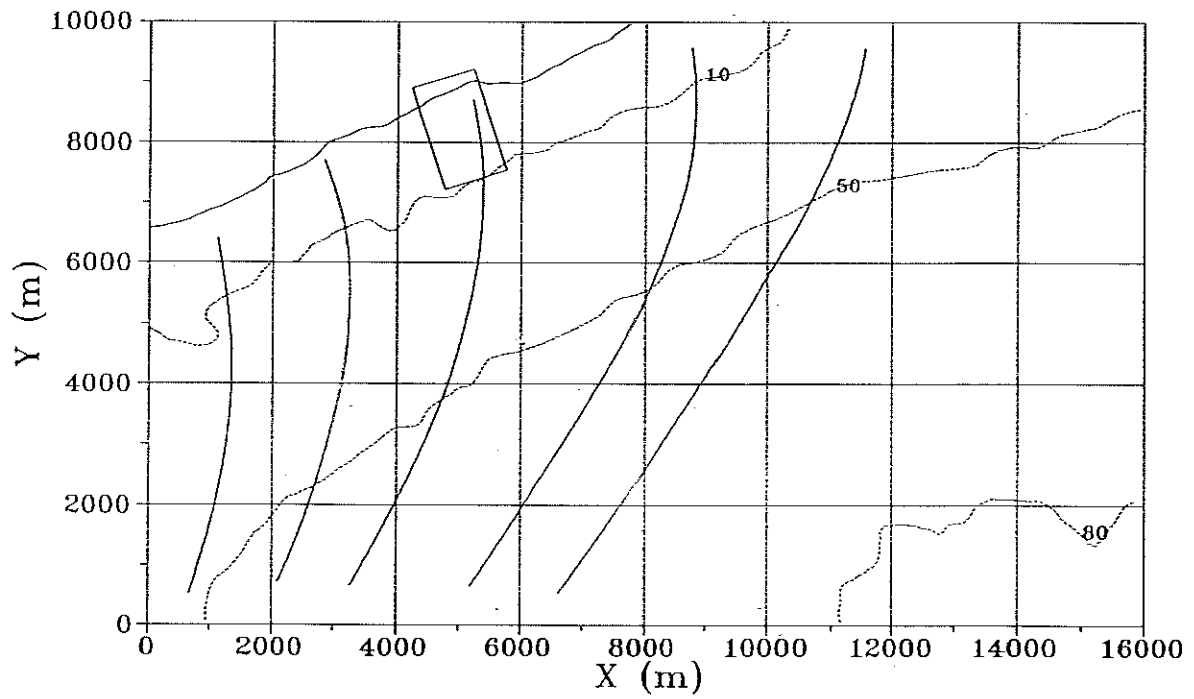
Figura Nº 10



Malla 1, Dirección SE, T=15 seg.

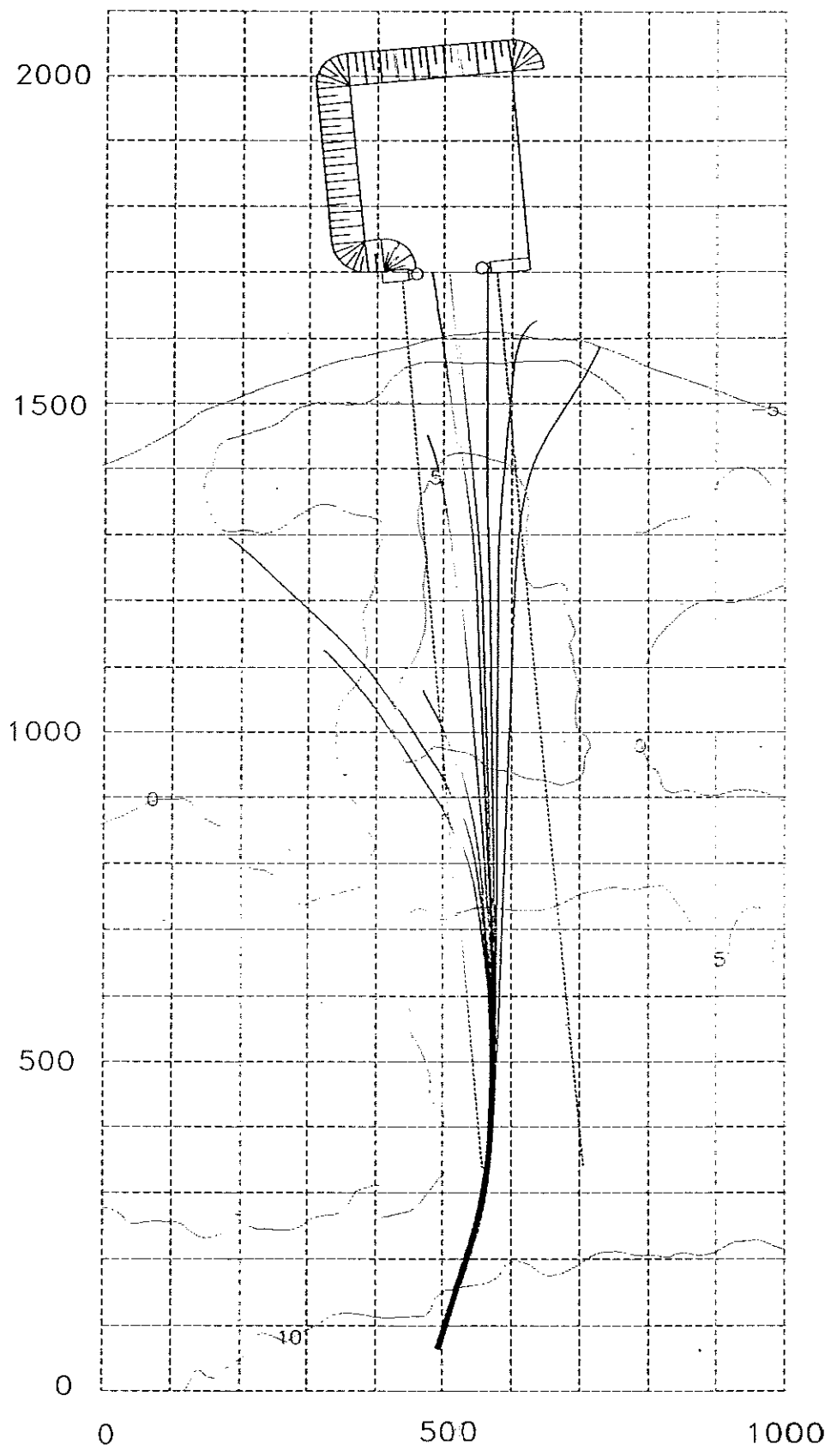
Figura 11.





Malla 2, Dirección SE, T=15 seg.

Figura 12



Malla 3, Dir. SE, T=15 seg., N.M.=+6, 64 m

Figura Nº 13