

Laboratorio de Hidráulica Aplicada

Simulación Numérica
de Flujos Cuasi-Bidimensionales
a Superficie Libre

por

Dr. Angel N. MENENDEZ



INSTITUTO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNICA HIDRICAS

Simulación Numérica
de Flujos Cuasi-Bidimensionales
a Superficie Libre

por

Dr. Angel N. MENENDEZ

Secretaría de Recursos Hídricos
I.N.C.Y.T.H.

Laboratorio de Hidráulica
Aplicada

Simulación Numérica
de Flujos Cuasi-Bidimensionales
a Superficie Libre

por

Angel N. MENENDEZ

Con la Colaboración de:

Comp. Cient. Rubén FUNAI
Dr. Rubén NORSCINI

Dibujantes: Eduardo CAMMISA
Jorge HASPERT
Jorge VEDA

Secretaria: Srta. Alicia RODRIGUEZ

LHA-S5-016-85

EZEIZA, Diciembre de 1985.-

Simulación Numérica
de Flujos Cuasi-Bidimensionales
a Superficie Libre

por

Angel N. MENENDEZ

R E S U M E N

Se presenta y analiza un método numérico para resolver las ecuaciones para un flujo cuasi-bidimensional a superficie libre, válido tanto para régimen permanente como impermanente. Se muestran y discuten los resultados de las pruebas, los ensayos numéricos y las aplicaciones. Se describe la implementación del método en el programa computacional HIDROBID II.

D E S C R I P T O R E S

Temáticos: Flujos cuasi-bidimensionales, Ecuaciones de Saint Venant, modelación matemática.

I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION	
CAPITULO 1: ECUACIONES DE GOBIERNO	
1.1.- Modelo Teórico y Ecuaciones Integradas	1
1.2.- Tensiones Efectivas	5
1.3.- Condiciones Iniciales y de Contorno	7
CAPITULO 2: CARACTERIZACION DE LOS DISTINTOS TIPOS DE ONDAS	
2.1.- Introducción	9
2.2.- Soluciones al Problema Lineal	11
2.3.- Caracterización Cinemática de las Ondas	15
2.4.- Estructura de las Ondas	18
CAPITULO 3: METODO NUMERICO	
3.1.- Antecedentes	23
3.2.- Formulación	25
3.3.- Difusión Numérica	33
3.4.- Análisis Lineal	35
3.5.- Análisis No Lineal	49
CAPITULO 4: RESULTADOS NUMERICOS	
4.1.- Consideraciones Generales	59
4.2.- Pruebas	59
4.3.- Ensayos Numéricos	65
4.4.- Aplicaciones	68
CAPITULO 5: PROGRAMA HIDROBID II	
5.1.- Características Generales y Estructura	80
5.2.- Manual de Operaciones	82
5.2.1.- Archivo de Geometría	83
5.2.2.- Archivo de Condiciones Iniciales	83
5.2.3.- Archivo de Resultados	84
5.2.4.- Archivo de Curiosos	84
CAPITULO 6: CONCLUSIONES	86
REFERENCIAS	

INTRODUCCION

La disponibilidad de computadoras de creciente capacidad y rapidez, ha tornado posible y atractiva la simulación numérica de flujos bidimensionales en el espacio, incluso en régimen impermanente. En este informe, se presenta y analiza una técnica de cálculo para la simulación de flujos cuasi-bidimensionales e impermanentes a superficie libre. También se describe su implementación en un programa computacional.

En particular, el estudio se centra en flujos que se desarrollan sobre una extensión limitada (se desprecian la fuerza de Coriolis y la acción del viento), y que alcanzan un régimen permanente.

El informe comienza con una formulación detallada de las ecuaciones de movimiento y un estudio concienzudo de los distintos tipos de ondas posibles de acuerdo a esas ecuaciones.

CAPITULO 1

ECUACIONES DE GOBIERNO

1.1.- Modelo Teórico y Ecuaciones Integradas

El conjunto de hipótesis que definen el modelo teórico para un flujo cuasi-bidimensional a superficie libre, puede ser estructurado en tres categorías, de acuerdo a como restringen cada uno de los siguientes factores: fuerzas actuantes, geometría del cuenco y condiciones del flujo. Las hipótesis pueden expresarse, entonces, de la siguiente manera:

(i) Fuerzas Actuantes:

(a) Las fuerzas motrices son la gravedad, la fuerza de inercia debida a la rotación de la tierra (Coriolis) y las fuerzas superficiales debidas a la acción del viento.

(b) La resistencia al movimiento proveniente de la "fricción" contra el fondo y de la generación de turbulencia por efecto de esa fricción, puede ser expresada usando una ley similar a la del escurrimiento permanente unidimensional (ley de Chezy).

(ii) Geometría del Cuenco:

(a) La forma del fondo es arbitraria, pero no cambia con el tiempo y no presenta variaciones bruscas.

(b) La pendiente del fondo es pequeña.

iii) Condiciones del flujo:

(a) El flujo es cuasi-bidimensional; es decir, es esencialmente bidireccional y la velocidad es prácticamente uniforme en la dirección normal a la superficie del escurrimiento.

(b) La componente de la aceleración normal al escurrimiento es despreciable (frente a la aceleración de la gravedad). Alternativamente, esta hipótesis puede expresarse como que la curvatura y divergencia de las líneas de corriente en planos normales a la superficie del escurrimiento son pequeñas. Como consecuencia, la distribución de presiones es hidrostática.

Puede demostrarse que las hipótesis agrupadas en (iii) resultan condiciones necesarias, si se supone que la escala de longitudes a lo largo de la superficie del escurrimiento (típicamente, una longitud de onda) es mucho mayor que la profundidad [1]. Es por eso que se habla de ondas en aguas poco profundas.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un fluido (newtoniano) son las conocidas Ecuaciones de Navier-Stokes (en tres dimensiones espaciales) [2]. En flujos turbulentos, es conveniente "filtrar" los movimientos en escala turbulenta; éste procedimiento conduce a las Ecuaciones de Reynolds [3]. Las ecuaciones para flujo cuasi-bidimensional se obtienen por integración

de las Ecuaciones de Reynolds sobre la profundidad local h , y utilizando las hipótesis del modelo teórico. Si U, V y W ($|W| \ll |U|, |V|$) son las componentes del vector velocidad (media en el sentido de Reynolds), se definen las velocidades medias sobre la profundidad como

$$(1.1) \quad u \equiv \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} U \, dz$$

$$(1.2) \quad v \equiv \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} V \, dz$$

donde z es la coordenada vertical, y z_0 la cota (local) del fondo. En términos de estas velocidades, las ecuaciones para flujo cuasi-bidimensional son [4]

$$(1.3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) - fhv + gh \frac{\partial}{\partial x} (h+z_0) + \frac{\tau_{fx}}{\rho} - \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (hT_{xx}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (hT_{xy}) = 0$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) + fhu + gh \frac{\partial}{\partial y} (h+z_0) + \frac{\tau_{fy}}{\rho} - \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (hT_{xy}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (hT_{yy}) = 0$$

donde t es el tiempo, x e y las coordenadas según la

horizontal, f el parámetro geotrófico ($f = 2\omega \sin \ell$, $\omega =$ frecuencia angular de la rotación terrestre, $\ell =$ latitud geográfica), g la aceleración de la gravedad, ρ la densidad, τ_{fx} y τ_{fy} las componentes de la tensión de corte contra el fondo, τ_{sx} y τ_{sy} las componentes de la tensión de corte contra la superficie libre (viento) y T_{xx} , T_{yy} y T_{xy} las tensiones efectivas, definidas por:

$$(1.6) \quad T_{xx} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[2\rho\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} - \rho (U-u)^2 \right] dz$$

$$(1.7) \quad T_{yy} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[2\rho\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \rho \overline{v'^2} - \rho (V-v)^2 \right] dz$$

$$(1.8) \quad T_{xy} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[\rho\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} - \rho (U-u)(V-v) \right] dz$$

donde ν es la viscosidad cinemática y u' y v' las componentes de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad en las direcciones x e y , respectivamente.

De acuerdo a las hipótesis, las tensiones de corte contra el fondo pueden expresarse como

$$(1.9) \quad \tau_{fx} = \rho \frac{g}{C^2} u (u^2 + \nu^2)^{1/2}$$

$$(1.10) \quad \tau_{fy} = \rho \frac{g}{C^2} \nu (u^2 + \nu^2)^{1/2}$$

donde C es el coeficiente de Chezy. Las tensiones de corte por acción del viento son datos a proveerse. El

sistema de ecuaciones (1.3)-(1.5) para las incógnitas h , u y v aún no está cerrado, dado que se necesitan expresiones para las tensiones efectivas. Este problema se discute en la sección siguiente.

1.2.- Tensiones Efectivas

Las Ecs. (1.6)-(1.8) muestran que existen tres contribuciones, cualitativamente distintas, a las tensiones efectivas. En primer lugar se encuentran las tensiones viscosas. A altos números de Reynolds su contribución total puede, en general, despreciarse frente a la de las segundas. Estas son las tensiones turbulentas, que dependen de la estructura de la turbulencia. En flujos cuasi-bidimensionales la turbulencia presenta una estructura un tanto particular. En efecto, mientras las escalas más pequeñas presentan las características típicas de la turbulencia clásica (tales como tridimensionalidad, isotropía en las menores escalas de movimiento, cascada de energía de las mayores a las menores escalas, etc.), las escalas más grandes están limitadas por la profundidad relativamente pequeña del flujo. Sería interesante investigar si estas escalas presentan una estructura similar a la de la "turbulencia bidimensional" [5].

Es posible distinguir entre la turbulencia generada por el fondo y la producida por las costas. La primera está presente en todos los puntos del flujo, es decir, está totalmente desarrollada. Además, las escalas mayores de movimiento son del orden de la profundidad; en conse-

cuencia, es una turbulencia típicamente tridimensional. Su efecto sobre el flujo medio se manifiesta, en general, como una resistencia efectiva, al absorber energía de ese flujo medio a través de las escalas más grandes. En la práctica esa resistencia efectiva está incluida en el término de la tensión de corte contra el fondo. La turbulencia producida por las costas, en cambio, está compuesta por un rango de escalas de movimiento desde las más pequeñas hasta las que superan largamente a la profundidad. Estas últimas están asociadas, entonces, a movimientos cuasi-bidimensionales. En principio, esta turbulencia está confinada a capas límites adyacentes a los contornos. No obstante, factores tales como una variación brusca en la alineación del contorno, pueden producir un desprendimiento de la capa límite y la formación de una zona de recirculación. En estas situaciones es imprescindible considerar explícitamente el efecto de las tensiones turbulentas. Para ello es necesario "modelarlas", es decir, desarrollar expresiones o ecuaciones que las relacionen con las variables u , v y/o h . Existen una variedad de modelos de turbulencia, desarrollados para la turbulencia tridimensional. Algunos de ellos han sido utilizados, con resultados promisorios, para simular la turbulencia cuasi-bidimensional [6]. El modelo más simple consiste en expresar a las tensiones turbulentas como

$$(1.11) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{u'^2}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{u'v'}) dz = h \tau_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{uv'}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_0+h} (-\overline{v'^2}) dz = h \tau_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

donde ν_t es la viscosidad (cinemática) de torbellino, supuesta constante y conocida.

La tercera contribución a las tensiones efectivas son las denominadas tensiones convectivas, que resultan de la integración sobre la profundidad de los términos convectivos tridimensionales. Nótese que estas tensiones se anularían si la distribución de velocidades fuera efectivamente uniforme a lo largo de la vertical. Ellas están asociadas al conocido efecto de dispersión de contaminantes, que ocurre incluso en flujos cuasi-unidimensionales [7]. También son las responsables del corrimiento hacia afuera de la posición del punto de máxima velocidad, en el caso del escurrimiento en canales curvos [8]. Las tensiones convectivas juegan, además, un importante rol en flujos recirculantes; en efecto, ellas extraen energía del flujo, dejando a las tensiones turbulentas como único mecanismo de transferencia de energía al flujo recirculante [4]. Dejando de lado el efecto de dispersión de contaminantes, las tensiones convectivas son relevantes, en general, en el caso en que el radio de curvatura de las líneas de corriente es comparable a la profundidad. Solo ha habido unos pocos intentos de modelar esta parte de las tensiones efectivas [4].

1.3.- Condiciones Iniciales y de Contorno

Siendo las Ecs. (1.3)-(1.5) de primer orden en el tiempo, es necesario especificar inicialmente las distribuciones de h , u y v .

En el caso en que las tensiones efectivas pueden

despreciarse, el sistema de ecuaciones es hiperbólico. La aplicación del método de las características muestra entonces que debe especificarse el siguiente número de condiciones de contorno, de acuerdo al tipo de contorno y al régimen de flujo normal al contorno [9]:

Contorno entrante-flujo subcrítico: 2

Contorno entrante-flujo supercrítico: 3

Contorno costa (flujo subcrítico): 1

Contorno saliente-flujo subcrítico: 1

Contorno saliente-flujo supercrítico: 0

En flujo subcrítico, en general, se especifican u y v en el contorno entrante y h en el saliente. Sobre el contorno costa se pide que la componente normal de la velocidad sea nula. Nótese que, entonces, resulta una condición de libre deslizamiento sobre el contorno, compatible con la ausencia de tensiones de corte. Físicamente, esto significa desprestigiar el espesor de la capa límite.

Si se producen zonas de recirculación del flujo, donde las tensiones efectivas se hacen significativas, el carácter de las ecuaciones puede cambiar localmente. Por ejemplo, utilizando el modelo de turbulencia definido por las Ecs. (1.11) - (1.12), el sistema se vuelve elíptico. En este caso, es necesario especificar ambas componentes de la velocidad sobre los contornos.

CAPITULO 2

CARACTERIZACION DE LOS DISTINTOS TIPOS DE ONDAS

2.1.- Introducción

El objetivo de un estudio ingenieril no consiste solo en predecir cuantitativamente un fenómeno, sino también en comprenderlo. El análisis general del fenómeno de propagación de ondas bidimensionales en aguas poco profundas es muy complejo y, hasta el presente, insoluble, por lo cual es necesario introducir simplificaciones.

En primer lugar, no se considerarán las contribuciones de la fuerza de Coriolis ($f = 0$), del viento ($\tau_{sx} = \tau_{sy} = 0$)

y de las tensiones efectivas ($T_{xx} = T_{xy} = T_{yy} = 0$). No solo estos efectos son despreciables en muchas situaciones prácticas, sino que tampoco contribuyen a definir el aspecto dominante del fenómeno: su carácter ondulatorio. El sistema de Ecs. (1.3)-(1.5) puede simplificarse entonces a

$$(2.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial x}(h+z_0) + \frac{g}{c^2} \frac{u(u^2+v^2)^{1/2}}{h} = 0$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y}(h+z_0) + \frac{g}{c^2} \frac{v(u^2+v^2)^{1/2}}{h} = 0$$

donde se han utilizado las Ecs. (1.9)-(1.10). El sistema

de Ecs. (2.1)-(2.3) admite como solución un flujo uniforme caracterizado por $h = h_0 = \text{const.}$, $u = u_0 = \text{const.}$, $v = v_0 = \text{const.}$, siempre que se verifique que

$$(2.4) \quad -\frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{u_0 (u_0^2 + v_0^2)^{1/2}}{c^2 h_0}$$

$$(2.5) \quad -\frac{\partial z_0}{\partial y} = \frac{v_0 (u_0^2 + v_0^2)^{1/2}}{c^2 h_0}$$

es decir, que la pendiente del fondo sea constante. Suponiendo que éste es el caso, puede considerarse ahora la presencia de una pequeña perturbación superpuesta sobre ese flujo de base uniforme. Es decir, se puede tomar

$$(2.6) \quad h = h_0 + h_1$$

$$(2.7) \quad u = u_0 + u_1$$

$$(2.8) \quad v = v_0 + v_1$$

donde $|h_1| \ll |h_0|$; $|u_1|, |v_1| \ll (u_0^2 + v_0^2)^{1/2}$. Introduciendo las Ecs. (2.6)-(2.8) en las Ecs. (2.1)-(2.3.), y despreciando términos de orden superior al primero en las perturbaciones se obtiene

$$(2.9) \quad \frac{\partial h_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h_1}{\partial y} + h_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + R (\tau_1 u_1 + \tau_3 v_1 - u_0 \frac{h_1}{h_0}) = 0$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + g \frac{\partial h_1}{\partial y} + R (\tau_3 u_1 + \tau_2 v_1 - v_0 \frac{h_1}{h_0}) = 0$$

donde se han utilizado las Ecs. (2.4)-(2.5), se ha supuesto un coeficiente de Chezy constante, y

$$(2.12) \quad R = \frac{g}{c^2} \frac{(u_0^2 + v_0^2)^{1/2}}{h_0}$$

$$(2.13) \quad r_1 = 1 + \frac{u_0^2}{u_0^2 + v_0^2}$$

$$(2.14) \quad r_2 = 1 + \frac{v_0^2}{u_0^2 + v_0^2}$$

$$(2.15) \quad r_3 = \frac{u_0 v_0}{u_0^2 + v_0^2}$$

Las Ecs. (2.9)-(2.11) constituyen el punto de partida para el análisis del fenómeno ondulatorio en flujos cuasi-bidimensionales.

2.2.- Soluciones al Problema Lineal

Se considerarán ondas planas, caracterizadas por su frecuencia y la orientación de su dirección de propagación. Sea

$$(2.16) \quad h_1 = \xi e^{i(k_1 x + k_2 y + \beta t)}$$

$$(2.17) \quad u_1 = \eta e^{i(k_1 x + k_2 y + \beta t)}$$

$$(2.18) \quad v_1 = \zeta e^{i(k_1 x + k_2 y + \beta t)}$$

donde k_1 y k_2 son las componentes según x e y , respectivamente, del vector número de ondas; β es un "coeficiente de propagación", en general complejo, que engloba a la frecuencia angular de oscilación (su parte real) y al coeficiente de atenuación (su parte imaginaria);

ξ, η, ζ son las amplitudes complejas iniciales; i es el número imaginario que representa a $\sqrt{-1}$. La dirección de propagación queda caracterizada por el ángulo γ que forma el vector número de ondas con el eje x , definido por

$$(2.19) \quad \gamma = \arctg(k_2/k_1)$$

Introduciendo las Ecs. (2.16) en las (2.9)-(2.11) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial

$$(2.20) \quad \begin{bmatrix} \beta + k_1 u_0 + k_2 v_0 & k_1 h_0 & k_2 h_0 \\ k_1 g + iR \frac{u_0}{h_0} & \beta + k_1 u_0 + k_2 v_0 - iR r_1 & -iR r_3 \\ k_2 g + iR \frac{v_0}{h_0} & -iR r_3 & \beta + k_1 u_0 + k_2 v_0 - iR r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 0$$

Este es un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones algebraicas. Las soluciones no triviales son las que anulan el determinante de la matriz de coeficientes. Esto provee una ecuación compleja que, tras algunas transformaciones algebraicas, se escribe como

$$(2.21) \quad w^3 - i \frac{3}{\sigma F_0} w^2 - \left(1 + \frac{2}{\sigma^2 F_0^2} + i \frac{\cos \theta}{\sigma} \right) w - \left[\frac{\cos \theta}{\sigma} - i(1 + \sin^2 \theta) \right] \frac{1}{\sigma F_0} = 0$$

donde

$$(2.22) \quad w = \frac{\beta + k_1 u_0 + k_2 v_0}{k (gh_0)^{1/2}}$$

$$(2.23) \quad F_0 = \left(\frac{u_0^2 + v_0^2}{gh_0} \right)^{1/2}$$

$$(2.24) \quad \sigma = \frac{kh_0}{I_0}$$

$$(2.25) \quad k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$$

$$(2.26) \quad I_0 \equiv \left[\left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{u_0^2 + v_0^2}{c^2 h_0}$$

Nótese que F_0 es el número de Froude del flujo de base e I_0 la pendiente del fondo; el parámetro σ es un número de ondas adimensional. El ángulo $\theta = \Gamma - \gamma$, donde Γ es el ángulo entre la dirección de propagación del flujo y el eje x , es la dirección de la onda relativa a la del flujo, que es el único parámetro de orientación significativo físicamente.

Para dados valores de F_0 , σ y θ , la Ec. (2.21) provee tres soluciones para w , que corresponden a tres tipos distintos de ondas. Nótese que lo que se fija son las condiciones del flujo de base y la longitud de onda y orientación de la onda. Por otro lado, lo que se calcula son la frecuencia (ω , equivalentemente, la velocidad de fase) y el coeficiente de atenuación de cada una de las tres ondas posibles en esas condiciones. Pueden obtenerse soluciones explícitas de la Ec. (2.21) para dos casos particulares importantes. Cuando la onda se propaga paralelamente al flujo, es decir, cuando $\theta = 0$, la Ec. (2.21) se reduce a

$$(2.27) \quad \omega^3 - i \frac{3}{\sigma F_0} \omega^2 - \left(1 + \frac{2}{\sigma^2 F_0^2} + \frac{i}{\sigma} \right) \omega - \left(\frac{1}{\sigma} - i \right) \frac{1}{\sigma F_0} = 0$$

Es fácil verificar que

$$(2.28) \quad \omega_E = \frac{i}{\sigma F_0}$$

es solución de la Ec. (2.27). Factorizando el monomio $(\omega - \omega_E)$ en esta ecuación, se llega a

$$(2.29) \quad \omega^2 - i \frac{2}{\sigma F_0} \omega - \left(1 + \frac{i}{\sigma}\right) = 0$$

La Ec. (3.29) es la que se obtiene a partir de un análisis unidimensional (10). Sus soluciones

$$(2.30) \quad \omega_A = \frac{i}{\sigma F_0} - \left(1 + \frac{i}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2}$$

$$(2.31) \quad \omega_R = \frac{i}{\sigma F_0} + \left(1 + \frac{i}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2}$$

corresponden a las "clásicas" ondas de avance y de retroceso (respecto del flujo de base), respectivamente, en escurrimientos unidimensionales.

Por otro lado, cuando la onda se propaga normalmente al flujo ($\theta = \pi/2$), la Ec. (2.21) se simplifica a

$$(2.32) \quad \omega^3 - i \frac{3}{\sigma F_0} \omega^2 - \left(1 + \frac{2}{\sigma^2 F_0^2}\right) \omega + i \frac{2}{\sigma F_0} = 0$$

Una solución a la Ec. (2.32) es

$$(2.33) \quad \omega_E = i \frac{2}{\sigma F_0}$$

que reduce la Ec. (2.32) a

$$(2.34) \quad \omega^2 - \frac{i}{\sigma F_0} \omega - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$(2.35) \quad \omega_A = \frac{i}{2\sigma F_0} - \left(1 - \frac{1}{4\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2}$$

$$(2.36) \quad \omega_R = \frac{\dot{i}}{2SF_0} + \left(1 - \frac{1}{4S^2F_0^2}\right)^{1/2}$$

En la próxima sección se estudian las características de las soluciones obtenidas.

2.3.- Caracterización Cinemática de las Ondas

Escribiendo

$$(2.37) \quad \beta = -\omega + iA$$

donde ω es la frecuencia angular de oscilación y A un coeficiente de atenuación, se tiene que la fase de las ondas h_1, u_1, v_1 pueden expresarse, de acuerdo a las Ecs. (2.16)-

(2.18), como

$$(2.38) \quad \phi = k_1 x + k_2 y - \omega t + \text{const.}$$

Los planos de fase constante, es decir, los frentes de ondas, se propagan, entonces, con una velocidad cuyas componentes $c_1 = dx/dt$ y $c_2 = dy/dt$ están relacionadas con la frecuencia y el número de ondas por medio de la expresión

$$(2.39) \quad 0 = k_1 c_1 + k_2 c_2 - \omega$$

obtenida diferenciando la Ec. (2.38). Entonces, de las Ecs. (2.37) y (2.39) surge que

$$(2.40) \quad \beta + k_1 u_0 + k_2 v_0 = -[k_1(c_1 - u_0) + k_2(c_2 - v_0)] + iA$$

Pero el término entre corchetes en la Ec. (2.40) no es más que el producto escalar entre el vector número de ondas y la celeridad de la onda (es decir, la velocidad de la onda relativa al flujo). Como estos vectores son paralelos por definición, la Ec. (2.40) se reduce a

$$(2.41) \quad \beta + k_1 u_0 + k_2 v_0 = -k c_r + iA$$

donde $c_r = [(c_1 - u_0)^2 + (c_2 - v_0)^2]^{1/2}$. Introduciendo la Ec. (2.41) en la Ec. (2.22) se obtiene

$$(2.42) \quad W = \frac{-c_r + i \frac{A}{k}}{(g h_0)^{1/2}}$$

Ahora pueden empezarse a interpretar las soluciones obtenidas en la sección anterior. En el caso $\theta = 0$, la Ec. (2.28) corresponde a una onda con

$$(2.43) \quad c_r = 0$$

$$(2.44) \quad A = \frac{k (g h_0)^{1/2}}{S F_0}$$

La Ec. (2.43) muestra que la onda es estacionaria respecto del flujo (de allí el símbolo E para denotarla), es decir, se propaga con el fluido. Por su parte, de la Ec. (2.44) surge que la onda se atenúa, excepto cuando la longitud de onda es muy corta ($S \gg 1$). Las restantes soluciones, Ecs. (2.30) y (2.31), corresponden a ondas con celeridad no nula que pueden atenuarse o amplificarse [10]. En el caso límite de longitudes de onda cortas se obtiene, respectivamente, que $c_r \rightarrow \pm (g h_0)^{1/2}$ y $A \rightarrow 0$; es decir, que

la primera avanza (usando, entonces, el símbolo A) y la segunda retrocede (símbolo R) respecto del flujo con la conocida celeridad de las ondas gravitatorias largas, y ninguna de las dos se atenúa. En el caso límite opuesto de longitudes de onda largas ($\zeta \ll 1$), la onda de avance se propaga con la celeridad de la onda cinemática, $c_r = (u_s^2 + u_0^2)^{1/2} / 2$, y no se atenúa, mientras que la de retroceso tiende a estacionarse ($c_r \rightarrow 0$) y a atenuarse casi instantáneamente ($A \rightarrow \infty$).

En el caso $\theta = \pi/2$, la Ec. (2.33) corresponde a la onda estacionaria que, ahora, se atenúa con un coeficiente igual al doble del dado en la Ec. (2.44). La distinción entre onda de avance y de retroceso es ahora solo formal, ya que ambas se propagan normalmente al flujo. En rigor, las Ecs. (2.35) y (2.36) muestran que ellas se desplazan con celeridad $c_r = [(1 - 1/4\zeta^2 F_0^2)(gh_0)]^{1/2}$ en ambos sentidos solo para $\zeta > 1/2 F_0$. En este caso el coeficiente de atenuación para ambas ondas vale la mitad del valor dado en la Ec. (2.44). Nótese que $c_r \rightarrow (gh_0)^{1/2}$ y $A \rightarrow 0$ para $\zeta \rightarrow \infty$ (longitudes de onda muy cortas), lo mismo que para el caso $\theta = 0$. Para longitudes de onda menores que la "de corte", es decir, $\zeta < 1/2 F_0$, las ondas permanecen estacionarias ($c_r = 0$), pero se atenúan a ritmos distintos:

$$(2.45) \quad A = \frac{k(gh_0)^{1/2}}{2\zeta F_0} [1 \mp (1 - 4\zeta^2 F_0^2)^{1/2}]$$

En particular, para $\zeta \rightarrow 0$ la onda "de avance" no se atenúa, mientras que la "de retroceso" se atenúa casi instantáneamente.

2.4.- Estructura de las Ondas

Resulta sumamente interesante adentrarse en el análisis de la estructura de estas ondas, utilizando la información provista por las Ecs. (2.20). Si, sin pérdida alguna de generalidad, se toma $v_0 = 0$, estas ecuaciones pueden reescribirse, en forma adimensional, como

$$(2.46) \quad \omega \hat{\xi} + \cos\theta \hat{\eta} + \operatorname{sen}\theta \hat{\zeta} = 0$$

$$(2.47) \quad \left(\cos\theta + \frac{i}{\sigma}\right) \hat{\xi} + \left(\omega - i\frac{2}{\sigma F_0}\right) \hat{\eta} = 0$$

$$(2.48) \quad \operatorname{sen}\theta \hat{\xi} + \left(\omega - \frac{i}{\sigma F_0}\right) \hat{\zeta} = 0$$

donde $\hat{\xi} = \xi/h_0$, $\hat{\eta} = \eta/(gh_0)^{1/2}$, $\hat{\zeta} = \zeta/(gh_0)^{1/2}$. Téngase en cuenta que, para las soluciones no triviales, las Ecs. (2.46)-(2.48) forman un sistema linealmente dependiente. Más precisamente, una de las ecuaciones dará siempre información superflua. Esto significa que sólo podrán calcularse las relaciones entre las amplitudes complejas.

Se estudiará primero el caso $\theta = 0$. Reemplazando la Ec. (2.28) para la onda estacionaria en las Ecs. (2.46)-(2.48) se obtiene, respectivamente,

$$(2.49) \quad \frac{i}{\sigma F_0} \hat{\xi} + \hat{\eta} = 0$$

$$(2.50) \quad \left(1 + \frac{i}{\sigma}\right) \hat{\xi} - \frac{i}{\sigma F_0} \hat{\eta} = 0$$

$$(2.51) \quad 0 + 0 = 0$$

La Ec. (2.51) es, obviamente, superflua. Es fácil verificar que las Ecs. (2.49) y (2.50) son linealmente independientes. Entonces, la solución es $\hat{\xi} = \hat{\eta} = 0$, mientras que $\hat{\zeta}$ puede tomar valores arbitrarios (aunque pequeños). Esto significa que la única onda existente es η_1 , es decir, una oscilación transversal al flujo. Esta puede visualizarse en la Fig. 2.1 (a), donde se muestra un corte en bloque del escurrimiento, y se identifican "partículas" de fluido en forma de láminas perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (que coincide con la del flujo). Nótese que, para cada partícula, la perturbación en la velocidad es la misma a lo largo de toda su extensión. Es obvio que esta oscilación puede realizarse sin perturbar la altura de la partícula (es decir, con $\hat{\xi} = 0$), y que debe atenuarse por la acción de la fricción contra el fondo (nótese que se ha considerado como inexistente a la fricción entre partículas), solo contrarrestada por la inercia.

Las soluciones para las ondas de avance y de retroceso, Ecs. (2.30) y (2.31), cuando se reemplazan en las Ecs. (2.46)-(2.48), dan el siguiente sistema

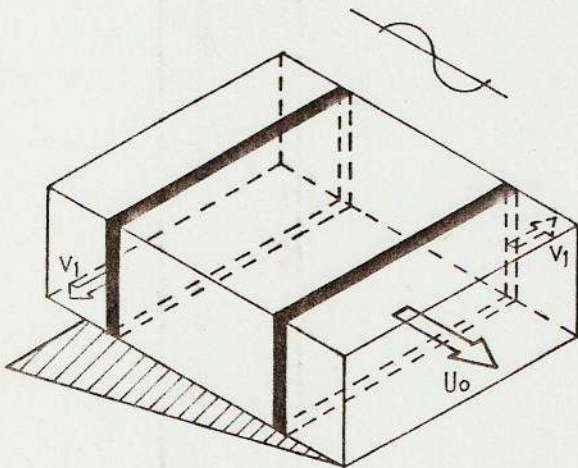
$$(2.52) \quad \left[\frac{i}{\sigma F_0} + \left(1 + \frac{i}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2} \right] \hat{\xi} + \hat{\eta} = 0$$

$$(2.53) \quad \left(1 + \frac{i}{\sigma}\right) \hat{\xi} - \left[\frac{i}{\sigma F_0} + \left(1 + \frac{i}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2} \right] \hat{\eta} = 0$$

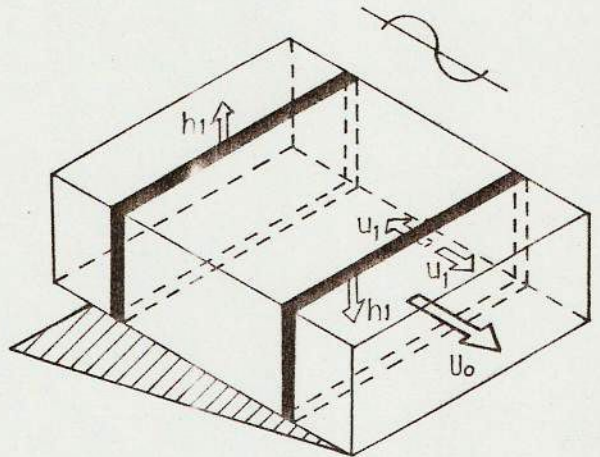
$$(2.54) \quad - \left[i \frac{2}{\sigma F_0} + \left(1 + \frac{i}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2} \right] \hat{\xi} = 0$$

La Ec. (2.54) muestra que $\hat{\xi} = 0$, es decir, no existe una oscilación transversal. Por otra parte, puede verificarse

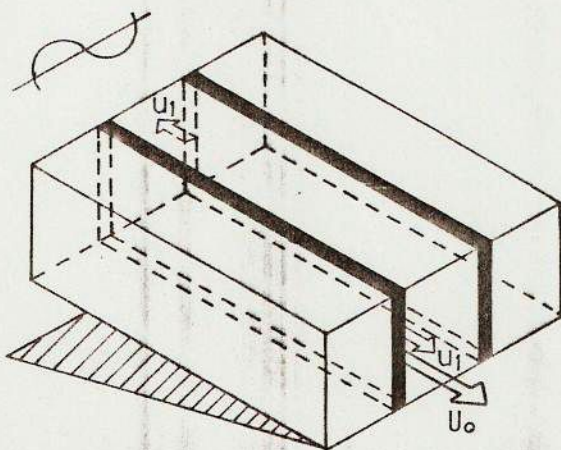
a) Onda estacionaria para $\theta = 0$



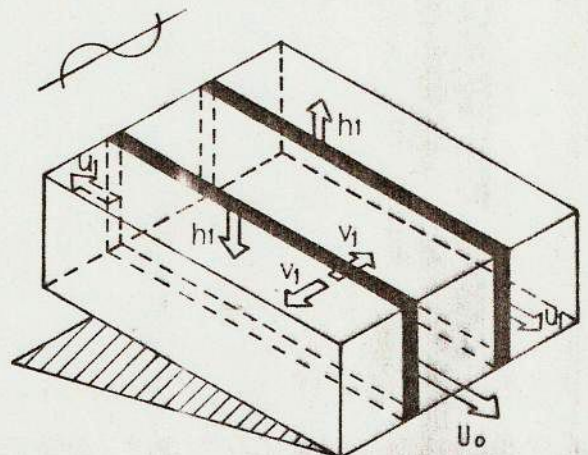
b) Ondas de avance y retroceso para $\theta = 0$



c) Onda estacionaria para $\theta = \pi/2$



d) Ondas de avance y retroceso para $\theta = \pi/2$



Estructura de las Ondas
en flujos cuasi-bidimensionales

Figura 2.1.

que las Ecs. (2.52) y (2.53) son linealmente dependientes; es decir, una de ellas es superflua. De la primera de ellas surge que

$$(2.55) \quad \Omega_1 \equiv \frac{\hat{\eta}}{\hat{\xi}} = -\frac{i}{\sigma F_0} \pm \left(1 + \frac{i}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2 F_0^2}\right)^{1/2}$$

Estas ondas están compuestas, entonces, por oscilaciones longitudinales de la velocidad, las cuales producen oscilaciones en la altura. Esto se ilustra en la Fig. 2.1.(b). Nótese que, ahora, la perturbación en la velocidad es distinta en ambas caras de cada partícula. Estas ondas están afectadas por todos los mecanismos dinámicos: inercia, gradiente de presiones, fricción y peso efectivo. Menéndez y Norscini [11] han realizado un análisis detallado de su estructura.

Es interesante observar que la onda estacionaria, por un lado, y las de avance y retroceso, por el otro, están totalmente desacopladas entre sí. En un análisis unidimensional aparecen, entonces, solo las dos últimas, ya que no se consideran oscilaciones transversales de la velocidad.

En el caso $\theta = \pi/2$, reemplazando la solución para la onda estacionaria, Ec. (2.33), en las Ecs. (2.46)-(2.48) se obtiene

$$(2.56) \quad i \frac{2}{\sigma F_0} \hat{\xi} + \hat{\xi} = 0$$

$$(2.57) \quad \frac{i}{\sigma} \hat{\xi} = 0$$

$$(2.58) \quad \hat{\xi} + \frac{i}{\sigma F_0} \hat{\xi} = 0$$

La Ec. (2.57) muestra que $\hat{\xi} = 0$. De cualquiera de las dos ecuaciones restantes surge, entonces, que $\hat{\zeta} = 0$. El valor de $\hat{\eta}$ es arbitrario. En la Fig. 2.1.(c) se ilustra, esquemáticamente, la situación. Como en el caso de la onda estacionaria para $\theta = 0$, cada partícula de fluido está afectada por una perturbación uniforme de la velocidad transversal a la dirección de propagación de la onda. Esto no puede producir una perturbación de la altura del elemento. También es claro que la fricción contrarresta la inercia, provocando la atenuación de la oscilación (el peso de la partícula está balanceado por la fuerza de fricción "principal", de acuerdo a la Ec. (2.26)).

Las soluciones para las ondas de avance y retroceso, Ecs. (2.35)-(2.36), reducen el sistema de Ecs. (2.46)-(2.48) a

$$(2.59) \quad \left[\frac{i}{2S F_0} \pm \left(1 - \frac{1}{4S^2 F_0^2} \right)^{1/2} \right] \hat{\xi} + \hat{\zeta} = 0$$

$$(2.60) \quad \frac{i}{S} \hat{\xi} - \left[i \frac{3}{2S F_0} \pm \left(1 - \frac{1}{4S^2 F_0^2} \right)^{1/2} \right] \hat{\eta} = 0$$

$$(2.61) \quad \hat{\xi} - \left[\frac{i}{2S F_0} \pm \left(1 - \frac{1}{4S^2 F_0^2} \right)^{1/2} \right] \hat{\zeta} = 0$$

Las Ecs. (2.59) y (2.61) son equivalentes. De la primera de ellas surge que

$$(2.62) \quad \Omega_2 \equiv \frac{\hat{\zeta}}{\hat{\xi}} = -\frac{i}{2S F_0} \pm \left(1 - \frac{1}{4S^2 F_0^2} \right)^{1/2}$$

Por su parte, de la Ec. (2.60) se obtiene

$$(2.63) \quad \Omega_1 = \left[\frac{3}{2F_0} \mp i\sqrt{1 - \frac{1}{4S^2F_0^2}} \right]^{-1}$$

Las Ecs. (2.62) y (2.63) muestran que estas ondas están compuestas por los tres tipos de oscilaciones. El proceso se ilustra en la Fig. 2.1.(d). La oscilación longitudinal ψ_1 produce una perturbación h_1 en la altura de la partícula, la cual, a su vez, provoca una oscilación transversal u_1 . En este complicado movimiento intervienen todos los mecanismos dinámicos.

CAPITULO 3

METODO NUMERICO

3.1.- Antecedentes

El antecedente clásico sobre métodos numéricos para resolver las ecuaciones para flujo cuasi-bidimensional es el trabajo de Leendertse [12]. En este estudio no se consideran las tensiones efectivas; se lo ilustra con resultados del cálculo de mareas. El procedimiento computacional está basado en un método de direcciones alternadas; en cada dirección resulta un sistema de tres ecuaciones algebraicas lineales, dos implícitas, acopladas entre sí y con una estructura tridiagonal, y la restante explícita y desacoplada de las anteriores. Este método numérico fue luego utilizado por Vreugdenhil y Wijnbenga [13] para calcular escurrimientos permanentes en ríos; en este caso, el procedimiento sirve como técnica de relajación. En este problema es necesario introducir a las tensiones turbulentas; Vreugdenhil y Wijnbenga usaron un valor constante de la viscosidad de torbellino, criticado luego por Booij [14] como irrealmente grande. En realidad, tal cual fue expresado por Ponce y Yabusaki [15] sucede que el esquema de Leendertse presenta dos tipos de inestabilidades: lineal (o de Courant) y no lineal. La primera introduce limitaciones sobre la elección de paso temporal. Ambas inestabilidades pueden ser, en general, controladas aumentando suficientemente la viscosidad de torbellino. Claro que ésto puede llegar a provocar variaciones significativas en la estructura del flujo. Ponce y Yabusaki estaban interesados en calcular corrientes de recirculación, para lo cual es necesario considerar a las tensiones efectivas.

Modelaron a estas tensiones efectivas mediante un procedimiento de promediación de velocidades que, efectivamente, produce difusión.

Gustafsson [16] propuso, para el problema sin tensiones efectivas, un método implícito de direcciones alternadas que resulta incondicionalmente estable desde el punto de vista lineal. La resolución del sistema algebraico no lineal resultante se lleva a cabo por un método de Newton modificado.

Un procedimiento numérico radicalmente distinto a los anteriores fue utilizado por Benqué et al. [17] para el problema de cálculo de mareas con tensiones turbulentas incluídas. El método consiste en una técnica de desdoblamiento en tres pasos; en el primer paso solo se trata la convección, en el segundo la difusión, y en el tercero los mecanismos restantes. El desarrollo de este método parte de la crítica de los autores al método de direcciones alternadas aplicado a este problema, ya que este último produce oscilaciones parásitas y atenuación numérica artificial debido, aparentemente, al tratamiento inadecuado de los términos convectivos, y una pobre reproducción de las características de propagación de las ondas cuando se utilizan pasos temporales grandes. Más aún, el método de direcciones alternadas también presenta dificultades en la aplicación correcta de la condición de impenetrabilidad en contornos rígidos [18].

Cuando existe la posibilidad de formación de frentes de onda abruptos se requiere un tratamiento especial de las ecuaciones. Menéndez [19] propuso un método explícito basado en el esquema de Lax-Wendroff-Richtmyer, pero agregando un paso de promediación para filtrar las longitudes de onda más cortas, que son espúrias. García [20] también utilizó un método explícito: el denominado esquema de Mac Cormack.

Un esquema implícito en elementos finitos, que es una variante de la formulación de Galerkin, fue propuesto por Katopodes [21] . Este método tiene la ventaja de disipar selectivamente ciertas longitudes de ondas.

Un modelo de turbulencia más elaborado que el clásico de especificar la viscosidad de torbellino, fue utilizado por Mc Guirk y Rodi [22] para simular corrientes permanentes recirculantes. No obstante, se supone que las variaciones de profundidad son pequeñas ("aproximación de la tapa rígida") por lo que las ecuaciones resultantes son formalmente análogas a las de flujos "elípticos" bidimensionales, y se resuelven en consecuencia, por el método numérico de Patankar y Spalding [23] .

Aunque desarrollado para las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones, es interesante destacar el tratamiento de Findikakis y Street [24, 25] . Se descomponen las escalas de movimiento entre largas y de subgrilla. De la interacción entre ambas surgen términos adicionales en las ecuaciones, además de la contribución propia de las escalas de subgrilla que se modela por medio de una viscosidad de torbellino. Las ecuaciones son resueltas por el método de los elementos finitos. El método permite resolver escalas del movimiento turbulento, pudiéndose entonces calcular su espectro de energía.

3.2.- Formulación

La variedad de tratamientos desarrollados para resolver numéricamente las ecuaciones para flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre, pone de manifiesto el hecho de que

diferentes esquemas numéricos pueden resultar adecuados para diferentes problemas físicos. En problemas fluviales, por ejemplo, el flujo está dominado generalmente por el equilibrio entre el peso efectivo y la fricción contra el fondo, resultando pequeña la contribución de la inercia, especialmente a bajos números de Froude. En consecuencia, no parece crítica la discretización de los términos convectivos, con tal que no produzcan inestabilidades. En problemas marítimos (costeros), en cambio, la inercia y el gradiente de presiones pueden dominar el flujo, por lo cual puede resultar crucial una adecuada discretización de los términos convectivos.

El presente método numérico ha sido desarrollado, en principio, para ser aplicado a problemas fluviales. El "clásico" esquema de Leendertse no resulta adecuado, ya que presenta inestabilidades lineales que limitan innecesariamente el paso temporal de discretización. El método propuesto parte de la forma "no conservativa" del sistema de Ecs. (1.3.)-(1.5.)

$$(3.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial x} (h + z_0) + \\ + g n^2 \frac{u (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} - \nu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y} (h + z_0) + \\ + g n^2 \frac{v (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} - \nu_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$$

donde se han utilizado las Ecs. (1.9)-(1.12), se ha expresado el coeficiente de Chezy en términos del de Manning ($C = h^{1/6} / n$), y se han despreciado la aceleración de Coriolis ($f = 0$) y las tensiones convectivas. Como, en general, es conveniente trabajar con variables adimensionales, se introducen las

cantidades U_0 , h_0 y L como escalas de la velocidad, la profundidad y la distancia en el plano del escurrimiento, respectivamente. Se definen, entonces

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{h} = \frac{h}{h_0} \quad , \quad \tilde{z}_0 = \frac{z_0}{h_0} \\ \tilde{u} = \frac{u}{U_0} \quad , \quad \tilde{v} = \frac{v}{U_0} \\ \tilde{x} = \frac{x}{L} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{L} \\ \tilde{t} = \frac{U_0 t}{L} \end{array} \right.$$

Introduciendo las Ecs. (3.4) en las (3.1)-(3.3) y suprimiendo, por simplicidad, el símbolo \sim , se obtiene

$$(3.5) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial x} (h + z_0) + \frac{D}{E} \frac{u(u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial y} (h + z_0) + \frac{D}{E} \frac{v(u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$$

donde

$$(3.8) \quad F = \frac{U_0}{(gh_0)^{1/2}}$$

$$(3.9) \quad D = \frac{gn^2}{h_0^{1/3}}$$

$$(3.10) \quad E = \frac{h_0}{L}$$

$$(3.11) \quad R = \frac{U_0 L}{\nu_t}$$

La Fig. 3.1. muestra la malla de discretización adoptada. Nótese que las variables dependientes h , u y v se centran en puntos distintos de la malla; ésto resulta conveniente para aplicar las condiciones de contorno, tal cual se verá luego. Las Ecs. (3.5)-(3.7) han sido discretizadas de acuerdo a un esquema fuertemente implícito de direcciones alternadas. Para el cálculo en la dirección x se tiene que

$$(3.12) \quad \frac{h_{ij}^{n+1/2} - h_{ij}^n}{\Delta t/2} + \left[u \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{ij}^{n+1/2} + \left[v \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{ij}^n + h_{ij}^n \left(\frac{u_{i+1/2j}^{n+1/2} - u_{i-1/2j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{v_{ij+1/2}^n - v_{ij-1/2}^n}{\Delta y} \right) = 0$$

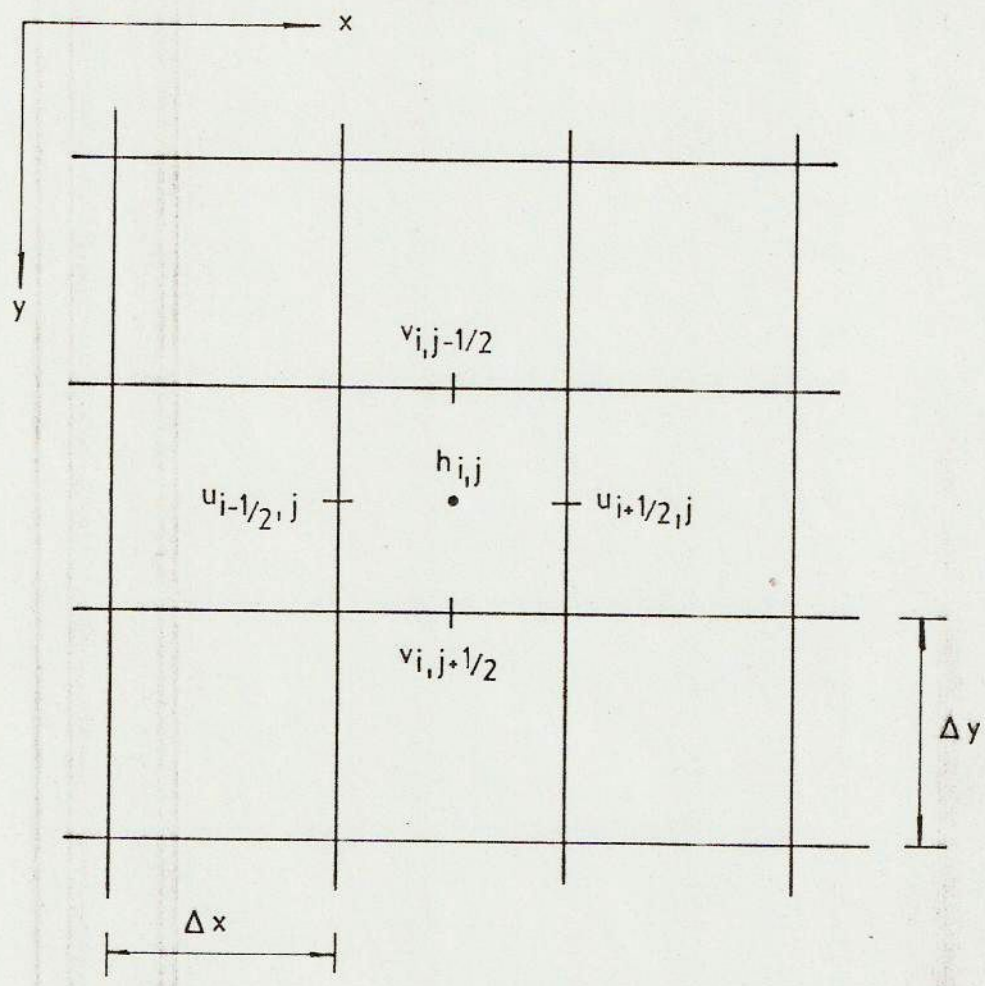
$$(3.13) \quad \frac{u_{i+1/2j}^{n+1/2} - u_{i+1/2j}^n}{\Delta t/2} + \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2j}^{n+1/2} + \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i+1/2j}^n + \frac{1}{F^2} \frac{h_{i+1/2j}^{n+1/2} + (z_0)_{i+1/2j} - h_{ij}^{n+1/2} - (z_0)_{ij}}{\Delta x} + \frac{D}{E} \frac{u_{i+1/2j}^{n+1/2} (u_{i+1/2j}^n + v_{i+1/2j}^n)^{1/2}}{(h_{i+1/2j}^n)^{4/3}} - \frac{1}{R} \left(\frac{u_{i+3/2j}^{n+1/2} - 2u_{i+1/2j}^{n+1/2} + u_{i-1/2j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2j+1}^n - 2u_{i+1/2j}^n + u_{i+1/2j-1}^n}{\Delta y^2} \right) = 0$$

$$(3.14) \quad \frac{v_{ij+1/2}^{n+1/2} - v_{ij+1/2}^n}{\Delta t/2} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{ij+1/2}^{n+1/2} + \left[v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{ij+1/2}^n + \frac{1}{F^2} \frac{h_{ij+1}^n + (z_0)_{ij+1} - h_{ij}^n - (z_0)_{ij}}{\Delta y} + \frac{D}{E} \frac{v_{ij+1/2}^{n+1/2} (u_{ij+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)^{1/2}}{(h_{ij+1/2}^n)^{4/3}} - \frac{1}{R} \left(\frac{v_{i+1j+1/2}^{n+1/2} - 2v_{ij+1/2}^{n+1/2} + v_{i-1j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+3/2}^n - 2v_{ij+1/2}^n + v_{ij-1/2}^n}{\Delta y^2} \right) = 0$$

donde

$$(3.15) \quad \left[u \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{ij}^{n+1/2} = \begin{cases} u_{i-1/2j}^n \left(\frac{h_{ij}^{n+1/2} - h_{i-1j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) & \text{si } u_{i-1/2j}^n, u_{i+1/2j}^n > 0 \\ u_{i+1/2j}^n \left(\frac{h_{i+1j}^{n+1/2} - h_{ij}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) & \text{si } u_{i-1/2j}^n, u_{i+1/2j}^n < 0 \\ u_{ij}^n \left(\frac{h_{i+1j}^{n+1/2} - h_{i-1j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right) & \text{si } u_{i-1/2j}^n \times u_{i+1/2j}^n \leq 0 \end{cases}$$

$$(3.16) \quad \left[v \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{ij}^n = \begin{cases} v_{ij-1/2}^n \left(\frac{h_{ij}^n - h_{ij-1}^n}{\Delta y} \right) & \text{si } v_{ij-1/2}^n, v_{ij+1/2}^n > 0 \\ v_{ij+1/2}^n \left(\frac{h_{ij+1}^n - h_{ij}^n}{\Delta y} \right) & \text{si } v_{ij-1/2}^n, v_{ij+1/2}^n < 0 \\ v_{ij}^n \left(\frac{h_{ij+1}^n - h_{ij-1}^n}{2\Delta y} \right) & \text{si } v_{ij-1/2}^n \times v_{ij+1/2}^n \leq 0 \end{cases}$$



MALLA DE DISCRETIZACION

FIGURA N° 3.1

$$(3.17) \quad \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} u_{i+1/2}^n \left(\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) & \text{si } u_{i+1/2}^n \geq 0 \\ u_{i+1/2}^n \left(\frac{u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) & \text{si } u_{i+1/2}^n < 0 \end{cases}$$

$$(3.18) \quad \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i+1/2}^n = \begin{cases} v_{i+1/2}^{n-1/2} \left(\frac{u_{i+1/2}^n - u_{i+1/2}^{n-1}}{\Delta y} \right) & \text{si } v_{i+1/2}^{n-1/2}, v_{i+1/2}^{n+1/2} > 0 \\ v_{i+1/2}^{n+1/2} \left(\frac{u_{i+1/2}^n - u_{i+1/2}^{n-1}}{\Delta y} \right) & \text{si } v_{i+1/2}^{n-1/2}, v_{i+1/2}^{n+1/2} < 0 \\ v_{i+1/2}^n \left(\frac{u_{i+1/2}^n - u_{i+1/2}^{n-1}}{2 \Delta y} \right) & \text{si } v_{i+1/2}^{n-1/2} \times v_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0 \end{cases}$$

Los términos entre corchetes en la Ec. (3.14) se tratan similarmente a los presentados en las Ecs. (3.17) y (3.18). Cuando las variables aparecen centradas en puntos donde no están definidas, debe tomarse el promedio aritmético entre los valores más cercanos; por ejemplo,

$$(3.19) \quad v_{i+1/2}^n = \frac{1}{4} (v_{ij+1/2}^n + v_{ij-1/2}^n + v_{i+1/2j+1/2}^n + v_{i+1/2j-1/2}^n)$$

$$(3.20) \quad v_{i+1/2j-1/2}^n = \frac{1}{2} (v_{ij-1/2}^n + v_{i+1/2j-1/2}^n)$$

Como es usual, el supraíndice indica el paso temporal de cálculo. Suponiendo conocidas las condiciones en el paso n (eventualmente dadas como condiciones iniciales), las variables en el paso $n + 1/2$ están relacionadas, de acuerdo a las Ecs. (3.12)-(3.14), por expresiones de la forma

$$(3.21) \quad a_{ij}^{11} h_{i-1j}^{n+1/2} + a_{ij}^{12} u_{i-1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{13} h_{ij}^{n+1/2} + a_{ij}^{14} u_{i+1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{15} h_{i+1j}^{n+1/2} = b_{ij}^1$$

$$(3.22) \quad a_{ij}^{21} u_{i-1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{22} h_{ij}^{n+1/2} + a_{ij}^{23} u_{i+1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{24} h_{i+1j}^{n+1/2} + a_{ij}^{25} u_{i+3/2j}^{n+1/2} = b_{ij}^2$$

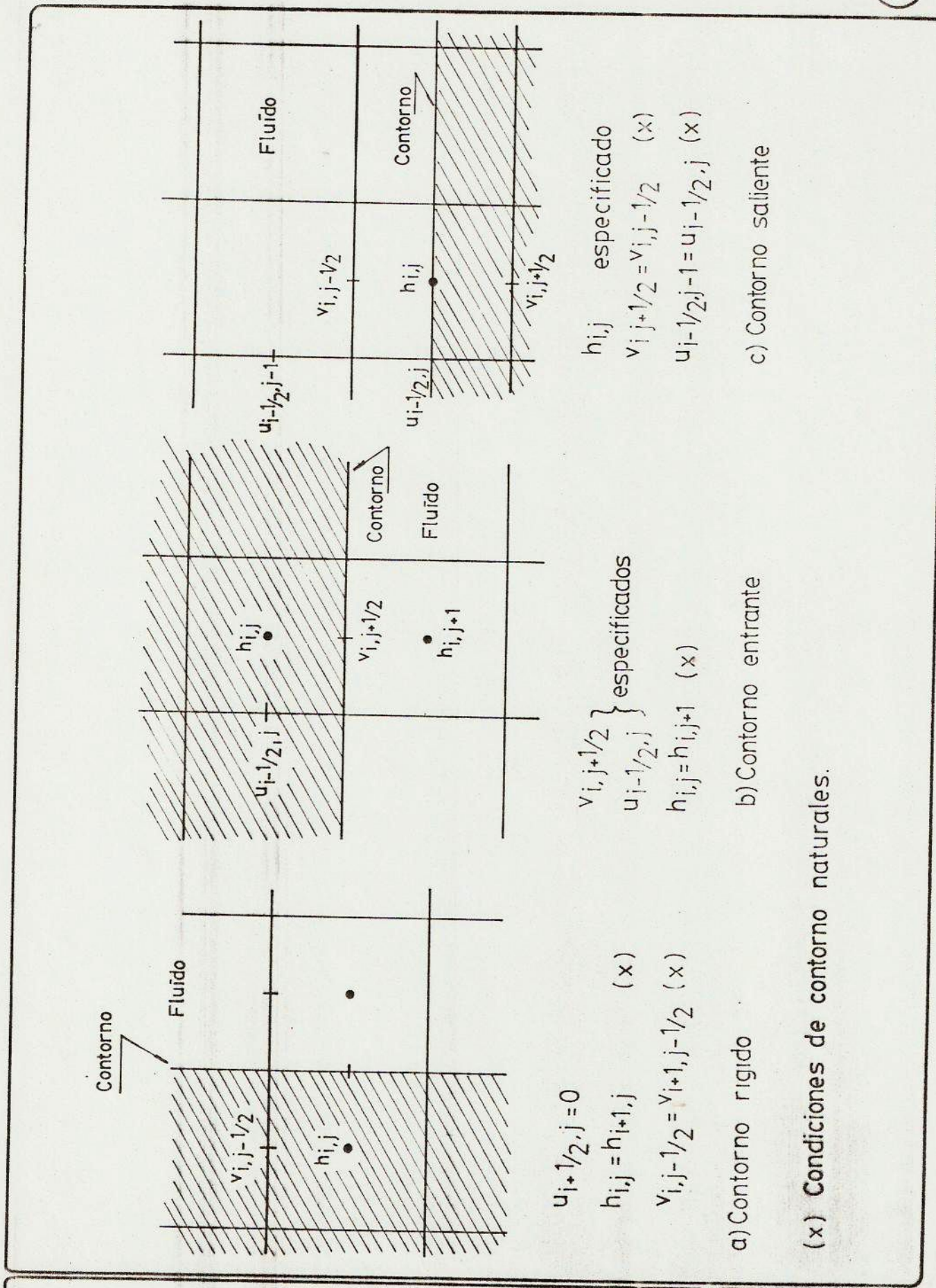
$$(3.23) \quad a_{ij}^{31} v_{i-j+1/2}^{n+1/2} + a_{ij}^{32} v_{ij+1/2}^{n+1/2} + a_{ij}^{33} v_{i+1/2j+1/2}^{n+1/2} = b_{ij}^3$$

donde los coeficientes a_{ij}^{kl} y b_{ij}^k son conocidos. Se observa que, habiendo tomado como implícitas a las derivadas en la dirección x , las variables aparecen acopladas en esa dirección. En consecuencia, el sistema de ecuaciones puede resolverse "fila por fila", incorporando eventualmente las condiciones de contorno (ver más abajo). Nótese, además, que las Ecs. (3.21) y (3.22) están acopladas entre sí, pero desacopladas de la Ec. (3.23). Las primeras forman un sistema de ecuaciones algebraicas lineales del tipo tridiagonal en bloques, que puede ser resuelto eficientemente por el algoritmo de doble barrido [26] . La Ec. (3.23), por su parte, da lugar a un sistema tridiagonal, que se resuelve por el eficiente algoritmo tridiagonal [26] .

Las ecuaciones para el cálculo en la dirección y son formalmente análogas a las Ecs. (3.12)-(3.14), si se invierten los roles de u y v , y de x e y , y se avanza el paso temporal en otra media unidad ($n \rightarrow n + 1/2$).

En el presente método los contornos se representan por líneas (eventualmente quebradas) que coinciden con la malla de discretización. En consecuencia, los contornos son localmente paralelos a los ejes x o y . La implementación rigurosa de las condiciones de contorno no es una tarea sencilla (ver Ref. [19]), especialmente cuando el método de cálculo es implícito. En el presente método se han implementado solamente condiciones de borde simplificadas para el caso de régimen subcrítico. Ellas se ilustran en la Fig. 3.2. Las expresiones marcadas con un asterisco son restricciones relativamente "débiles" que suplantán a lo que, estrictamente, debería ser un cálculo; pueden denominarse, genéricamente, condiciones de contorno "naturales" y son de la forma $\partial/\partial n = 0$ donde n indica aquí la dirección normal al contorno.

El esquema de Leendertse conduce a expresiones simi-



IMPLEMENTACION DE CONDICIONES DE CONTORNO

FIGURA N° 3.2

lares a las Ecs. (3.21)-(3.23), pero con $a_{ij}^{11} = a_{ij}^{15} = a_{ij}^{21} = a_{ij}^{25} = a_{ij}^{31} = a_{ij}^{33} = 0$. En consecuencia, las dos primeras expresiones constituyen parte de un sistema tridiagonal, mientras que la última provee un cálculo explícito.

3.3.- Difusión Numérica

El efecto más crítico de la discretización de los términos convectivos es la aparición de difusión numérica. Esta surge como resultado del error de truncamiento. En efecto, conteniendo los términos convectivos derivadas de primer orden, su error de truncamiento contiene términos con derivadas de segundo orden, algunos de los cuales producen difusión. La intensidad de la difusión depende de los intervalos de discretización espacial y/o temporal.

La técnica de obtener, a partir del error de truncamiento, la difusión efectiva provocada por el esquema numérico fue desarrollada por Hirt[27]. Los términos de difusión numérica que surgen de las Ecs. (3.12) a (3.14) son, respectivamente, los siguientes

$$(3.24) \quad -\frac{|u|}{2} (\Delta x + |u| \Delta t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{|v|}{2} (\Delta y - |v| \Delta t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$(3.25) \quad -\frac{|u|}{2} (\Delta x + \frac{|u|}{2} \Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{|v|}{2} (\Delta y - \frac{|v|}{2} \Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(3.26) \quad -\frac{|u|}{2} (\Delta x + \frac{|u|}{2} \Delta t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{|v|}{2} (\Delta y - \frac{|v|}{2} \Delta t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Las Ecs. (3.24)-(3.26) muestran que el paso de cálculo en la dirección x introduce una "viscosidad numérica" positiva

en esa dirección, pero solo condicionalmente positiva en la dirección y. Por ejemplo, para la ecuación de continuidad, Ec. (3.12), la Ec. (3.24) muestra que los coeficientes de viscosidad numérica en las direcciones x e y son, respectivamente,

$$(3.27) \quad \nu_x^{c1} = (\Delta x + |u| \Delta t) \frac{|u|}{2}$$

$$(3.28) \quad \nu_y^{c1} = (\Delta y - |v| \Delta t) \frac{|v|}{2}$$

Si bien ν_x^{c1} es siempre positivo, ν_y^{c1} es positivo solo si $\Delta t < \Delta y / |v|$; en caso contrario se produce una "difusión negativa" que, en principio, atenta contra la estabilidad del método. Sin embargo, hay una compensación en el paso de cálculo en la dirección y; por ejemplo, las viscosidades numéricas resultantes para la ecuación de continuidad son

$$(3.29) \quad \nu_x^{c2} = (\Delta x - |u| \Delta t) \frac{|u|}{2}$$

$$(3.30) \quad \nu_y^{c2} = (\Delta y + |v| \Delta t) \frac{|v|}{2}$$

En consecuencia, los coeficientes de viscosidad numérica efectiva después de un paso completo de cálculo (es decir, para pasar de h_{ij}^n a h_{ij}^{n+1}) son

$$(3.31) \quad \nu_x^c = \frac{1}{2} (\nu_x^{c1} + \nu_x^{c2}) = \Delta x \frac{|u|}{2}$$

$$(3.32) \quad \nu_y^c = \frac{1}{2} (\nu_y^{c1} + \nu_y^{c2}) = \Delta y \frac{|v|}{2}$$

que son siempre positivos. Resultados similares valen para las Ecs. (3.13)-(3.14). Esto muestra que el esquema numérico es difusivo, y que la difusión numérica es independiente del paso temporal . De todos modos, parece prudente evitar el uso de pasos temporales demasiado grandes con relación a $\frac{\Delta x}{|u|}$ y $\frac{\Delta y}{|v|}$ para que los procesos sucesivos de difusión y "contradifusión" no sean tan intensos que produzcan una pérdida de precisión e, incluso, de información.

Es interesante apuntar que el esquema numérico de Leendertse produce un coeficiente de viscosidad efectiva negativo y proporcional a $u^2 \Delta t$. En consecuencia, cuando la magnitud de la velocidad y/o el paso temporal son "grandes" es necesario compensar esta contradifusión numérica aumentando adecuadamente la difusión física.

El error de truncamiento también produce cambios en la velocidad efectiva de convección y la aparición de términos fuente. No obstante, estos efectos son, en general, menos significativos.

3. 4.- Análisis Lineal

El tratamiento de Hirt pone de manifiesto las características difusivas del método numérico. Más sistematizado [28] , provee también información sobre las características dispersivas del esquema. No obstante, sus conclusiones son válidas, estrictamente, para oscilaciones de longitud de onda relativamente larga, dado que se desprecian derivadas espaciales de orden superior.

Un tratamiento alternativo es el análisis de estabilidad lineal, introducido en el cálculo numérico por Von Neumann, y potenciado luego por Leendertse [12] con la

introducción del concepto de factor de propagación, que apunta más al estudio de la precisión del esquema numérico. El análisis lineal permite el estudio de oscilaciones de longitud de onda arbitraria. No obstante, está limitado a amplitudes de oscilación pequeñas, al contrario del método de Hirt.

Para utilizar el análisis lineal es necesario partir de expresiones linealizadas. Se considerarán las Ecs. (2.9)-(2.11), pero, por simplicidad, se tomará $R = 0$ (es decir, se despreciará el efecto de la fricción y el peso). La discretización de estas ecuaciones de acuerdo al esquema numérico adoptado conduce a

$$(3.33) \quad \frac{h_{ij}^{n+1/2} - h_{ij}^n}{\Delta t/2} + u_0 \left(\frac{h_{ij}^{n+1/2} - h_{i-1j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) + v_0 \left(\frac{h_{ij}^n - h_{ij-1}^n}{\Delta y} \right) + h_0 \left(\frac{u_{i+1/2j}^{n+1/2} - u_{i-1/2j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{v_{ij+1/2}^n - v_{ij-1/2}^n}{\Delta y} \right) = 0$$

$$(3.34) \quad \frac{u_{i+1/2j}^{n+1/2} - u_{i+1/2j}^n}{\Delta t/2} + u_0 \left(\frac{u_{i+1/2j}^{n+1/2} - u_{i-1/2j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) + v_0 \left(\frac{u_{i+1/2j}^n - u_{i+1/2j-1}^n}{\Delta y} \right) + g \left(\frac{h_{i+1/2j}^{n+1/2} - h_{ij}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) = 0$$

$$(3.35) \quad \frac{v_{ij+1/2}^{n+1/2} - v_{ij+1/2}^n}{\Delta t/2} + u_0 \left(\frac{v_{ij+1/2}^{n+1/2} - v_{i-1j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) + v_0 \left(\frac{v_{ij+1/2}^n - v_{ij-1/2}^n}{\Delta y} \right) + g \left(\frac{h_{ij+1}^n - h_{ij}^n}{\Delta y} \right) = 0$$

para el paso de cálculo según x . Se considerarán, ahora, soluciones del tipo de onda plana, es decir

$$(3.36) \quad h_{ij}^n = \xi e^{i(k_1 i \Delta x + k_2 j \Delta y + \tilde{\omega} n \Delta t)}$$

$$(3.37) \quad u_{i+1/2, j}^n = \eta e^{i[k_1(i+1/2)\Delta x + k_2 j \Delta y + \tilde{\beta} n \Delta t]}$$

$$(3.38) \quad v_{i, j+1/2}^n = \zeta e^{i[k_1 i \Delta x + k_2(j+1/2)\Delta y + \tilde{\beta} n \Delta t]}$$

(no confundir el número imaginario i con el índice homónimo).
 Nótese que las Ecs. (3.36)-(3.38) son análogas a las Ecs. (2.16)-(2.18); se ha tenido en cuenta, sin embargo, la posibilidad de que el coeficiente de propagación β sea distinto en ambos casos para los mismos valores de las componentes del número de ondas k_1 y k_2 . Introduciendo las Ecs. (3.36)-(3.38) en las Ecs. (3.33)-(3.35) se obtiene

$$(3.39) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F} & i c_H \Omega \operatorname{sen} \theta_1 & i \frac{c_H}{r} \operatorname{sen} \theta_2 \\ i c_H \Omega \operatorname{sen} \theta_1 & \mathcal{F} & 0 \\ i \frac{c_H}{r} \operatorname{sen} \theta_2 & 0 & \mathcal{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$(3.40) \quad \mathcal{F} = \Omega - 1 + i c_H F_0 \left(\Omega \cos I \operatorname{sen} \theta_1 e^{-i\theta_1} + \frac{\operatorname{sen} I \operatorname{sen} \theta_2}{r} e^{-i\theta_2} \right)$$

$$(3.41) \quad \Omega = e^{i\tilde{\beta} \Delta t / 2}$$

$$(3.42) \quad c_H = \frac{\Delta t}{\Delta x} (g h_0)^{1/2}$$

$$(3.43) \quad r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(3.44) \quad I = \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0}{u_0} \right)$$

$$(3.45) \quad \theta_1 = \frac{k_1 \Delta x}{2}$$

$$(3.46) \quad \theta_2 = \frac{k_2 \Delta y}{2}$$

(i es aquí el número imaginario). Imponiendo que la matriz de coeficientes de la Ec. (3.39) sea singular (para obtener las soluciones no triviales), se llega a

$$(3.47) \quad \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^2 + C_H^2 \left(\Omega^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_2}{r^2} \right) \right] = 0$$

de donde pueden calcularse directamente las tres soluciones para Ω , para un dado número de Froude (F_0) y orientación (Γ) del flujo de base, una dada relación de ancho de grilla (r), un dado número de Courant (C_H) y una dada longitud de onda y orientación (θ_1 y θ_2) de la oscilación. La oscilación puede caracterizarse en términos de dos parámetros algo más adecuados que θ_1 y θ_2 . Por un lado, puede utilizarse el ángulo de orientación γ , definido por la Ec. (2.19); por el otro, puede introducirse el número de puntos computacionales por longitud de onda en la dirección x , definido como

$$(3.48) \quad N \equiv \frac{2\pi}{k \Delta x} = \frac{\pi}{\theta_1} \cos \gamma = \frac{\pi r}{\theta_2} \sin \gamma$$

donde $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ es la magnitud del vector número de ondas. Las soluciones para Ω pueden expresarse, entonces, como

$$(3.49) \quad \Omega_1 = \frac{1 - i \frac{C_H F_0}{r} \sin \Gamma \sin \left(\frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right)}{1 + i \frac{C_H F_0}{r} \cos \Gamma \sin \left(\frac{\pi}{N} \cos \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{N} \cos \gamma \right)}$$

$$(3.50) \quad \Omega_{2,3} = \frac{B_2 \pm (B_2^2 - B_1 B_3)^{1/2}}{B_1}$$

donde

$$(3.51) \quad B_1 = \left[1 + i C_H F_0 \cos I' \sin \left(\frac{\pi}{N} \cos \delta \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{N} \cos \delta \right) \right]^2 + C_H^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{N} \cos \delta \right)$$

$$(3.52) \quad B_2 = \left[1 + i C_H F_0 \cos I' \sin \left(\frac{\pi}{N} \cos \delta \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{N} \cos \delta \right) \right] \times \\ \times \left[1 - i \frac{C_H F_0}{r} \sin I' \sin \left(\frac{\pi r}{N} \sin \delta \right) \exp \left(-i \frac{\pi r}{N} \sin \delta \right) \right]$$

$$(3.53) \quad B_3 = \left[1 - i \frac{C_H F_0}{r} \sin I' \sin \left(\frac{\pi r}{N} \sin \delta \right) \exp \left(-i \frac{\pi r}{N} \sin \delta \right) \right]^2 + \\ + \frac{C_H^2}{r^2} \sin^2 \left(\frac{\pi r}{N} \sin \delta \right)$$

Una vez calculado Ω , el factor de propagación se obtiene, de acuerdo a la Ec. (3.41), como

$$(3.54) \quad \tilde{\beta} = -i \frac{2}{\Delta t} \ln \Omega$$

o, descomponiéndolo en partes real e imaginaria $\tilde{\beta} = -\tilde{\omega} + i\tilde{A}$,

$$(3.55) \quad \tilde{\omega} = -\frac{2}{\Delta t} \arg \Omega$$

$$(3.56) \quad \tilde{A} = -\frac{2}{\Delta t} \ln |\Omega|$$

Es importante identificar a qué tipo de onda (de avance, de retroceso o estacionaria) corresponde cada una de las soluciones numéricas. Para ello basta con considerar un caso límite particular. Sean $I' = \delta = 0$, y tómesese $N \rightarrow \infty$. Es de esperarse que, en esta situación, las soluciones numéricas tiendan a las correspondientes soluciones analíticas (ver Cap. 2), ya que las ondas se representan con una gran densidad de puntos por longitud de onda. Las expresiones asintóticas de las Ecs. (3.49) y (3.50) son

$$(3.57) \quad \Omega_1 \approx 1 - i C_H F_0 \frac{\pi}{N}$$

$$(3.58) \quad \Omega_{2,3} \approx 1 - i c_H (F_0 \pm 1) \frac{\pi}{N}$$

De acuerdo, entonces, a las Ecs. (3.55) y (3.56), las Ecs. (3.57) y (3.58) corresponden a ondas neutras ($\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = \tilde{A}_3 = 0$) que viajan con las siguientes velocidades de fase

$$(3.59) \quad \frac{\tilde{\omega}_1}{k} = u_0$$

$$(3.60) \quad \frac{\tilde{\omega}_{2,3}}{k} = u_0 \pm (g h_0)^{1/2}$$

Estos resultados muestran que Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 corresponden, respectivamente, a las ondas estacionaria, de avance y de retroceso. Los resultados para el paso de cálculo según y pueden obtenerse fácilmente a partir de los anteriores, si se intercambian los roles de x e y , u y v y los de I' y γ con sus complementarios ($\pi/2 - I'$ y $\pi/2 - \gamma$, respectivamente). Los parámetros del problema se transforman, entonces, como sigue: $r \rightarrow 1/r$, $C_H \rightarrow C_H/r$, $N \rightarrow N/r$. Se llega así a

$$(3.61) \quad \Omega'_1 = \frac{1 - i c_H F_0 \cos I' \sin \left(\frac{\pi}{N} \cos \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{N} \cos \gamma \right)}{1 + i \frac{C_H F_0}{r} \sin I' \sin \left(\frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right)}$$

$$(3.62) \quad \Omega'_{2,3} = \frac{B'_2 \mp (B'_2{}^2 - B'_1 B'_3)^{1/2}}{B'_1}$$

donde

$$(3.63) \quad B'_1 = \left[1 + i \frac{C_H F_0}{r} \sin I' \sin \left(\frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right) \right]^2 + \frac{C_H^2}{r^2} \sin^2 \left(\frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right)$$

$$(3.64) \quad B'_2 = \left[1 + i \frac{C_H F_0}{r} \sin I' \sin \left(\frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi r}{N} \sin \gamma \right) \right] \times \left[1 - i c_H F_0 \cos I' \sin \left(\frac{\pi}{N} \cos \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{N} \cos \gamma \right) \right]$$

$$(3.65) \quad B'_3 = \left[1 - i c_H F_0 \cos I' \sin \left(\frac{\pi}{N} \cos \gamma \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{N} \cos \gamma \right) \right]^2 + C_H^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{N} \cos \gamma \right)$$

La solución numérica Ω'' luego de un paso completo de cálculo (es decir, luego de un intervalo de tiempo Δt), se obtiene, entonces, multiplicando las soluciones numéricas para cada paso fraccionario; por ejemplo, para la onda estacionaria se tiene que $\Omega_1'' = \Omega_1 \Omega_1'$.

Se define el factor de propagación T como el cociente entre la solución numérica y la analítica (o entre la "onda numérica" y la "onda física", en la terminología de Leendertse), luego de un período (de la onda física). De las Ecs. (3.36)-(3.38) y (2.16)-(2.18) se tiene que

$$\begin{aligned}
 (3.66) \quad T &\equiv \left. \frac{\exp [i (k_1 x + k_2 y + \beta t)]}{\exp [i (k_1 x + k_2 y + \beta t)]} \right|_{t = 2\pi/\omega} \\
 &= \left[\frac{\Omega''}{e^{i\beta \Delta t}} \right]_{\frac{2\pi}{\omega \Delta t}} \\
 &= e^{-\frac{2\pi}{\omega} (\tilde{A} - A)} e^{i 2\pi [\text{signo}(\omega) - \frac{\tilde{\omega}}{\omega}]}
 \end{aligned}$$

En el segundo renglón de la Ec. (3.66) queda expresada la relación entre Ω'' y T. En el tercer renglón se desglosan el módulo (amplitud) y el argumento (fase) del factor de propagación, ligados, respectivamente, a la diferencia entre los coeficientes de atenuación y al cociente entre las velocidades de fase de las ondas numérica y física. Entonces, $|T|$ mide la atenuación relativa de la onda numérica respecto de la física (es decir, la atenuación numérica), mientras que $\arg(T)$ mide el retraso de la primera respecto de la segunda (es decir, la dispersión numérica). Nótese que, de acuerdo a la Ec. (3.66), se tiene que

$$(3.67) \quad \frac{\tilde{c}}{c} = 1 - \frac{\arg(T)}{2\pi \text{signo}(\omega)}$$

donde

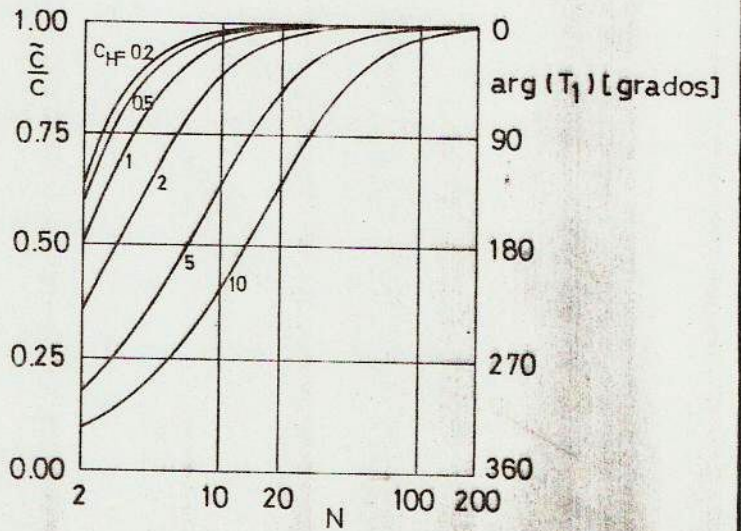
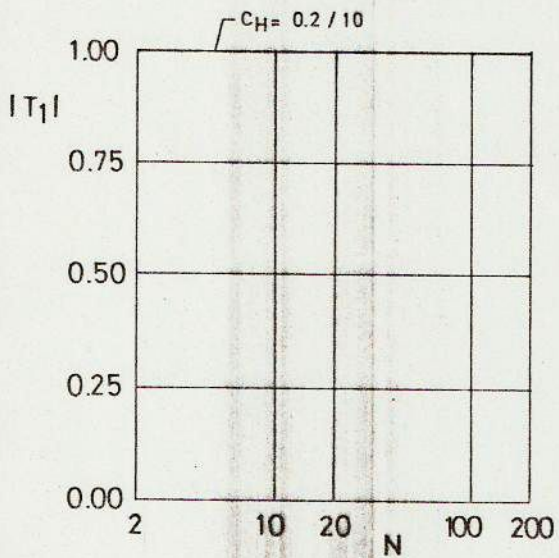
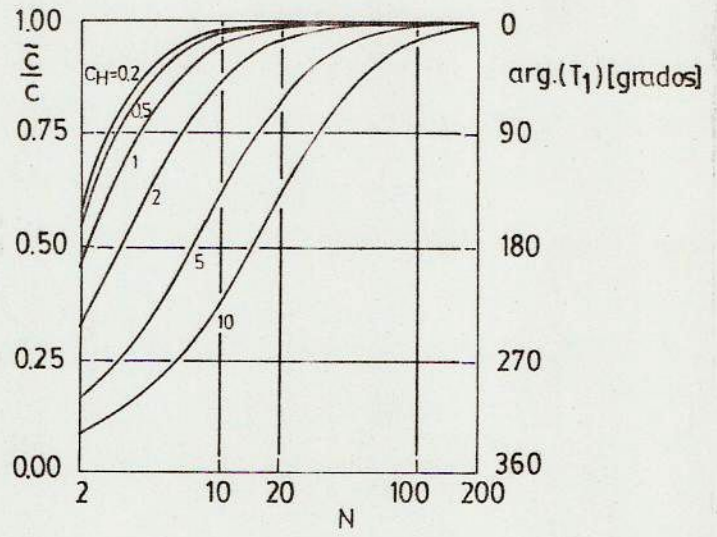
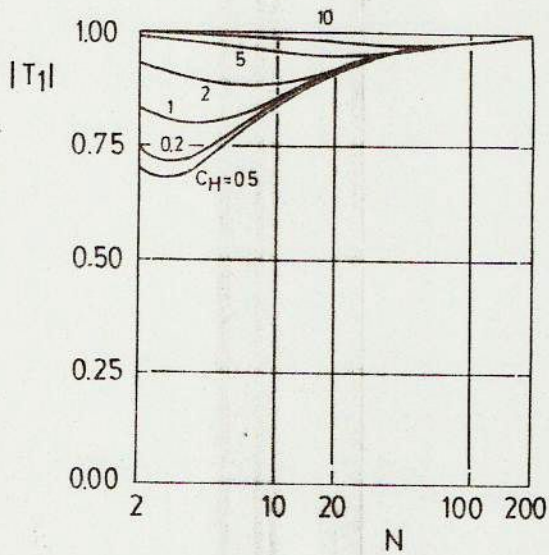
$$(3.68) \quad c = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} = (u_0^2 + v_0^2)^{1/2} \cos(I - \gamma) + c_r$$

es el módulo de la velocidad de fase.

Manteniendo fijos F_0 ($= 0,1$) y r ($= 1$) se han graficado el módulo y el argumento de T en función de N , con C_H como parámetro y para distintos pares de valores $\{I, \gamma\}$. Es interesante apuntar que, dado que las ondas físicas son en este caso neutras, $|T|$ también provee indicaciones sobre la estabilidad del esquema.

La Fig. 3.3 (a) muestra los resultados para la onda de avance cuando las direcciones de propagación de la onda y el flujo coinciden entre sí y con uno de los ejes coordenados. Se observa que el esquema introduce atenuación numérica (es "disipativo"), la cual tiende a desaparecer cuando el paso temporal crece ($C_H \rightarrow \infty$). La dispersión numérica, por su parte, se manifiesta como un retraso de la onda numérica respecto de la física, tanto mayor cuanto mayor es C_H . Como era de esperarse, la atenuación y la dispersión numéricas desaparecen, cualquiera sea el valor de C_H , para $N \rightarrow \infty$. Cuando la onda de avance es normal a la dirección del flujo, pero coincidente con uno de los ejes coordenados, el esquema se comporta como neutro para cualquier valor de C_H , pero conserva prácticamente sin cambios sus características dispersivas, tal cual se muestra en la Fig. 3.3 (b).

Es interesante desglosar el esquema numérico en sus dos pasos constitutivos, y estudiar las características de propagación de cada paso. Para el caso $I = \gamma = 0$, la Fig.



Factor de Propagación para la Onda de Avance $F_0 = 0,1; r = 1$
 a) $\Gamma = 0; \delta = 0$
 b) $\Gamma = 0; \delta = 90^\circ$

FIGURA 3.3

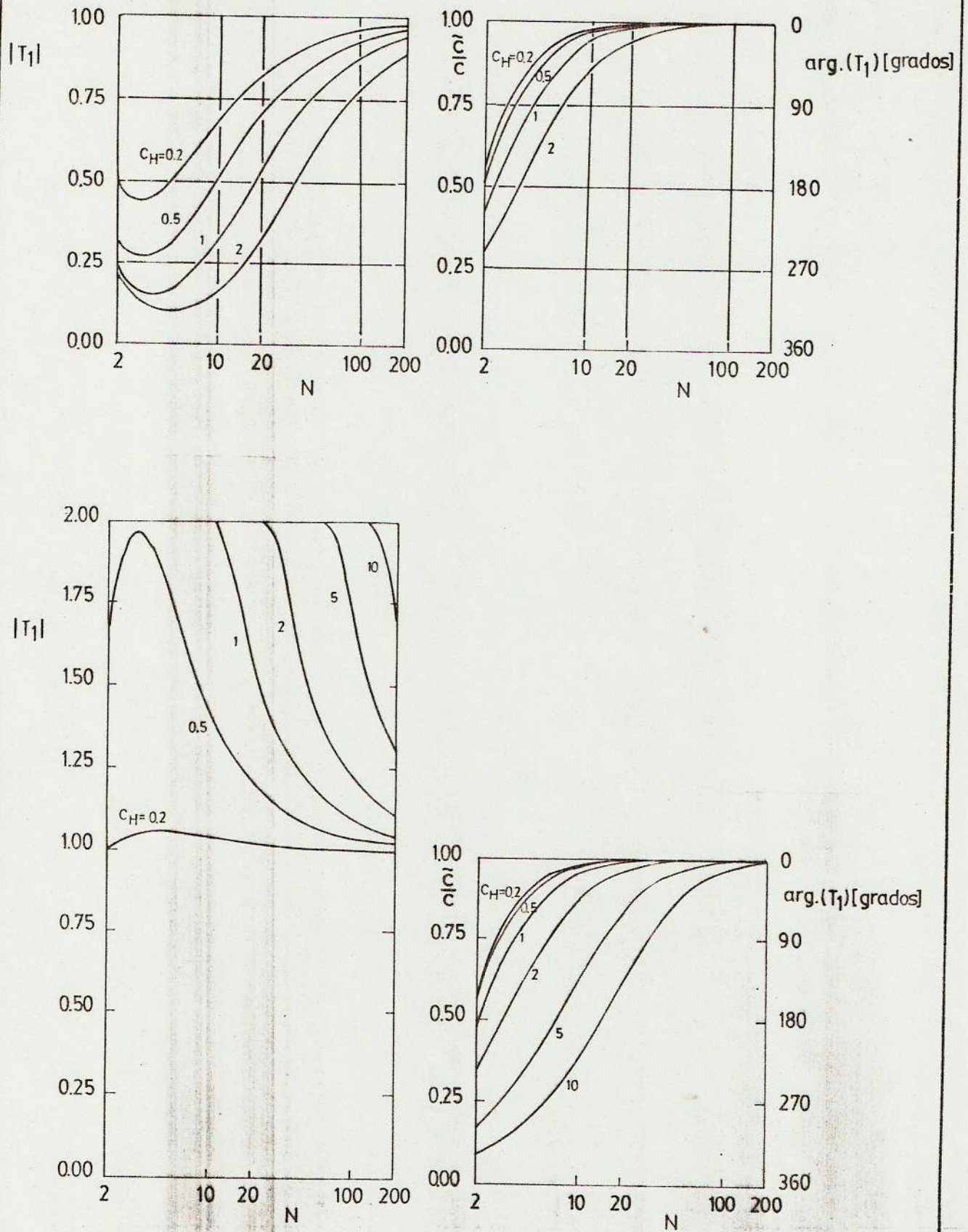
3.4. muestra el factor de propagación para los pasos en la dirección x y en la dirección y por separado. Se observa que el primer paso es fuertemente disipativo, pero el segundo paso amplifica significativamente la oscilación. Combinados, ambos pasos producen una compensación, tal cual se observó en la Fig. 3.3. (a). Nótese, por otro lado, que las características dispersivas son iguales para ambos pasos.

La respuesta del esquema para ondas de avance que se propagan con ángulos comprendidos entre 0° y 90° respecto del flujo es intermedia entre las correspondientes a ambos extremos. Esto se ilustra en la Fig. 3.5. (a), donde se muestra el factor de propagación para el caso $\bar{I} = 0$, $\bar{\chi} = 45^\circ$. También es intermedia la respuesta para el caso de propagaciones paralelas de onda y flujo, pero inclinadas respecto de los ejes coordenados, tal cual se observa en la Fig. 3.5 (b) para el caso $\bar{I} = \bar{\chi} = 45^\circ$.

Resultados totalmente similares se obtienen para la onda de retroceso. En el caso de la onda estacionaria el método se comporta como fuertemente disipativo para el caso de propagación paralela, y neutro para propagación normal, tal cual se muestra en la Fig. 3.6. En ambos casos es relativamente poco dispersivo, salvo para las longitudes de onda más cortas ($N \rightarrow 2$), y sus características son prácticamente independientes de C_H .

Cuando el número de Froude crece, el esquema numérico se hace más disipativo y dispersivo. Esto se ilustra en la Fig. 3.7, donde se muestra el factor de propagación para $F_0 = 0,8$ ($r = 1$) y $\bar{I} = \bar{\chi} = 0$, para la onda de avance.

Nótese que en ningún caso $|T|$ supera el valor 1. Esto muestra, de acuerdo a lo discutido anteriormente,



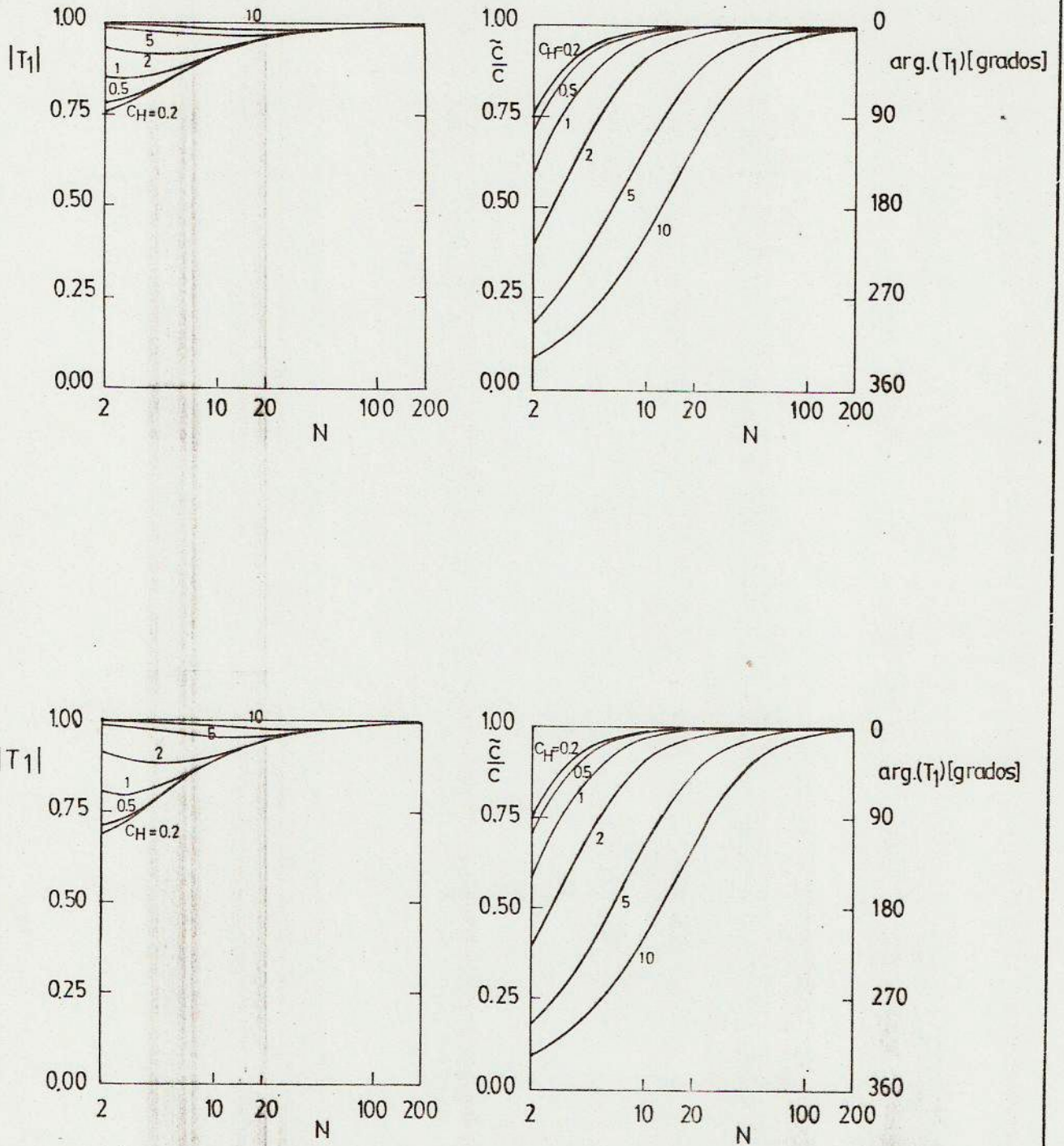
Factor de Propagación Desglosado en Pasos. Onda de Avance.

$F_0 = 0,1; r = 1; I = \varphi = 0$

a) Paso de cálculo en la dirección x

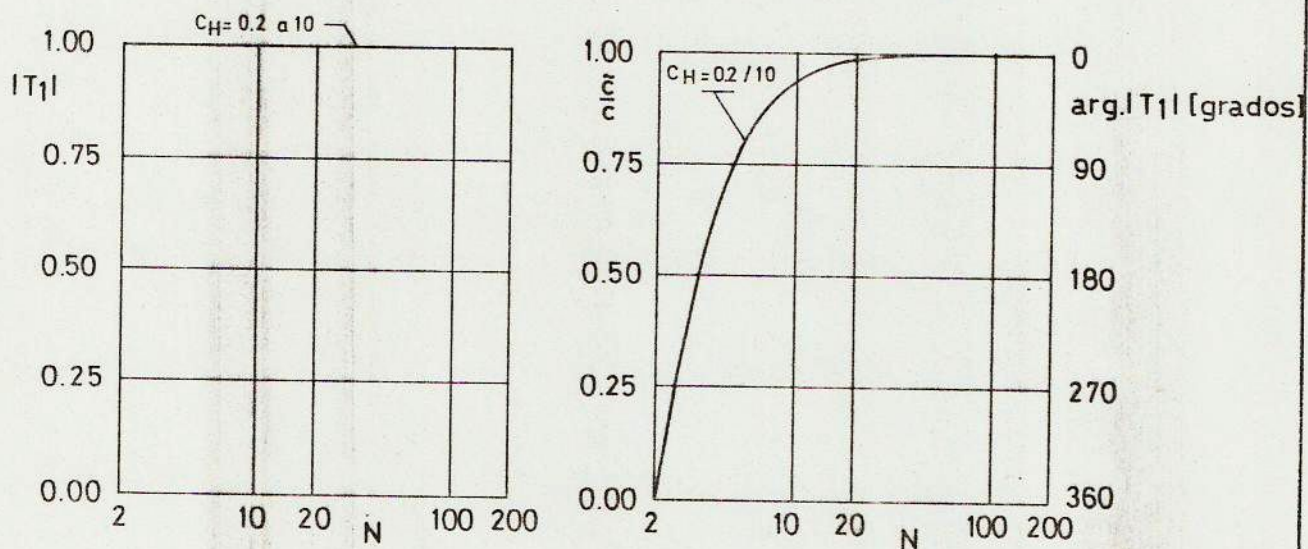
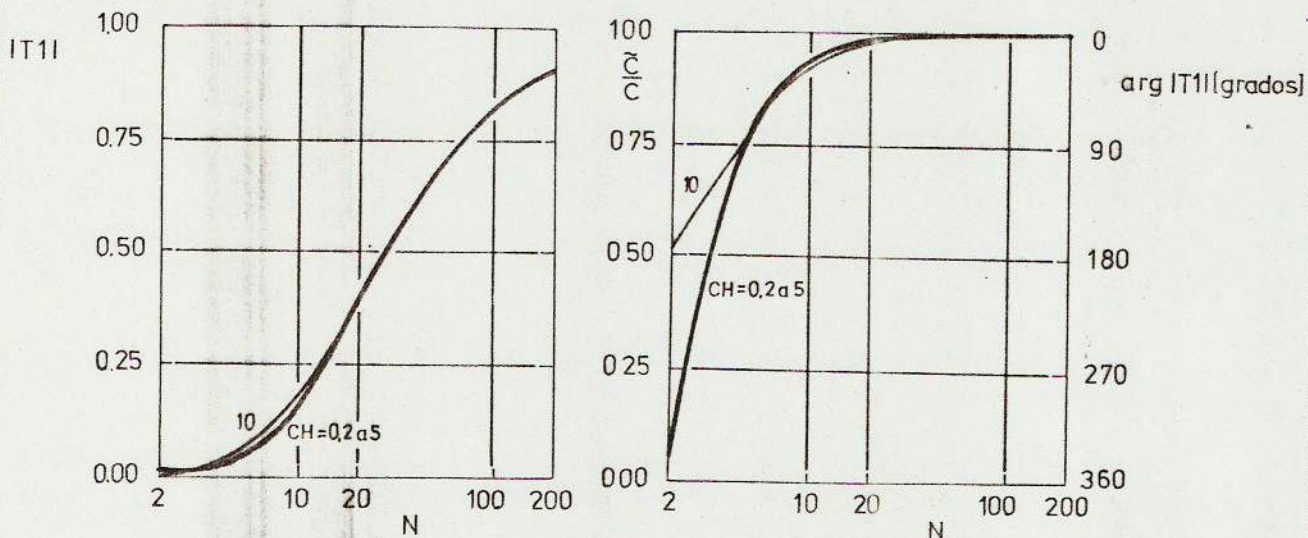
b) Paso de cálculo en la dirección y

FIGURA 3.4



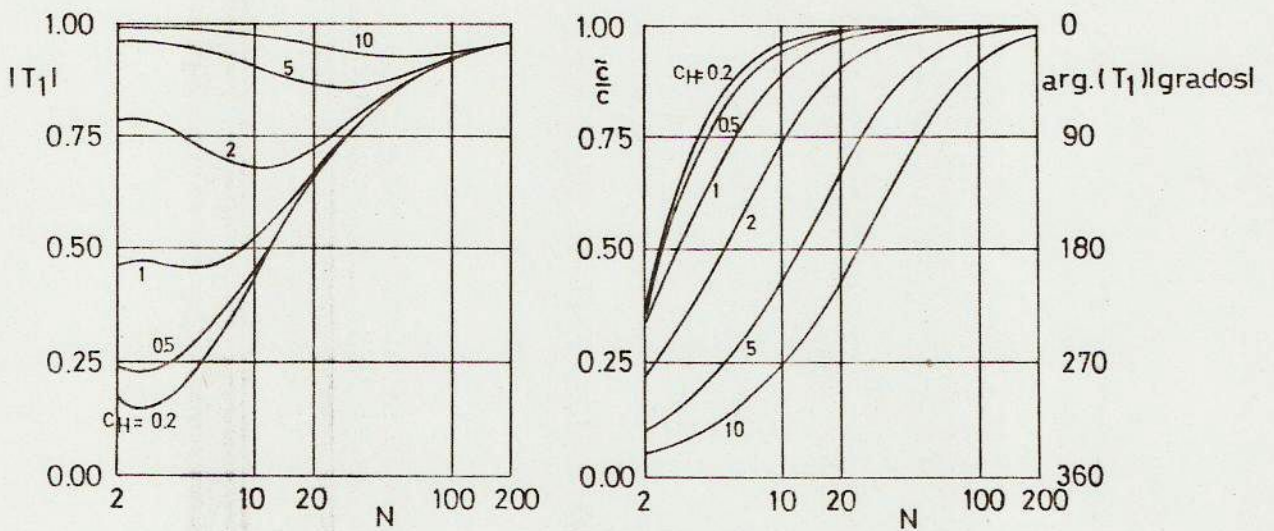
Factor de Propagación para Ondas Inclinadas respecto de los Ejes Coordinados. Onda de Avance. $Fo = 0,1$; $r = 1$
 a) $I' = 0$; $\gamma = 45^\circ$
 b) $I' = 45^\circ$; $\gamma = 45^\circ$

FIGURA 3.5



Factor de Propagación para la Onda Estacionaria $Fo = 0,1; r=1$
 a) $I' = 0; \gamma = 0$
 b) $I' = 0; \gamma = 90^\circ$

FIGURA 3.6



FORM.LHA-3

Factor de Propagación para $F_o = 0,8$. Onda de Avance.
 $r = 1; \Gamma' = \delta = 0.$

FIGURA 3.7

que el método es incondicionalmente estable desde el punto de vista lineal para el sistema simplificado.

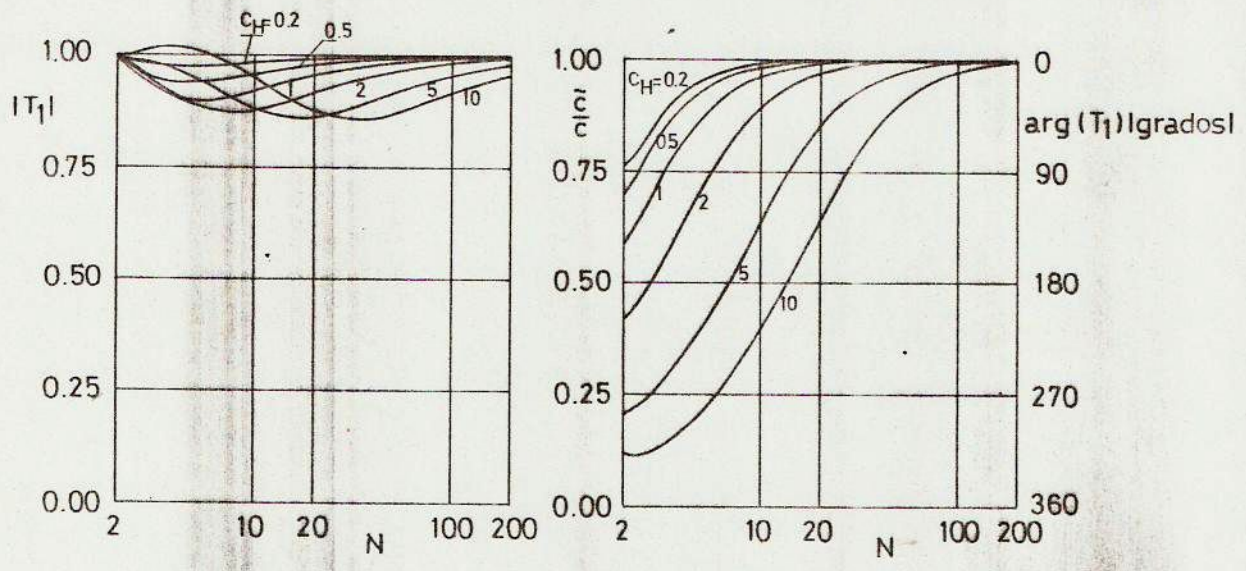
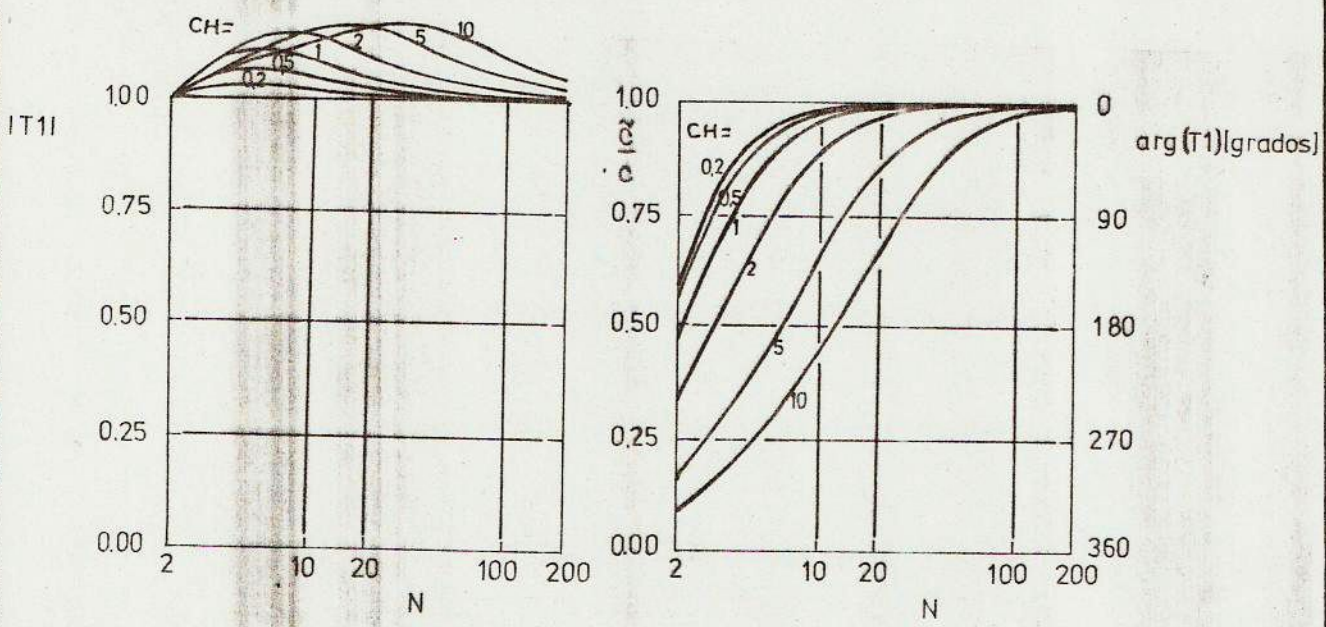
Un estudio similar se realizó para el esquema de Leendertse. La Fig. 3.8 (a) presenta los resultados para la onda de avance cuando la propagación es paralela ($F_0 = 0,1$; $r = 1$). Se observa que el método produce una amplificación de la oscilación para todos los valores de C_H . Para la onda de retroceso, en cambio, es disipativo excepto para valores grandes de C_H , tal cual se observa en la Fig. 3.8. (b). Nótese que para $C_H = 10$, el esquema amplifica las oscilaciones más cortas y atenúa las restantes. La Fig. 3.9 muestra el factor de propagación para la onda estacionaria, siempre para propagación paralela. Obsérvese el alto grado de amplificación que produce el método. Para propagación normal el esquema es neutro para los tres tipos de ondas.

Los resultados precedentes muestran, también, que el esquema de Leendertse es inestable para el sistema simplificado; sólo la inclusión de efectos resistivos (fricción, difusión turbulenta) lo puede tornar condicionalmente estable.

3.5- Análisis No Lineal

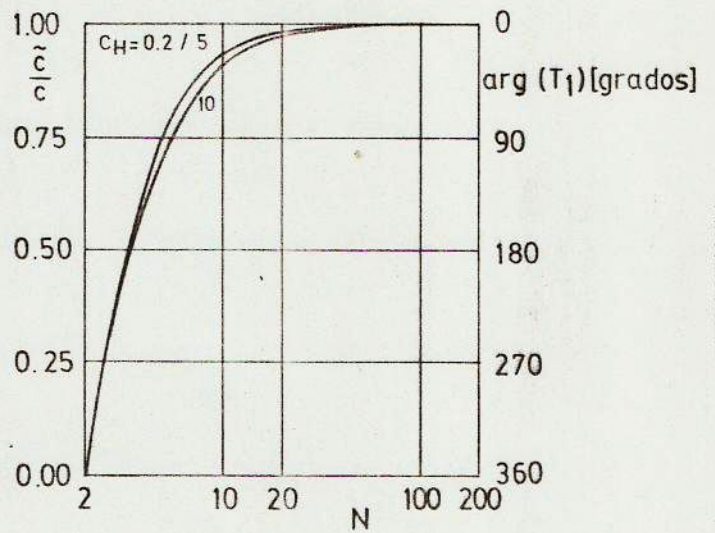
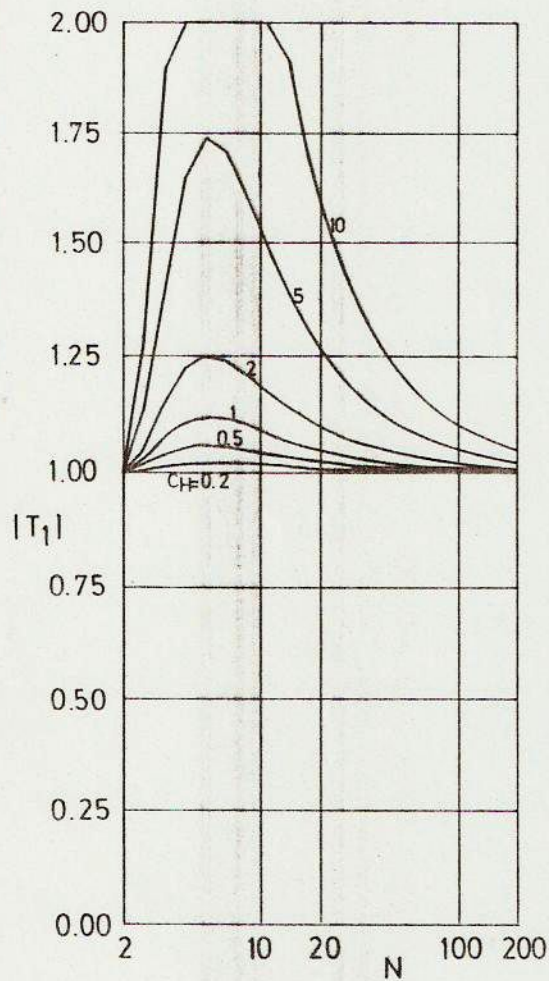
Para comprender algunas de las consecuencias de la no linealidad de las ecuaciones, es útil aplicar un análisis de Fourier, similar al de la sección precedente, a las ecuaciones generales [29] . Con este fin, se analizará la ecuación de continuidad, Ec. (3.1). Por ejemplo, la expresión de la variable h en términos de su transformada de Fourier es

$$(3.69) \quad h(x, y, t) = \iint_0^{\infty} dk_1 dk_2 H(k_1, k_2, t) e^{i(k_1 x + k_2 y)}$$



Factor de Propagación para el Esquema de Leendertse. $F_0 = 0,1$
 $r = 1$; $\Gamma = \gamma = 0$.
 a) Onda de Avance
 b) Onda de Retroceso

FIGURA 3.8



FORM.LHA-3

Factor de Propagación para el Esquema de Leendertse, para la onda Estacionaria. $F_0 = 0,1$; $r = 1$; $\Gamma = \sigma = 0$.

FIGURA 3.9

que se denotará como

$$(3.70) \quad h(x, y, t) = \langle H(k_1, k_2, t) \rangle$$

De la misma manera se tiene que

$$(3.71) \quad u(x, y, t) = \langle U(k_1, k_2, t) \rangle$$

$$(3.72) \quad v(x, y, t) = \langle V(k_1, k_2, t) \rangle$$

Nótese que no se ha transformado respecto del tiempo. Esto es debido a que, como se induce del análisis lineal, la frecuencia y el coeficiente de atenuación dependen de los números de onda k_1 y k_2 . Introduciendo las Ecs. (3.70)-(3.72) en la Ec. (3.1.) se obtiene

$$(3.73) \quad \begin{aligned} & \langle \dot{H}(k_1, k_2, t) \rangle + \langle U(m_1, m_2, t) \rangle \langle i n_1 H(n_1, n_2, t) \rangle + \\ & \quad + \langle V(m_1, m_2, t) \rangle \langle i n_2 H(n_1, n_2, t) \rangle + \\ & \quad + \langle H(n_1, n_2, t) \rangle (\langle i m_1 U(m_1, m_2, t) \rangle + \langle i m_2 V(m_1, m_2, t) \rangle) = 0 \end{aligned}$$

donde $\dot{H} \equiv \partial H / \partial t$. Nótese que, de acuerdo a la definición, los términos no lineales (todos menos el primero) son de la forma

$$(3.74) \quad \begin{aligned} & \langle U(m_1, m_2, t) \rangle \langle i n_1 H(n_1, n_2, t) \rangle = \\ & = \iiint\limits_0^{\infty} dm_1 dm_2 dn_1 dn_2 i n_1 U(m_1, m_2, t) H(n_1, n_2, t) e^{i[(m_1+n_1)x + (m_2+n_2)y]} \end{aligned}$$

La Ec. (3.74) muestra como, debido a la no linealidad, dos oscilaciones caracterizadas por los números de onda m_1 y n_1 en la dirección x , generan una oscilación con número de onda $m_1 + n_1$ en la misma dirección. Esto ilustra el efecto de "cascada" de las mayores a las menores longitudes

de onda.

La Ec. (3.73) puede reescribirse en forma más compacta si se identifican $m_1 + n_1$ y $m_2 + n_2$ con k_1 y k_2 , respectivamente, obteniéndose (por cambio de variables en las integrales)

$$(3.75) \quad \langle \dot{H}(k_1, k_2, t) + i \int_0^{k_1} dl_1 \int_0^{k_2} dl_2 \{ [k_1 U(l_1, l_2, t) + k_2 V(l_1, l_2, t)] H(k_1 - l_1, k_2 - l_2, t) \} \rangle = 0$$

La Ec. (3.75) pone aún más en evidencia el efecto cascada ya comentado, ya que muestra claramente que a las oscilaciones con número de ondas k_1, k_2 contribuyen todas las que poseen números de ondas menores.

Ahora puede aplicarse el mismo tratamiento a la versión discretizada para el paso de cálculo según x , Ec. (3.12), suponiendo, por ejemplo, que u y v son positivas. Denotando a las transformadas de h_{ij} , u_{ij} y v_{ij} como $H^n(k_1, k_2)$, $U^n(k_1, k_2)$, $V^n(k_1, k_2)$, respectivamente (aunque la integración se extiende ahora solo hasta $\pi/\Delta x$ para k_1 y $\pi/\Delta y$ para k_2), se obtiene

$$(3.76) \quad \langle \left[\frac{H^{n+1/2}(k_1, k_2) - H^n(k_1, k_2)}{\Delta t / 2} \right] + i \int_0^{k_1} dl_1 \int_0^{k_2} dl_2 \left\{ (k_1 - l_1) U^n(l_1, l_2) H^{n+1/2}(k_1 - l_1, k_2 - l_2) f_1(k_1 - l_1, \Delta x) + l_1 U^{n+1/2}(l_1, l_2) H^n(k_1 - l_1, k_2 - l_2) f_2(l_1, \Delta x) + V^n(l_1, l_2) H^n(k_1 - l_1, k_2 - l_2) [(k_2 - l_2) f_1(k_2 - l_2, \Delta y) + l_2 f_2(l_2, \Delta y)] \right\} \rangle = 0$$

donde

$$(3.77) \quad f_1(k, \Delta) \equiv e^{-ik\Delta/2} \frac{\text{sen}(k\Delta/2)}{(k\Delta/2)}$$

$$(3.78) \quad f_2(k, \Delta) \equiv \frac{\text{sen}(k\Delta/2)}{(k\Delta/2)}$$

Para el paso de cálculo según y se obtiene, análogamente

$$(3.79) \quad \left\langle \left[\frac{H^{n+1}(k_1, k_2) - H^{n+1/2}(k_1, k_2)}{\Delta t / 2} \right] + \right. \\ \left. + i \int_0^{k_1} dl_1 \int_0^{k_2} dl_2 \left\{ U^{n+1/2}(l_1, l_2) H^{n+1/2}(k_1 - l_1, k_2 - l_2) \left[(k_1 - l_1) f_1(k_1 - l_1, \Delta x) + l_1 f_2(l_1, \Delta x) \right] + \right. \right. \\ \left. + (k_2 - l_2) V^{n+1/2}(l_1, l_2) H^{n+1}(k_1 - l_1, k_2 - l_2) f_1(k_2 - l_2, \Delta y) + \right. \\ \left. + l_2 V^{n+1}(l_1, l_2) H^{n+1/2}(k_1 - l_1, k_2 - l_2) f_2(l_2, \Delta y) \right\} \right\rangle = 0$$

Para obtener la variación luego de un paso completo de cálculo se suman las Ecs. (3.76) y (3.79), obteniéndose

$$(3.80) \quad \left\langle \left[\frac{H^{n+1}(k_1, k_2) - H^n(k_1, k_2)}{\Delta t} \right] + \right. \\ \left. + i \int_0^{k_1} dl_1 \int_0^{k_2} dl_2 \left\{ (k_1 - l_1) \left[\frac{U^n(l_1, l_2) + U^{n+1/2}(l_1, l_2)}{2} \right] H^{n+1/2}(k_1 - l_1, k_2 - l_2) f_1(k_1 - l_1, \Delta x) + \right. \right. \\ \left. + l_1 U^{n+1/2}(l_1, l_2) \left[\frac{H^n(k_1 - l_1, k_2 - l_2) + H^{n+1/2}(k_1 - l_1, k_2 - l_2)}{2} \right] f_2(l_1, \Delta x) + \right. \\ \left. + (k_2 - l_2) \left[\frac{V^n(l_1, l_2) H^n(k_1 - l_1, k_2 - l_2) + V^{n+1/2}(l_1, l_2) H^{n+1}(k_1 - l_1, k_2 - l_2)}{2} \right] f_1(k_2 - l_2, \Delta y) + \right. \\ \left. + l_2 \left[\frac{V^n(l_1, l_2) H^n(k_1 - l_1, k_2 - l_2) + V^{n+1}(l_1, l_2) H^{n+1/2}(k_1 - l_1, k_2 - l_2)}{2} \right] f_2(l_2, \Delta y) \right\} \right\rangle = 0$$

Comparando las Ecs. (3.75) y (3.80) resulta fácil identificar los errores de discretización temporal y espacial. Para independizarse de los primeros, considérese el caso estacionario. Entonces, las Ecs. (3.75) y (3.80) se reducen, respectivamente, a

$$(3.81) \quad \left\langle \int_0^{k_1} dl_1 \int_0^{k_2} dl_2 \left[k_1 U(l_1, l_2) + k_2 V(l_1, l_2) \right] H(k_1 - l_1, k_2 - l_2) \right\rangle = 0$$

$$(3.82) \quad \left\langle \int_0^{k_1} dl_1 \int_0^{k_2} dl_2 \left\{ \left[(k_1 - l_1) f_1(k_1 - l_1, \Delta x) + l_1 f_2(l_1, \Delta x) \right] U(l_1, l_2) + \right. \right. \\ \left. + \left[(k_2 - l_2) f_1(k_2 - l_2, \Delta y) + l_2 f_2(l_2, \Delta y) \right] V(l_1, l_2) \right\} H(k_1 - l_1, k_2 - l_2) \right\rangle = 0$$

Nótese que la diferencia entre las Ecs. (3.81) y (3.82) (aparte del límite de integración superior), reside en que los factores f_1 y f_2 no son unitarios. Esto no es muy grave para las oscilaciones de gran longitud de onda. En efecto, cuando, por ejemplo, $k_1 \Delta x \ll 1$, se tiene que

$$(3.83) \quad (k_1 - l_1) f_1(k_1 - l_1, \Delta x) + l_1 f_2(l_1, \Delta x) \approx k_1 - i \frac{(k_1 - l_1)^2 \Delta x}{2}$$

El primer término del segundo miembro de la Ec. (3.83) provee la forma exacta de la ecuación, mientras que el segundo término representa el error de truncamiento.

Es fácil verificar que este error es exactamente el mismo que se obtiene introduciendo la transformada de Fourier en el error de discretización obtenido por desarrollo en serie de Taylor (que es válido, precisamente, para escalas de movimiento largas). Las diferencias entre la versión diferencial y la discretizada se hacen críticas para las oscilaciones de corta longitud de onda. Cuando $k_1 \approx \pi / \Delta x$ (mayor valor resoluble del número de ondas), la contribución de las oscilaciones largas ($l_1 \ll \pi / \Delta x$) produce el factor

$$(3.84) \quad (k_1 - l_1) f_1(k_1 - l_1, \Delta x) + l_1 f_2(l_1, \Delta x) \approx -\frac{2i}{\pi} k_1$$

que no solo es cuantitativamente distinto a k_1 , sino que está desfasado en $-\pi/2$. Esto muestra que las menores escalas de movimiento resolubles no están bien representadas por el esquema numérico. Las escalas "confiables" son aquellas mucho más largas que $\pi \Delta x$ y $\pi \Delta y$ (es decir, aquellas que se extienden sobre distancias mucho mayores que tres anchos de malla).

La combinación de la discretización y la no linealidad produce, también, el fenómeno conocido como enmascaramiento o "aliasing". Esto significa que oscilaciones de longitud de onda menor a la resoluble (producidas por la no linealidad) son falsamente representadas como oscilaciones con una longitud de onda efectiva mayor, tal cual se muestra en la Fig. 3.10 (a). Para calcular la longitud de onda efectiva λ_e que le corresponde a una dada longitud de onda λ cuando el paso de discretización es Δ , puede utilizarse la siguiente fórmula

$$(3.85) \quad \lambda_e = \frac{2\Delta}{1 - |2\epsilon - 1|}$$

donde

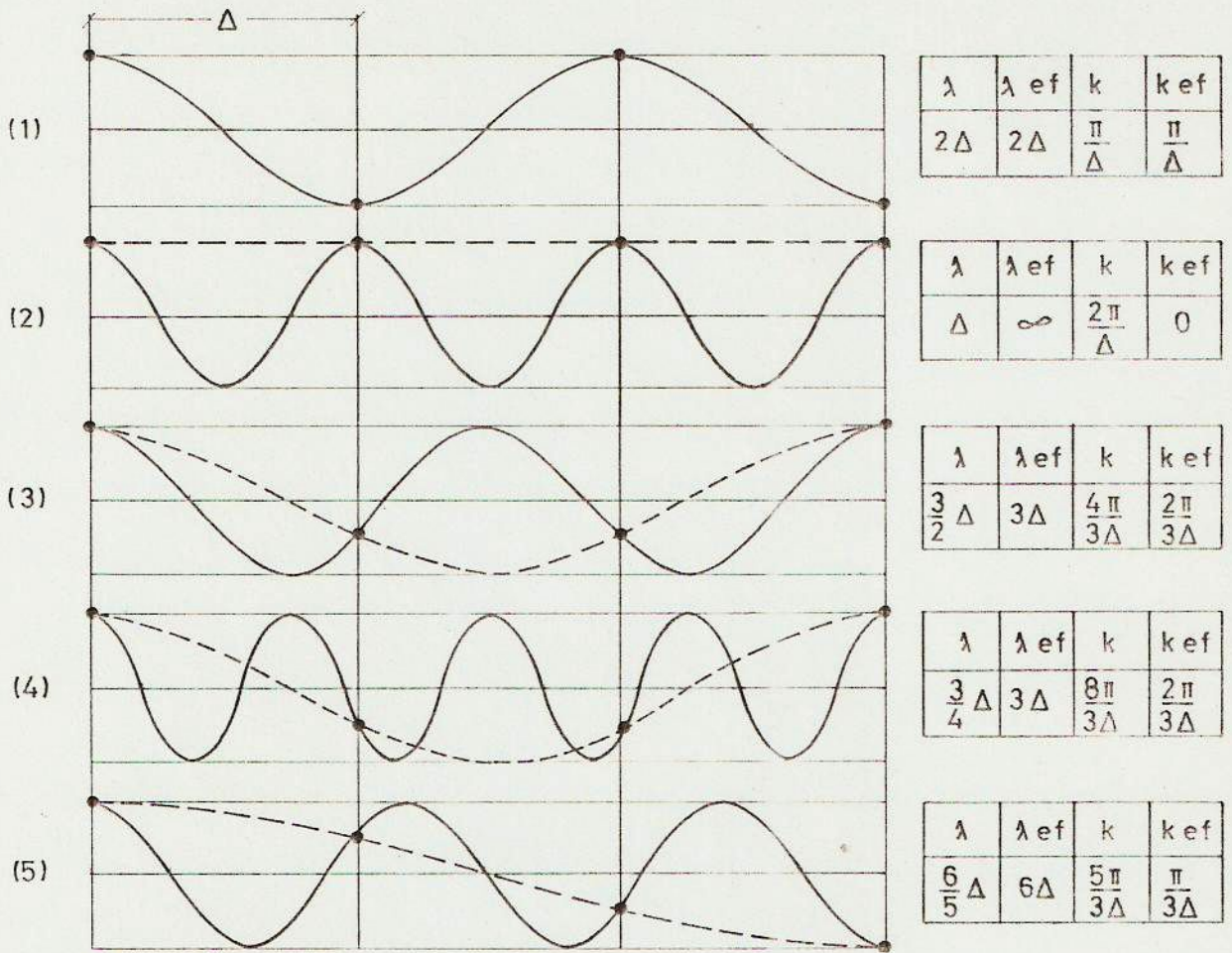
$$(3.86) \quad \epsilon = \frac{\Delta}{\lambda} - n$$

siendo n la parte entera de Δ/λ (es decir, ϵ es la parte fraccionaria de Δ/λ). Inversamente, de las Ecs. (3.85) y (3.86) pueden obtenerse cuáles son los valores de números de ondas que puede enmascarar un dado número de ondas efectivo k_e ; éstos son

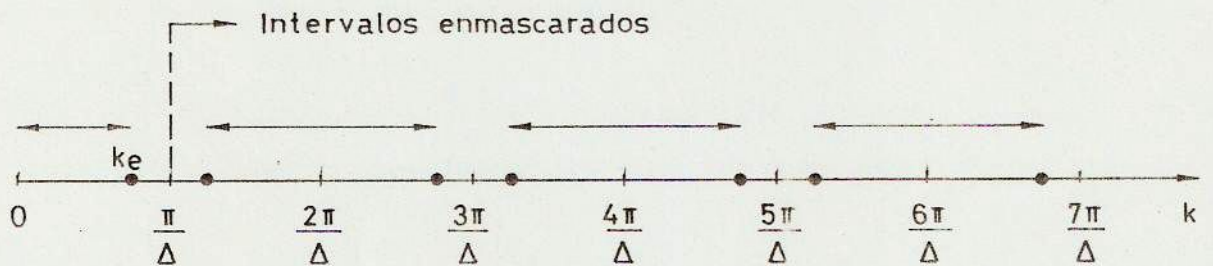
$$(3.87) \quad k = (n+1) \frac{2\pi}{\Delta} - k_e$$

$$(3.88) \quad k = n \frac{2\pi}{\Delta} + k_e$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, tal cual se muestra en la Fig. 3.10 (b). No obstante, es obvio que los valores de número de ondas generados por la no linealidad no pueden exceder



a)



b)

$2\pi/\Delta$. De esta discusión, se concluye que, por ejemplo, a la Ec. (3.82) hay que agregarle la siguiente contribución

$$(3.89) \quad \left\langle \int_0^{k_1} dk_1 \int_0^{k_2} dk_2 \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{\Delta x} - k_1 + l_1 \right) f_1 \left(\frac{\pi}{\Delta x} - k_1 + l_1, \Delta x \right) + \left(\frac{\pi}{\Delta x} - l_1 \right) f_2 \left(\frac{\pi}{\Delta x} - l_1, \Delta x \right) \right] \times \right. \right. \\ \times \left[\left(\frac{\pi}{\Delta x} - l_1, \frac{\pi}{\Delta y} - l_2 \right) + \left[\left(\frac{\pi}{\Delta y} - k_2 + l_2 \right) f_1 \left(\frac{\pi}{\Delta y} - k_2 + l_2, \Delta y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\pi}{\Delta y} - l_2 \right) f_2 \left(\frac{\pi}{\Delta y} - l_2, \Delta y \right) \right] \left[\left(\frac{\pi}{\Delta x} - l_1, \frac{\pi}{\Delta y} - l_2 \right) \right] + \left[\left(\frac{\pi}{\Delta x} - k_1 + l_1, \frac{\pi}{\Delta y} - k_2 + l_2 \right) \right] \right\} \right\rangle$$

que se suma, entonces, al error de truncamiento.

CAPITULO 4

RESULTADOS NUMERICOS

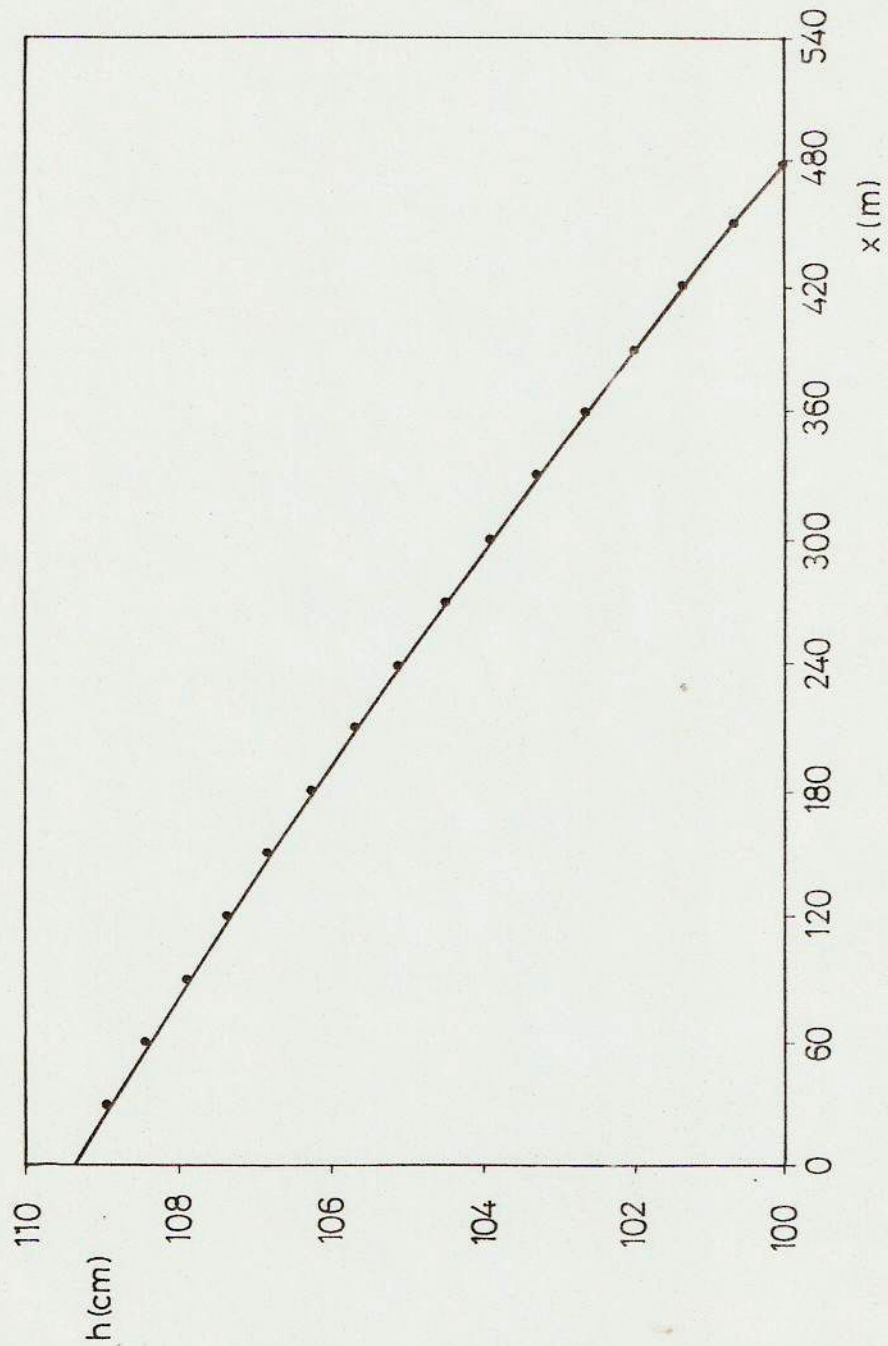
4.1.- Consideraciones Generales

En este capítulo se presentan y discuten tres tipos distintos de resultados numéricos, todos ellos relacionados a problemas en régimen permanente. En primer lugar, se muestran las pruebas realizadas para verificar el método numérico. En segundo lugar, se presentan ensayos numéricos referidos a problemas que aún necesitan mayor estudio. Finalmente, se tratan las aplicaciones llevadas a cabo.

4.2.- Pruebas

Se obtuvieron los resultados numéricos para el escurrimiento en un canal horizontal, de sección rectangular y uniforme y fondo rugoso. La comparación con la solución numérica obtenida por medio de un cálculo unidimensional resultó satisfactoria, tal cual se muestra en la Fig. 4.1. para la altura. La leve desviación que se observa hacia aguas arriba se debe a que, tal cual se explicó, la condición de borde no es estrictamente válida.

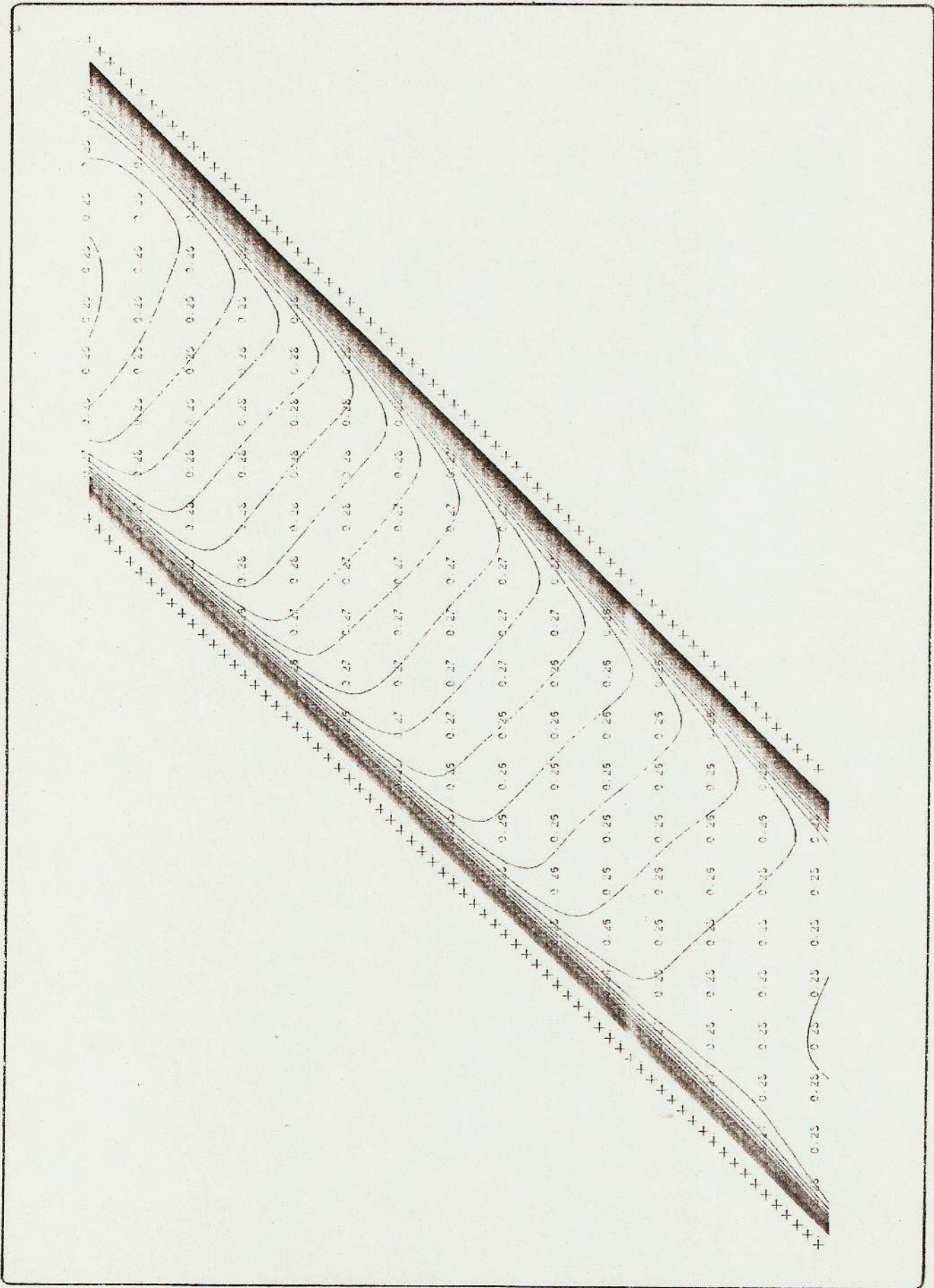
Esta prueba se repitió, pero alineando el canal a 45° respecto de la grilla de cálculo. Las condiciones de contorno para la altura y las velocidades se tomaron de un cálculo previo con el canal alineado con la grilla. La Fig. 4.2. muestra las isotáqueas (líneas de igual velocidad). Se observa que, al representar al contorno del canal por



FORM.LHA-3

Variación de la Altura en un Canal Rugoso; - - - , cálculo Unidimensional; — , cálculo presente. $\Delta x = \Delta y = 30$ m; $n = 0,03$; Caudal por unidad de ancho = $13,5$ m²/s.

FIGURA 4.1



FORM.LHA-3

Isotáqueas en un Canal Rugoso Alineado a 45° respecto de la Grilla de Cálculo. Caudal = 400 m³/s; n = 0,03; Δx = Δy = 42,43 m (velocidad en m/s)

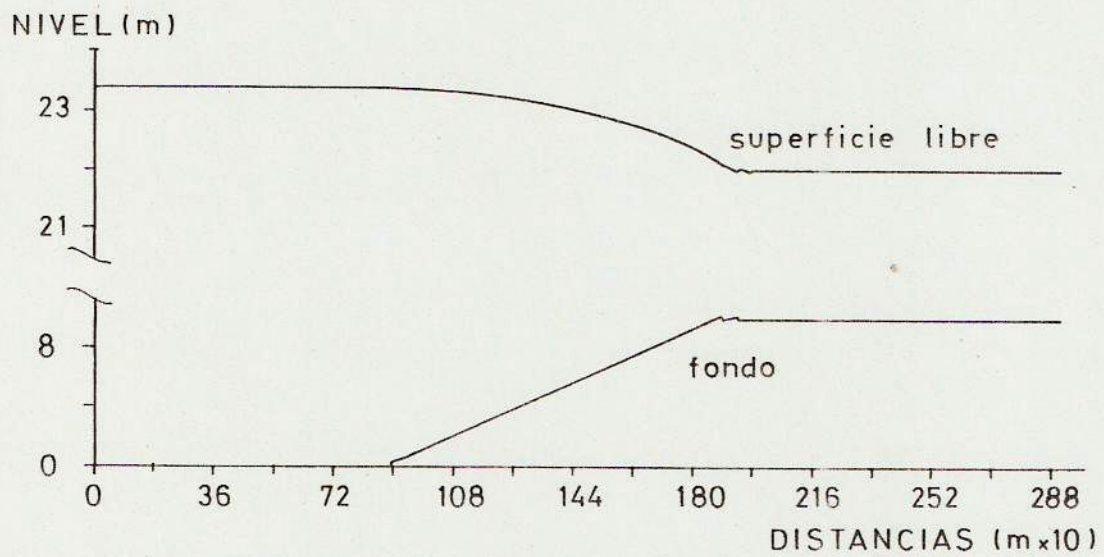
FIGURA 4.2

una línea quebrada, se produce efectivamente una condición de no deslizamiento, la cual, por difusión numérica, provoca la aparición de una "capa de pared" de alrededor de 5 celdas de espesor. Fuera de esta capa se obtiene el perfil de velocidades uniforme esperado.

Para probar la adecuada respuesta del flujo a cambios en la geometría del fondo, se ensayó el problema de un flujo uniforme en un canal rectangular, horizontal y sin rozamiento, pero con un escalón en el fondo, tal cual se muestra en la Fig. 4.3. La diferencia entre las alturas calculadas con el presente método numérico y con el teorema de Bernoulli solo difirieron en alrededor del 0,1 %.

Para comparar la performance del presente método numérico con el de Leendertse, se realizaron dos tipos de pruebas. En primer lugar, se ensayó el problema de un canal horizontal, prismático, de sección rectangular y fondo rugoso, con el objetivo de medir el tiempo de máquina necesario para obtener el estado estacionario. Se realizaron ensayos con ambos esquemas variando el paso temporal. En ambos casos se llegó a un valor límite de Δt ; cuando este valor era superado el esquema se hacía inestable. Para el presente método la inestabilidad es no lineal (ya que el procedimiento es estable desde el punto de vista lineal), y se produce debido a que el esquema se hace neutro para $C_H \rightarrow \infty$, no pudiendo disipar, entonces, los movimientos de corta longitud de onda. En el caso del método de Leendertse, la inestabilidad puede ser lineal o no lineal.

En la Tabla 4.1. se presentan resultados de los ensayos. En primer término se observa que, tal cual era de esperarse, el presente método permite el uso de pasos de tiempo mayores que el de Leendertse. En segundo término, se nota que el presente método converge más rápido hacia la solu-



FORMILHA-3

Variación de la Altura en un Canal sin Rozamiento y con un Escalón en el Fondo. Caudal por Unidad de Ancho = $72,22 \text{ m}^2/\text{s}$; $\Delta x = \Delta y = 90\text{m}$ (notar escalas distintas para la representación del fondo y de la superficie libre)

FIGURA 4.3

ción; el ahorro en tiempo de máquina es de aproximadamente el 45%.

Obviamente, el presente esquema, siendo totalmente implícito, requiere mayor tiempo de cálculo por paso de tiempo. Se estimó que el tiempo de máquina es de alrededor de 3,3 mseg por paso de tiempo y por nodo, contra 1 mseg del esquema de Leendertse, en una VAX 11/780.

La segunda prueba de comparación consistió en ensayar el mismo problema, pero parando el cálculo en un tiempo fijo (N° de pasos de tiempo $\times \Delta t = \text{cte.}$), usando el máximo valor de Δt posible. Esta es una forma de medir la eficiencia del método para ser utilizado en problemas de régimen impermanente. Se observa que, en este caso, el esquema de Leendertse resulta algo más eficiente (ahorra aproximadamente el 15% de tiempo de máquina).

Tabla N° 4.1.-

Tiempo de máquina para obtener la convergencia en el problema del canal. $Q = 150 \text{ m}^3/\text{s}$, $C = 30$, $\Delta x = \Delta y = 30 \text{ m}$, ancho = 300 m, largo = 600 m, altura aguas abajo = 1 m.

Esquema	Δt (seg)	C_H	N° de pasos de tiempo	Tiempo de convergencia (seg)	Observaciones
Presente	100	10,4	31	20,16	
	110	11,5	21	14,03	Tiempo mínimo y Δt máximo
Leendertse	25	2,6	120	25,16	Tiempo mínimo
	40	4,2	153	31,69	Δt máximo

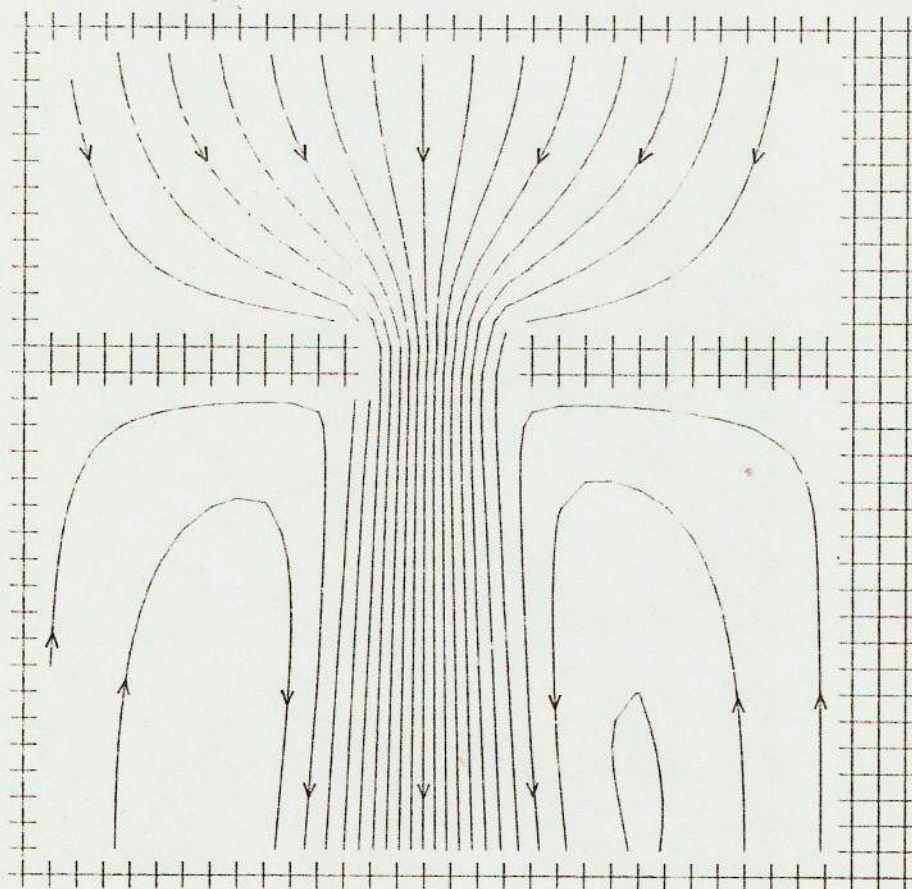
Tabla N° 4.2.-

Tiempo de máquina para el cálculo hasta $t = 2200$ seg en el problema del canal.

Esquema	Δt (seg)	N° pasos de tiempo	Tiempo de máquina (seg)
Presente	110	20	13,36
Leendertse	40	55	11,39

4.3.- Ensayos Numéricos

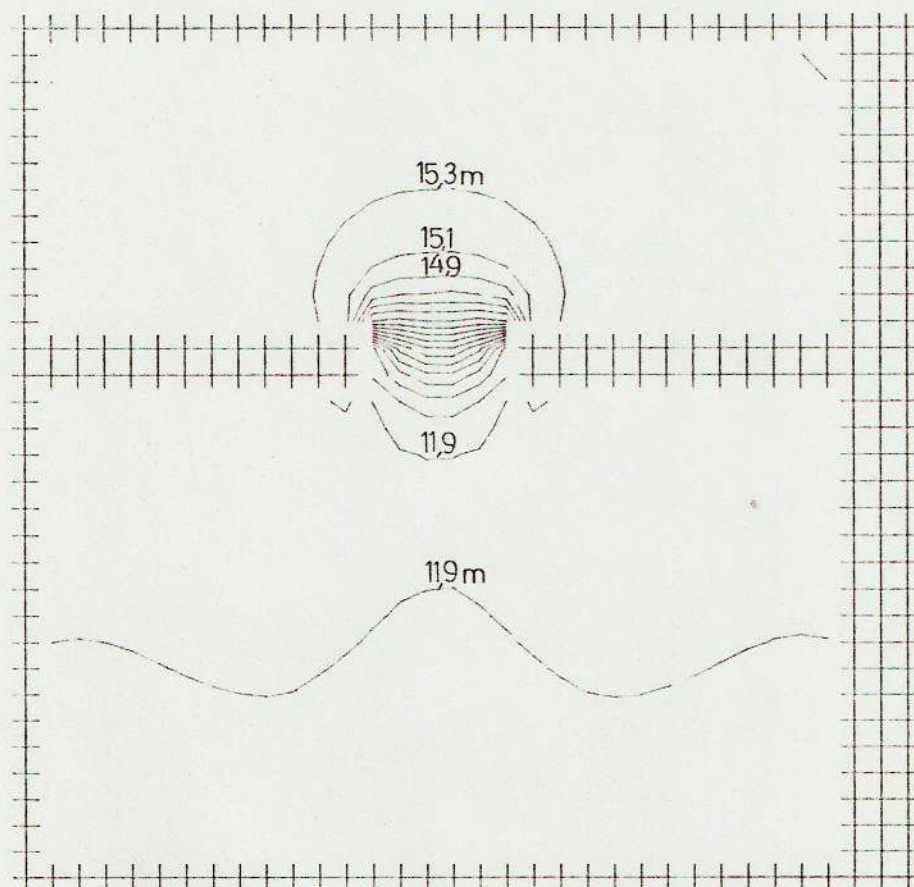
Se trató el problema del flujo a través de una brecha situada en un canal horizontal sin rozamiento. La Fig. 4.4 muestra las líneas de corriente. Se observa que el chorro que parte de la brecha se difunde débilmente por efectos numéricos (ya que $\nu = 0$), creando, incluso, una recirculación a ambos lados. Las curvas de nivel de las alturas se presentan en la Fig. 4.5. Nótese el rápido decaimiento de la altura en la zona de la brecha, que varía en, aproximadamente, 3,3 m. Esta diferencia es mucho mayor que los 1,3 m que surgen de aplicar el teorema de Bernoulli (conservación de la energía mecánica), pero también excede los 2 m calculados por la fórmula del vertedero [30], que tiene en cuenta las pérdidas energéticas. La pérdida adicional de energía mecánica que aparece en el presente cálculo se debe a la difusión numérica, que se torna particularmente



FORM.LHA-3

Líneas de Corriente para el Problema de la Brecha. $\Delta x = \Delta y = 90$ m; caudal = 39.000 m³/s; altura aguas abajo = 12 m; $\psi_t = 0$.

FIGURA 4.4



FORM.LHA-3

Curvas de Nivel de las Alturas para el Problema de la Brecha

FIGURA 4.5

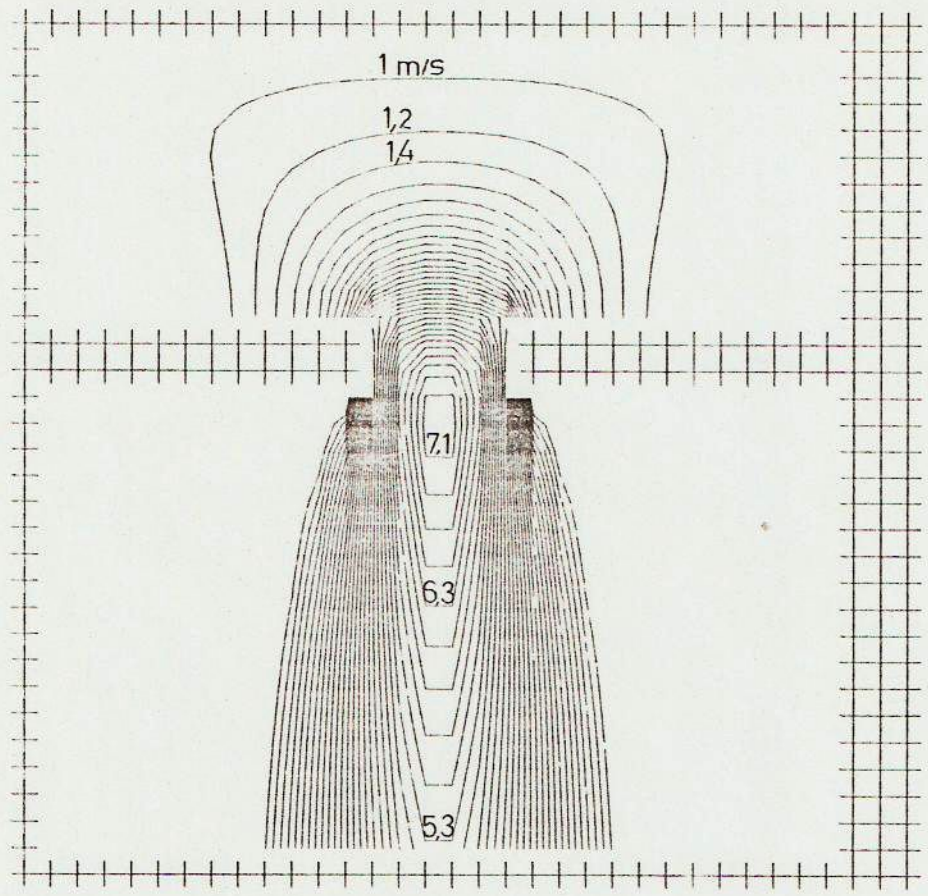
importante en la zona de la brecha al ser la velocidad muy alta, tal cual se observa en la Fig. 4.6, que muestra las isotérmicas.

Este ensayo numérico se repitió, pero considerando difusión turbulenta ($\nu_t = 300 \text{ m}^2/\text{s}$). Como era de esperarse, el desnivel creció (a 4,3 m), la difusión del chorro se hizo más notable (ver Fig. 4.7) y la recirculación más importante.

4.4.- Aplicaciones

El presente método numérico se aplicó a la simulación del escurrimiento en la zona del Río Paraná donde se emplazará la presa de Corpus. En particular, se trataba de llevar a cabo un estudio de la sensibilidad de la corriente a las condiciones de borde aguas arriba, con vistas a simplificar su implementación en el modelo a escala reducida ("modelo físico") construido en este Laboratorio para el estudio hidráulico de la obra.

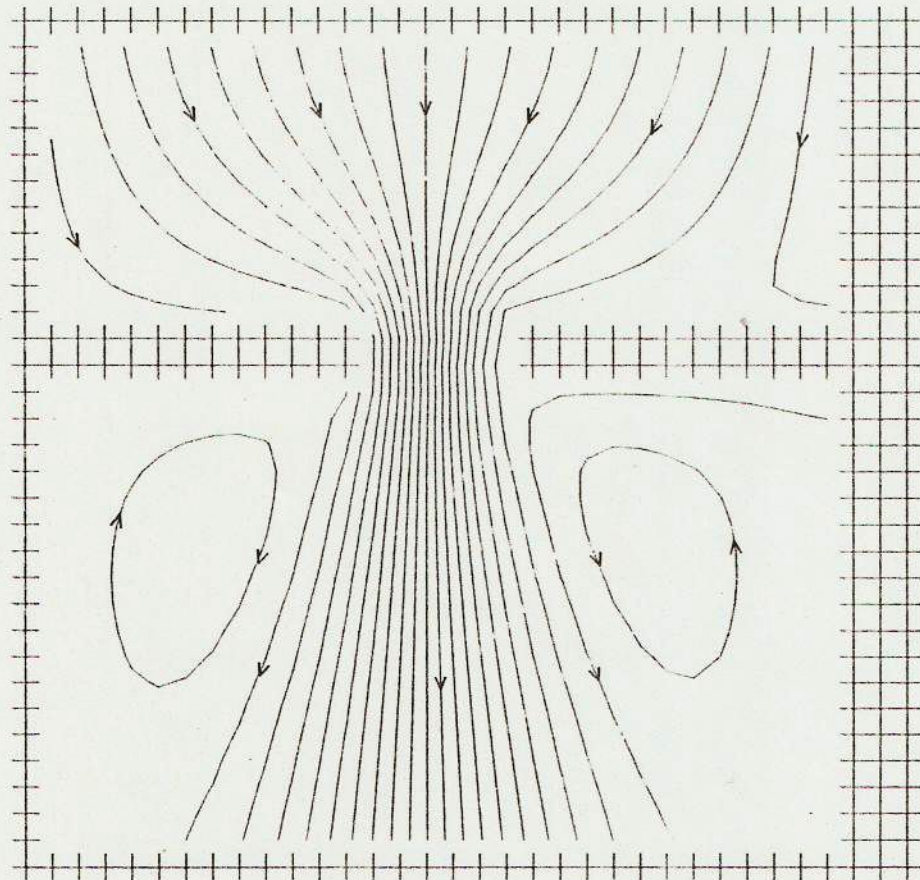
La Fig. 4.8. muestra una comparación entre las líneas de transporte (igual descarga acumulada) calculadas y las trayectorias de flotadores medidas en el prototipo, observándose un acuerdo satisfactorio, excepto en la zona aguas abajo. Esto se debe, seguramente, a que la condición de borde para el modelo matemático (cota constante) no es del todo realista. La comparación entre los módulos de las velocidades medidas y calculadas se muestran en las Figs. 4.9. y 4.10., que presentan la distribución en la sección del futuro eje de presa. Nuevamente, el acuerdo se considera satisfactorio desde el punto de vista ingenieril. El perfil calculado presenta un pico



FORM.LHA-3

Isotáqueas para el Problema de la Brecha

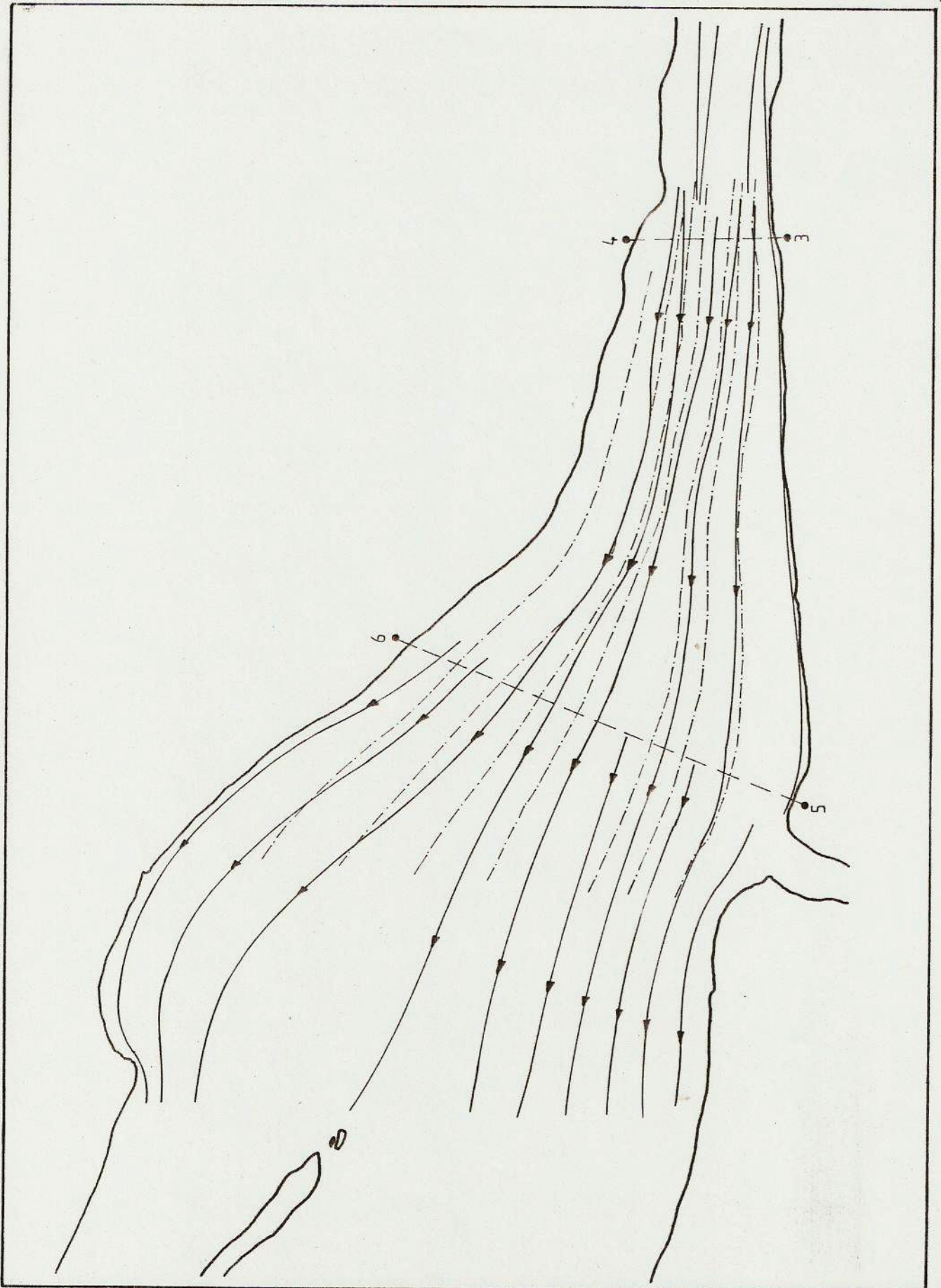
FIGURA 4.6



FORMILHAV3

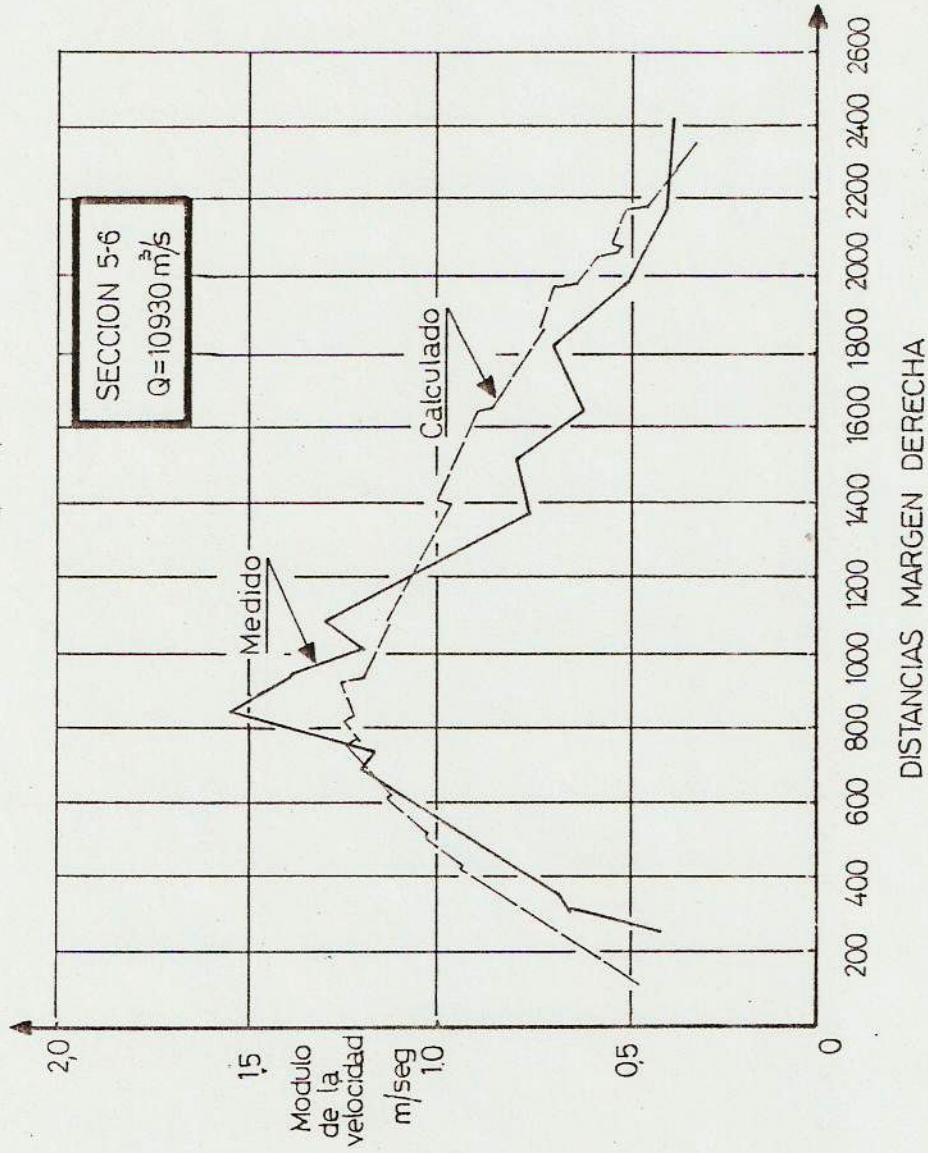
Líneas de corriente para el problema de la brecha,
con $\psi_t = 300 \text{ m}^2/\text{s}$

FIGURA 4.7



Línea de corriente medidas (--) y calculadas (-.-) en la zona de Corpus

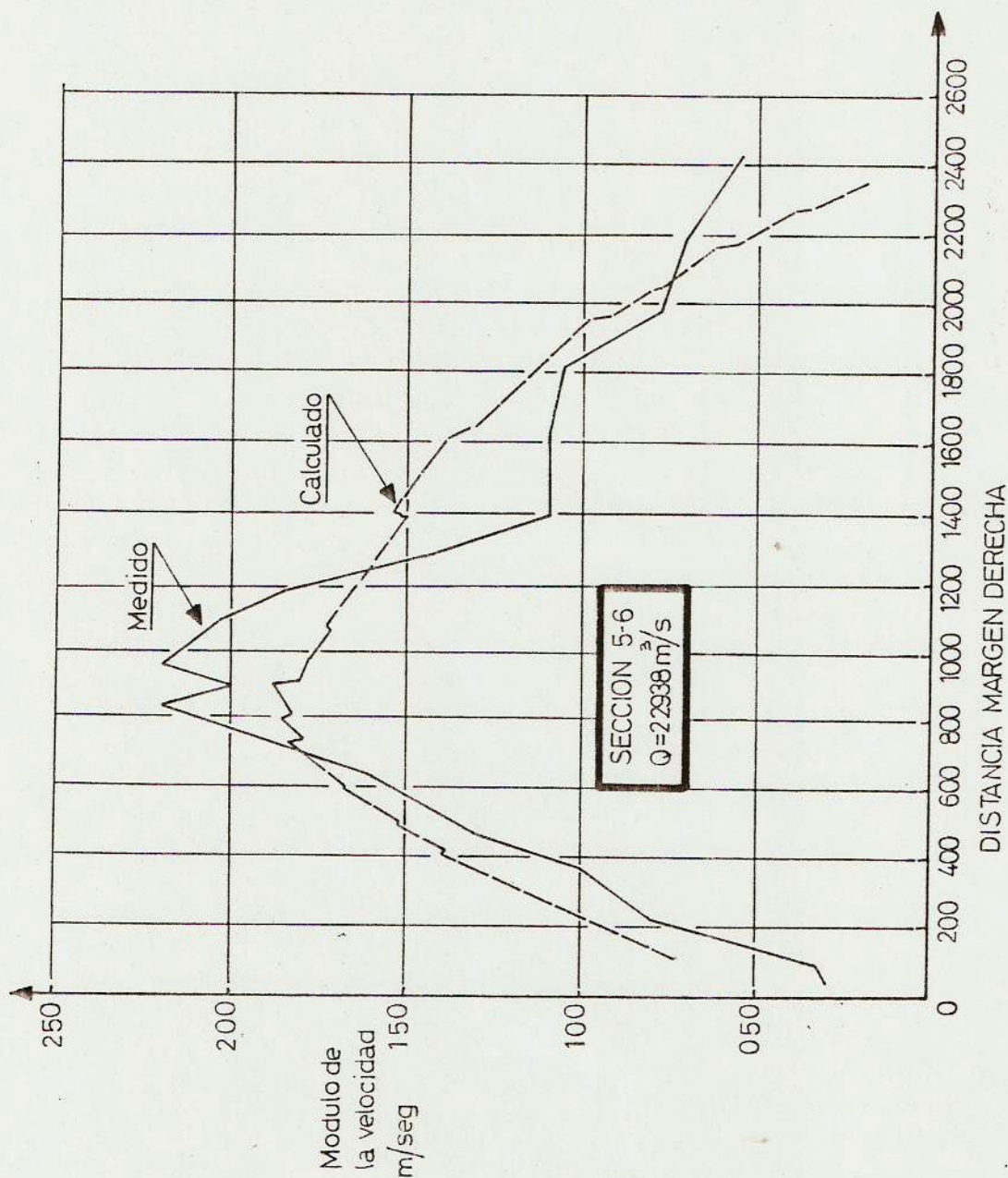
FIGURA 4.8



FORM.LHA-3

Distribución de Velocidades en la Sección 5-6 para
 $Q = 11.000 \text{ m}^3/\text{s}$

FIGURA 4.9



FORM.LHA-2

Distribución de velocidades en la sección 5-6 para $Q = 23.000 \text{ m}^3/\text{s}$

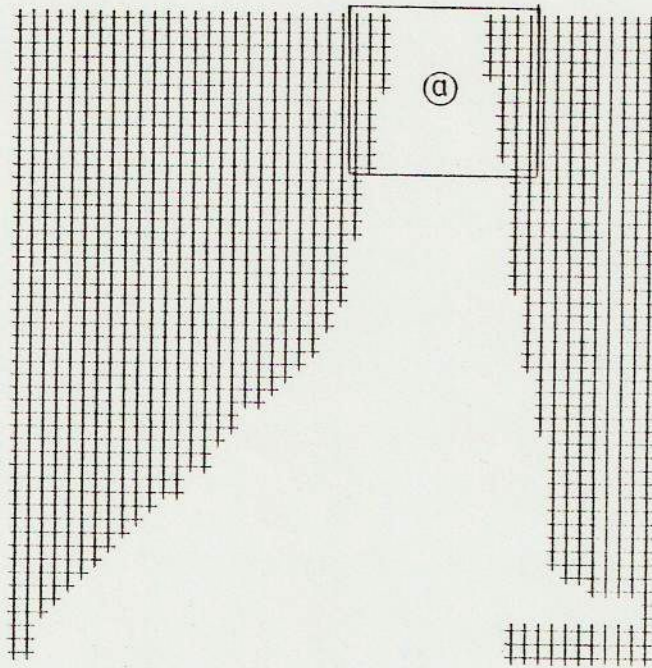
FIGURA 4.10

menos pronunciado y una variación más suave. Esto se debe a la forma como se modeló la difusión turbulenta, por medio de una viscosidad de torbellino constante y uniforme. Es sabido que una aproximación más precisa requiere el uso de modelos de turbulencia más sofisticados [6] . Más aún, la existencia de un extendido y profundo pozo en la zona de cálculo no solo puede provocar la generación de turbulencia de gran escala, sino también la aparición de corrientes secundarias cuya modelación es aún tarea de investigación.

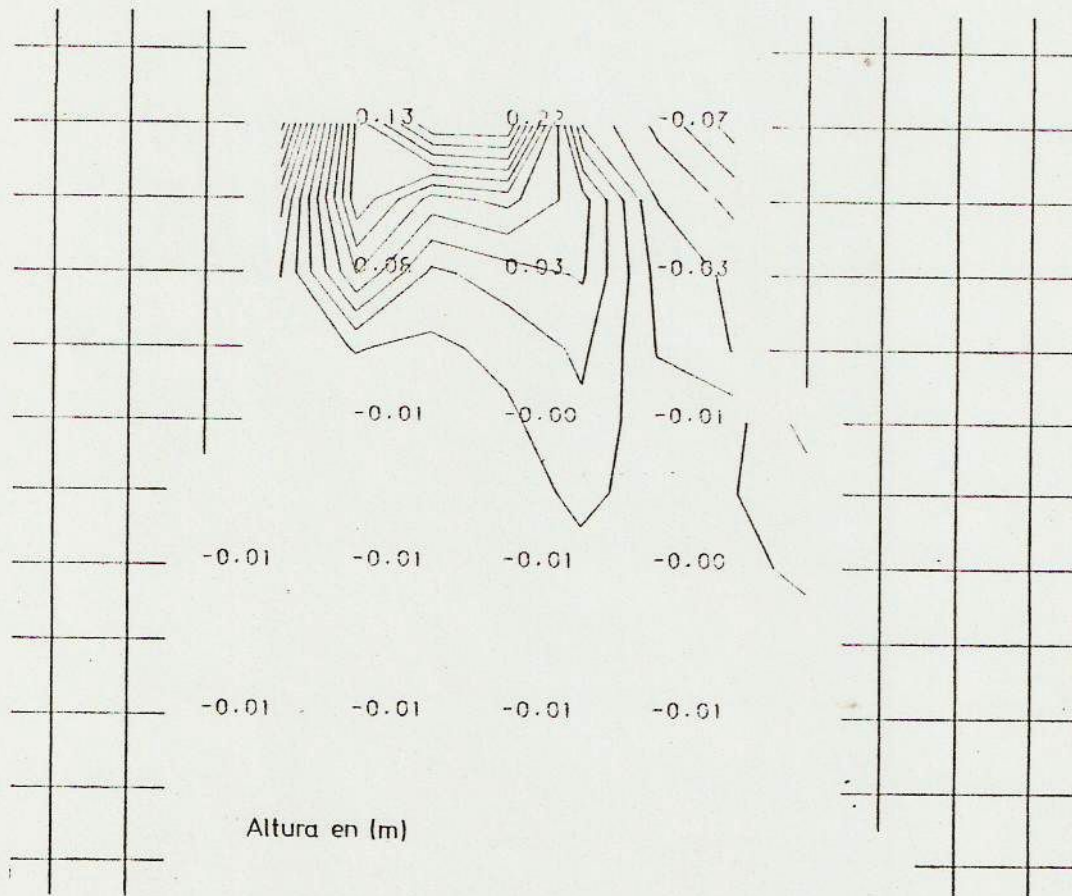
La aplicación de un perfil de velocidades uniforme aguas arriba (la condición más fácilmente implementable en el modelo físico) genera diferencias en el flujo que solo se extienden sobre una corta zona. La Fig. 4.11. muestra estas diferencias para la cota del pelo de agua (altura).

También se ha realizado la simulación numérica del escurrimiento con el cauce del Río Paraná estrechado (durante la primera etapa de construcción de la obra).

Es necesario aclarar que los resultados obtenidos son, en el mejor de los casos, solo tentativos. En efecto, en primer lugar no se ha considerado una extensión aguas abajo del estrechamiento lo suficientemente larga como para lograr la readherencia del chorro al contorno costa. En segundo lugar, el modelo de turbulencia utilizado no es el adecuado para simular con precisión las zonas con torbellinos; en realidad, se necesitan formulaciones más elaboradas. En tercer lugar, la imposición de una cota constante como condición de borde aguas abajo puede provocar distorsiones significativas en el flujo. Aún así, se consideró instructivo llevar a cabo esta simulación como primera aproximación .



DETALLE (a)



FORM. LHA-3

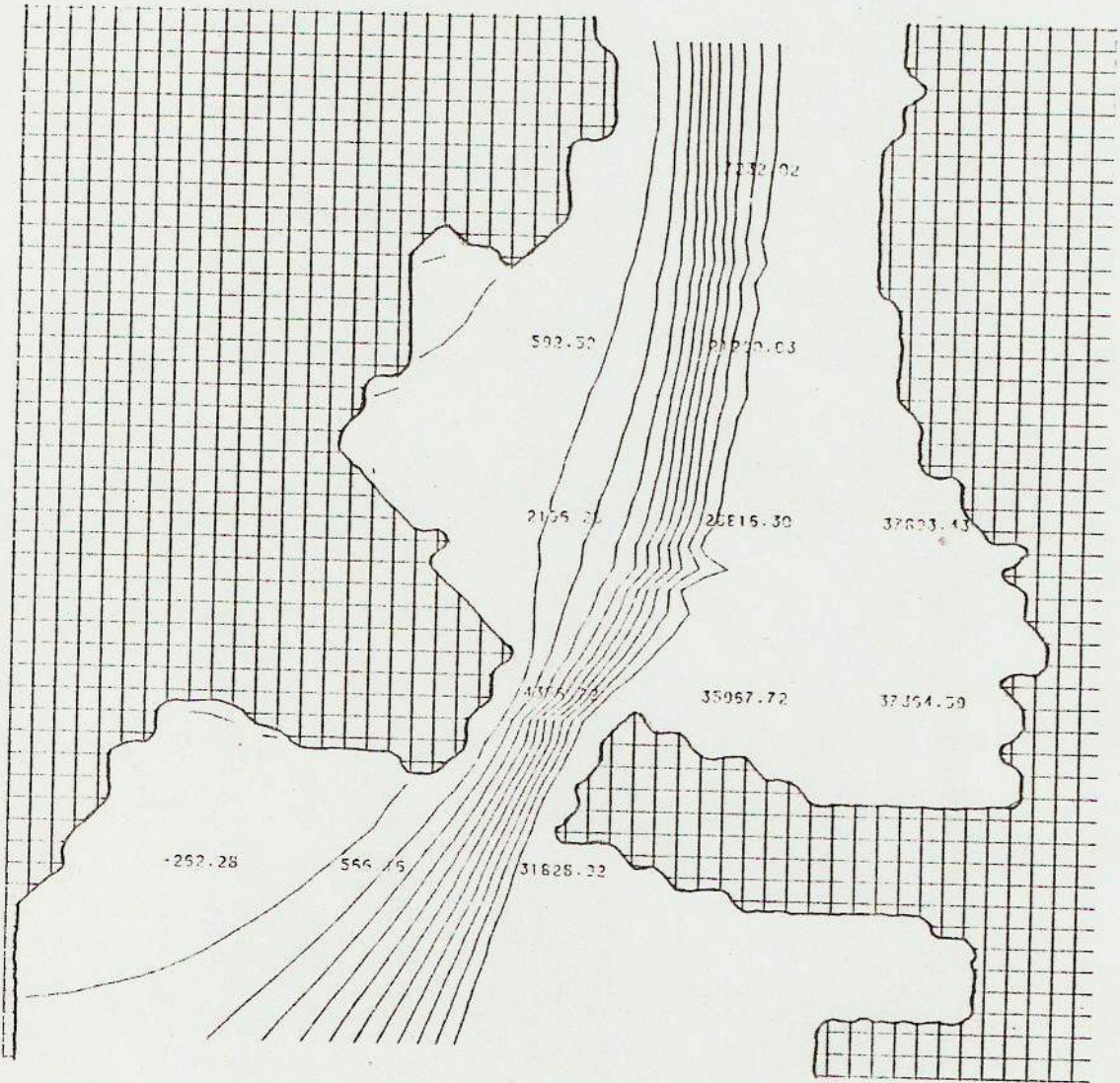
Diferencia entre alturas calculadas con distintas condiciones de borde. $Q \approx 12.000 \text{ m}^3/\text{s}$.

Figura 4.11

La Fig. 4.12 presenta las líneas de transporte; se observa que el escurrimiento es prácticamente guiado por el pozo hacia la embocadura del estrechamiento. En la Fig. 4.13 (a) se muestran las curvas de nivel de la superficie del agua; nótese que ésta se encuentra esencialmente nivelada a ambos lados del estrechamiento, y su caída de un nivel a otro se produce en forma brusca al atravesar dicho estrechamiento. Esto se observa con más claridad en la Fig. 4.13. (b), donde se grafica el nivel en una sección longitudinal media.

Nótese que el desnivel calculado es de, aproximadamente, 3,30 m. También se obtuvieron y graficaron las isotáqueas, presentadas en la Fig. 4.14; el valor pico de velocidad, de alrededor de 6 m/s, se alcanza a la salida del estrechamiento.

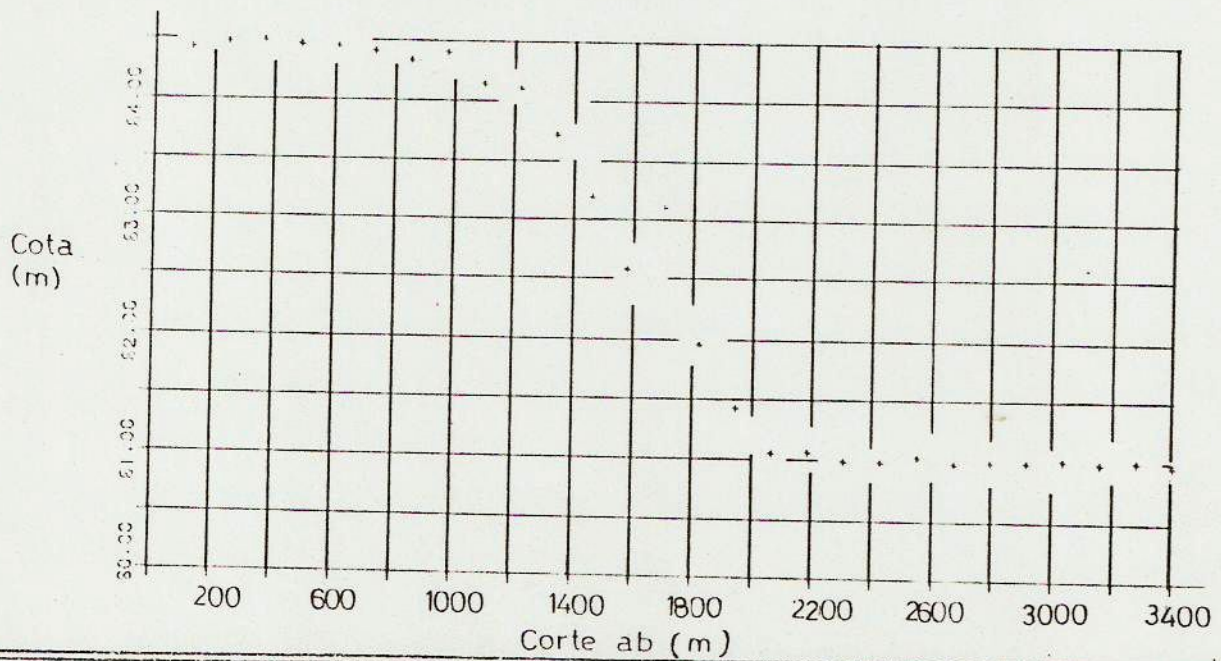
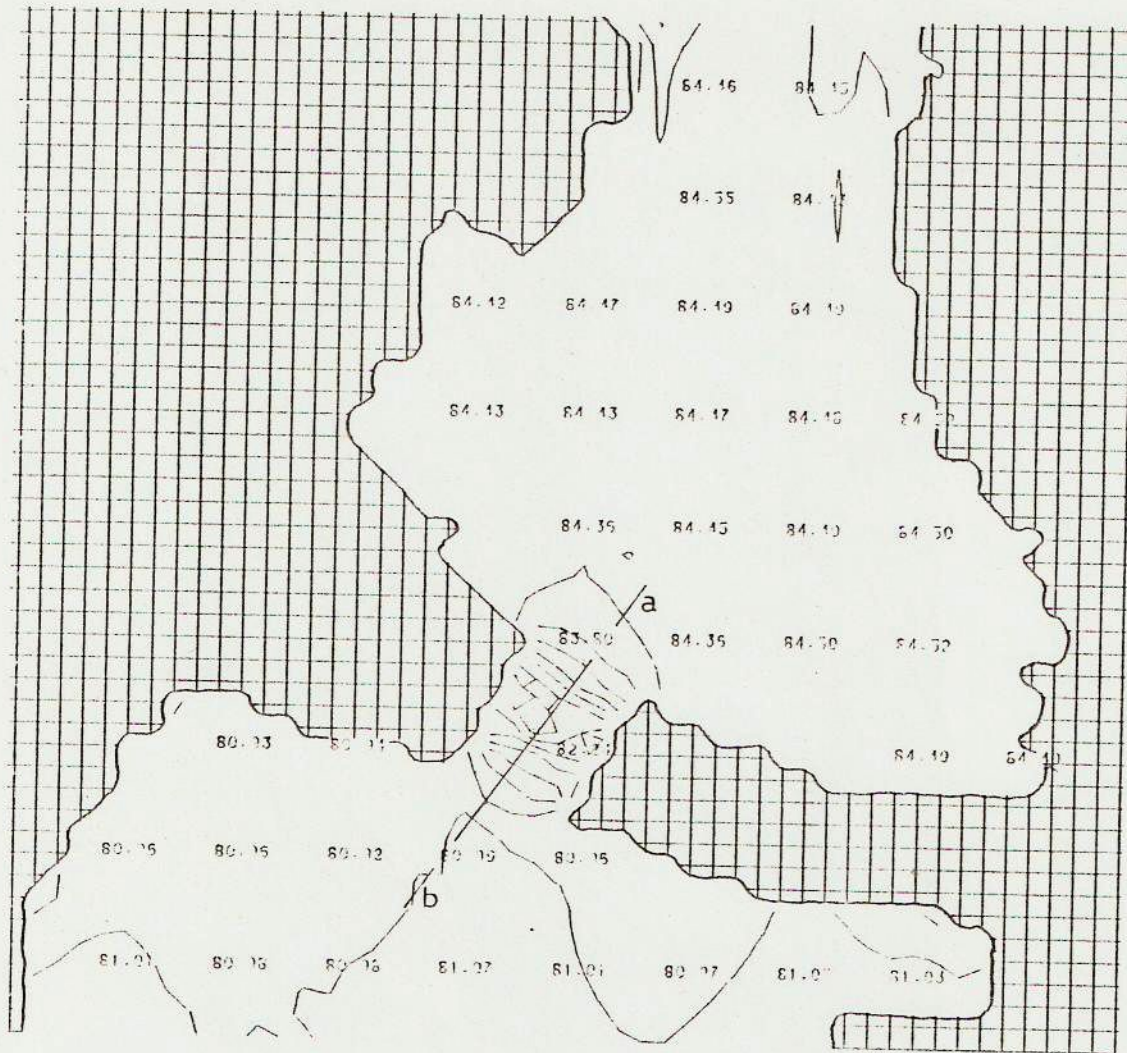
Cálculos basados en un análisis unidimensional dieron un desnivel de 2,9 m y una velocidad de 6,2 m/s en el estrechamiento. Es de esperarse que el modelo matemático sobreestime el desnivel debido a la difusión numérica. Aunque, por otro lado, existen efectos de la topografía y la bidimensionalidad no considerados por el análisis unidimensional.



Líneas de Transporte con Cauce Estrechado

Figura 4.12

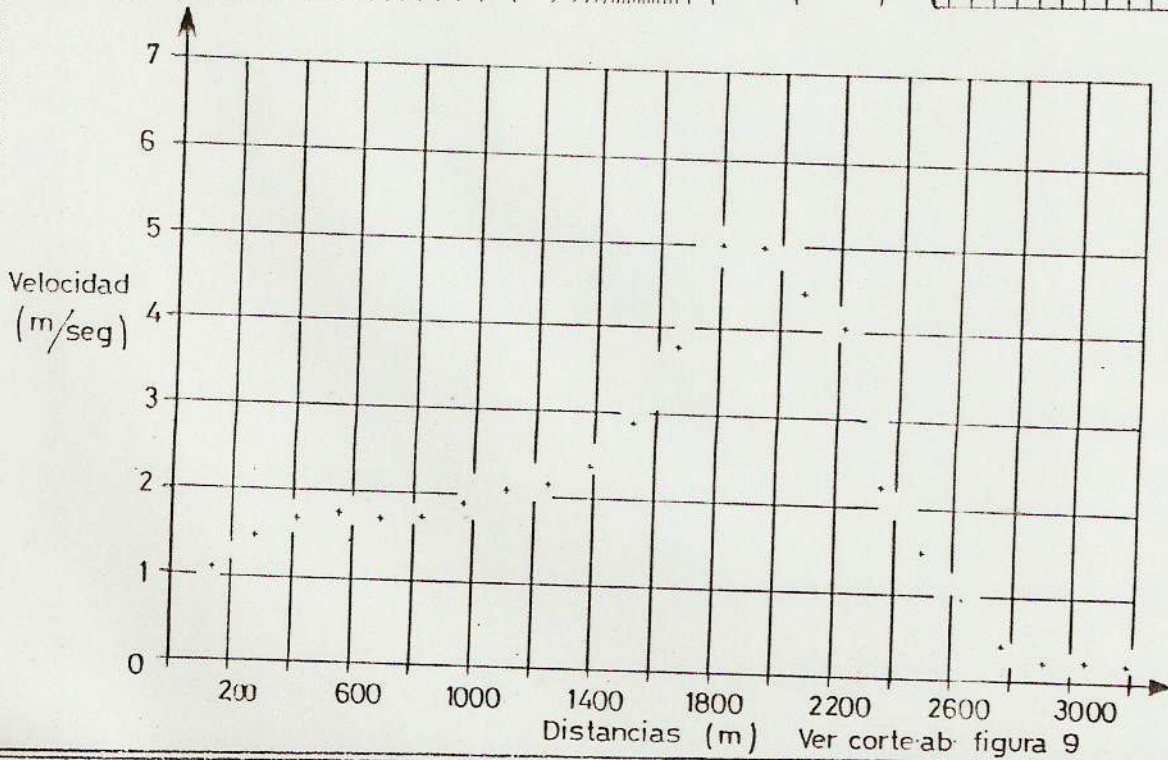
FOR 1A-3



Superficie del Agua con Cauce Estrechado
 (a) Curvas de Nivel
 (b) Vista en Corte

Figura 4.13

FO...IA...



Isotáqueas con el Cauce Estrechado

Figura 4.14

CAPITULO 5

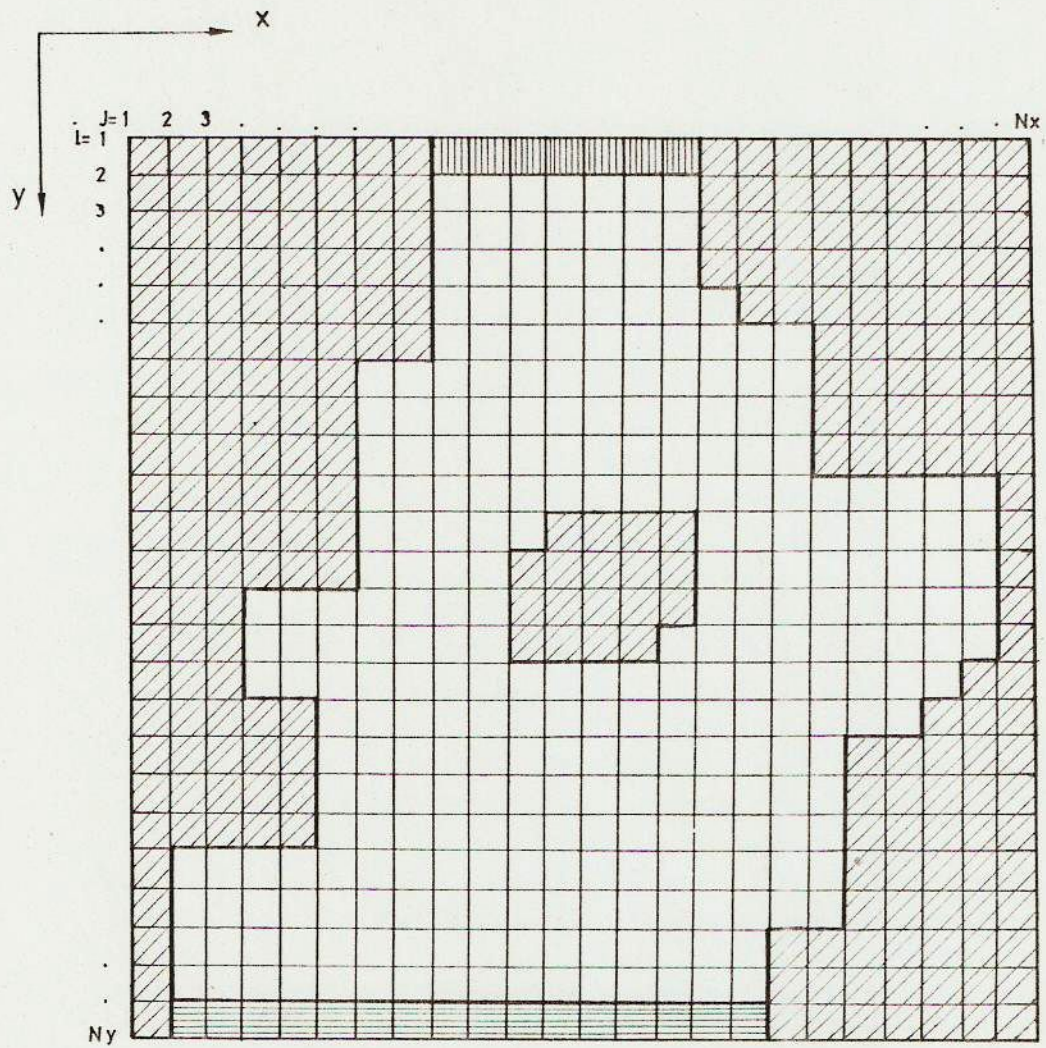
PROGRAMA HIDROBID II





5.1.- Características Generales y Estructura

El procedimiento numérico descrito en el Capítulo 3 ha sido implementado en un programa computacional denominado HIDROBID II. La línea de programas HIDROBID apunta a la simulación numérica de flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre. El HIDROBID I está dirigido a simular la evolución de ondas de frente abrupto, tales como la resultante de la rotura de una presa [19].

El presente programa, HIDROBID II, es apto para simular escurrimientos permanentes en cuencos de topografía arbitraria. Admite contornos costa, de entrada y de salida. La geometría de la costa es arbitraria, pero los contornos de entrada y salida son paralelos entre sí. Un contorno típico, representado en términos de la geometría de la malla, se muestra en la Fig. 5.1. Nótese que se admiten dominios múltiplemente conexos (es decir, puede haber islas).

La estructura en bloques del programa HIDROBID II se presenta en la Fig. 5.2. Se han desarrollado también programas complementarios que leen los resultados numéricos y, tras su elaboración, proveen gráficos del campo de velocidades, las líneas de corriente, las curvas de nivel de las alturas, las isotáqueas y la distribución de alturas y velocidades en un corte dado.



Símbolo	Código	Tipo de Celda
	0	Agua
	1	Tierra
	2	Entrante
	3	Saliente

Representación de un Dominio de Cálculo

Figura 5.1

5.2.- Manual de Operaciones

La operación del programa HIDROBID II requiere la introducción de información tanto por pantalla como por archivos. Los ítems de información a entrar por pantalla (o en un archivo de comandos) son:

- i) Nombre del Archivo de Geometría.
- ii) Nombre del Archivo de Condiciones Iniciales.
- iii) Nombre del Archivo de Resultados.
- iv) Nombre del Archivo de Curiosos.
- v) IS, Q, ν_t (formato I4, 2F7.2)

donde si IS = 0 se lee el Archivo de Condiciones Iniciales y si IS \neq 0 se imponen condiciones iniciales; Q es el caudal de entrada.

- vi) N_t (Formato I4)
- vii) $N_t, \Delta t, Q, \nu_t$ (formato I4, 3F7.2)

donde N_t es el número de pasos de cálculo.

Después del paso v) aparecen en pantalla los valores de los parámetros F, D, E y R, definidos por las Ecs. (3.8) a (3.11). Luego del paso vi), el programa ejecuta N_t pasos de cálculo. El paso vii) se repite, eventualmente cambiando los valores de Δt , Q y/o ν_t , hasta leer un valor de N_t nulo, en cuyo caso el programa para.

Las condiciones iniciales impuestas (IS \neq 0) consisten en una superficie libre nivelada (cota = Z_b ; ver sección 5.2.1.), y flujo unidireccional ($u = 0$) y uniforme en cada sección ($v = Q/A$, donde A es el área de la sección) En el contorno entrante, la velocidad permanece unidireccional y uniforme durante todo el cálculo.

5.2.1.- Archivo de Geometría

En este archivo se provee la siguiente información:

- i) N_y, N_x, Z_b (Formato 2I3, F7.2)
donde Z_b es la cota de la superficie libre en el contorno de salida.
- ii) $\Delta x, \Delta y, \Delta t, n, Z_o$ (Formato 5 F5.2)
donde n es el coeficiente de Manning, y Z_o un nivel de referencia apropiado para las cotas de la superficie libre; este nivel se mide respecto del cero de las cotas de fondo (ver más abajo).
- iii) U_o, h_o, L (Formato 3F5.2)
- iv) $(FF(i, j), j = 1, N_x, i = 1, N_y)$ (Formato 70I1).
donde $FF(i, j)$ es el código de cada celda (ver Fig. 5.1.); en otras palabras, éste es el "mapa" de la región de cálculo.
- v) $(z_o(i, j), j = N_1, N_2, i = 2, N_y)$ (Formato 16 F5.2)
donde N_1 y N_2 corresponden a la primera y última celda agua, respectivamente, de la fila i ; N_1 y N_2 son calculados automáticamente; para las celdas tierra que puedan quedar entre N_1 y N_2 puede asignárseles un valor arbitrario de z_o , ya que éste no se utiliza en los cálculos.

5.2.2.- Archivo de Condiciones Iniciales

Este archivo es estructuralmente idéntico al Archivo de Resultados (ver próxima sección), ya que se obtiene como la salida de una corrida anterior.

5.2.3.- Archivo de Resultados

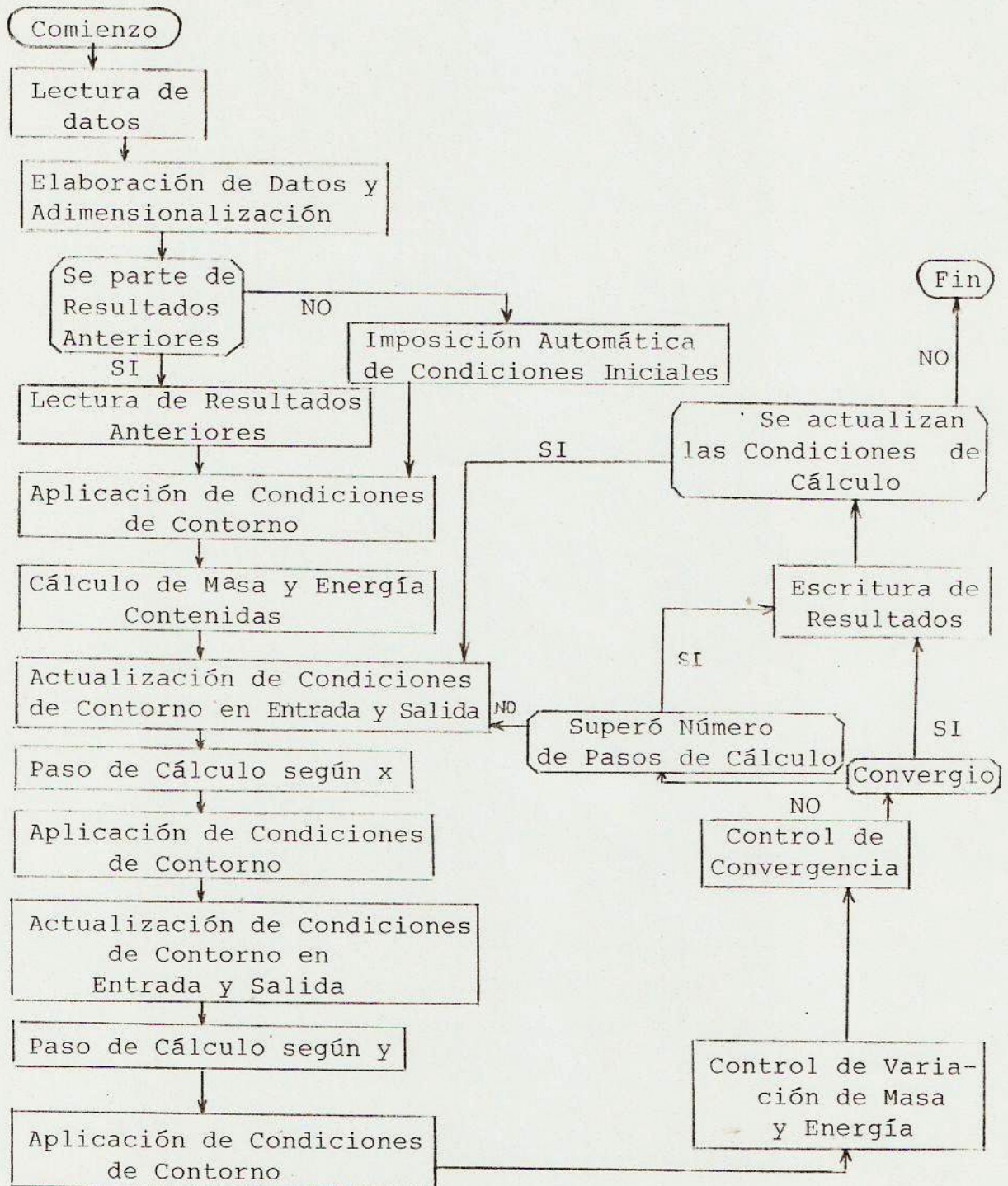
Este archivo de salida provee los valores de la cota $(h + z_0)_{ij}$ y de las componentes de la velocidad $u_{i+1/2j}$ y $v_{i+1/2j}$ desde $j = N_1$ hasta N_2 , para cada fila i , con i desde 1 hasta N_y .

5.2.4.- Archivo de Curiosos

Este es un relativamente pequeño archivo de salida que presenta los valores de la cota de la superficie libre, las componentes de la velocidad y la cota de fondo en la celda media de cada fila, y los valores del caudal que atraviesa cada fila. Este último dato da una idea de la convergencia de la solución numérica a condiciones permanentes (en cuyo caso el caudal es uniforme e igual al valor en la entrada).

Figura N° 5.2.-

Estructura en Bloques del Programa HIDROBID II



CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Se ha presentado, analizado y probado un método numérico para calcular flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre. En términos generales, el método propuesto ha resultado apto como técnica de relajación para el cálculo de escurrimientos en régimen permanente.

El esquema muestra una convergencia más rápida hacia la solución estacionaria que el método de Leendertse, debido al carácter disipativo del primero en el rango de las longitudes de onda cortas, que produce un efecto de filtro. Por la misma causa, el presente procedimiento es más estable. No obstante, aparecen inestabilidades no lineales cuando el paso temporal deviene demasiado grande. Esto se debe a que, para $C_H \rightarrow \infty$, el esquema pierde ese carácter disipativo. Actualmente, se trabaja en la construcción de un método numérico cuyas características de filtrado sean independientes de C_H .

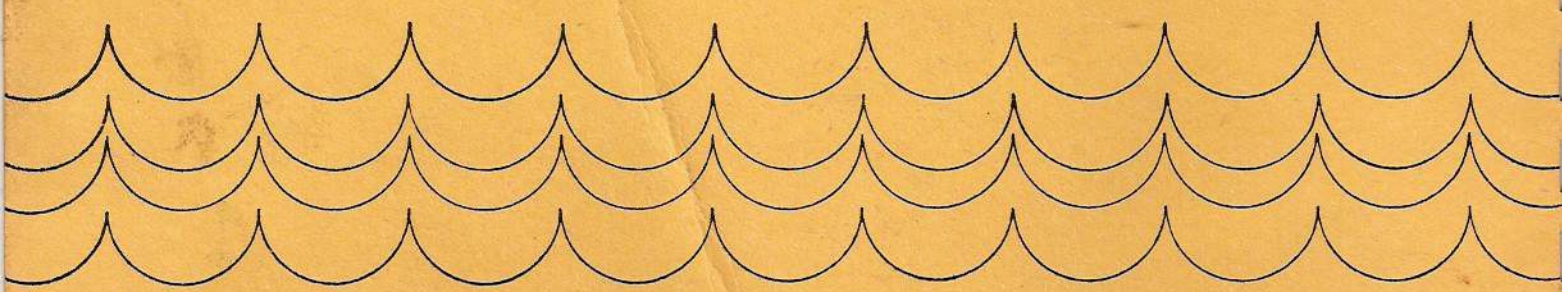
Las pruebas de comparación realizadas con soluciones conocidas, han mostrado que el procedimiento provee una precisión adecuada.

REFERENCIAS

- 1.- WHITHAM, G.B., "Linear and Nonlinear Waves", Wiley - Interscience, New York, 1974.-
- 2.- BATCHELOR, G., "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, U.K., 1967.
- 3.- HINZE, J.O., "Turbulence", Mc Graw-Hill, 1975.
- 4.- FLOKSTRA, C., "The Closure Problem for Depth-Averaged Two-Dimensional Flow", XVII Congress of the International Association for Hydraulic Research, Baden-Baden, August 15-19, 1977.
- 5.- THOMPSON, P.D., "The Equilibrium Energy Spectrum of Randomly Forced Two-Dimensional Turbulence", Journal of Atmospheric Sciences, 30 (8), November 1973, 1593-1598.
- 6.- RODI, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics", International Association for Hydraulics Research State-of-the-Art Paper, Federal Republic of Germany, June 1980.
- 7.- FISHER, H.B., "Longitudinal Dispersion and Turbulent Mixing in Open-Channel Flow", Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 5, 1973.
- 8.- KALKWIJK, J.P. Th., DE VRIEND, H.J., "Computation of the Flow in Shallow River Bends", Journal of Hydraulic Research, 18 (4), 1980.
- 9.- DAUBERT, A., GRAFFE, M.O., "Quelques Aspects des Ecoulements Presque Horizontaux a Deux Dimensions en Plan et Non Permanents Application aux Estuaires", La Houille Blanche, 8, 1967.
- 10.- PONCE, V.M., SIMONS, D.B., "Shallow Wave Propagation in Open Channel Flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 103, (HY12), December 1977.

- 11.-MENDENDEZ, A.N., NORSCINI R., "Spectrum of Shallow Water Waves: An Analysis", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 108 (HY1), January 1982.
- 12.-LEENDERTSE, J.J., "Aspects of a Computational Model for Long-Period Water-Wave Propagation", Rand Memorandum RM-5294-PR, 1967.
- 13.-VREUGDENHIL, C.B., WIJBENGA, J.H.A., "Computation of Flow Patterns in Rivers", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 108 (HY11), November 1982.
- 14.-BOOIJ, R., Discusión a [2], Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110 (1), January 1984.
- 15.-PONCE, V.M., YABUSAKI, S.B., "Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 107 (HY11), November 1981.
- 16.-GUSTAFSSON, B., "An Alternating Direction Implicit Method for Solving the Shallow Water Equations", Journal of Computational Physics, 7, 239-254, 1971.
- 17.-BENQUE, J.P., CUNGE, J.A., FEUILLET, J., HAUGUEL, A., HOLLY, F.M. (Jr), "New Method for Tidal Current Computation", Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE, 108 (WW3), August 1982.
- 18.-WEARE, T.J., "Errors Arising from Irregular Boundaries in ADI Solutions of the Shallow-Water Equations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, 921-931, 1979.
- 19.-MENENDEZ, A.N., "Simulación Numérica Uni y Bidimensional de la Onda de Rotura de Presas", Informe LHA 17-005-80, Agosto de 1980.
- 20.-GARCIA, F.R., "Modelo Matemático Bidimensional para Problemas de Flujo con Superficie Libre", Informe del Instituto de Mecánica de los Fluidos, Universidad Central de Venezuela, Julio de 1984.

- 21.- KATOPODES, N.D., "Two-Dimensional Surges and Shocks in Open Channels", Journal of Hydraulic Engineering, 110 (6), June 1984.
- 22.- Mc GUIRK, J.J., RODI, W., "A Depth-Averaged Mathematical Model for the Near Field of Side Discharges into Open Channel Flow", Journal of Fluid Mechanics, 86, 761-781, 1978.
- 23.- PATANKAR, P.G., Spalding, D.B., "Heat and Mass Transfer in Boundary Layers", Morgan-Crampian, London, 1967.
- 24.- FINDIKAKIS, A.N., STREET, R.L., "Mathematical Description of Turbulent Flows", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 108 (HY8), August 1982.
- 25.- FINDIKAKIS, A.N., STREET, R.L., "Finite Element Simulation of Stratified Turbulent Flows", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 108 (HY8), August, 1982.
- 26.- DAHLQUIST, G., BJÖRK, A., "Numerical Methods", Prentice Hall, 1974.
- 27.- HIRT, C.W., "Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations", Journal of Computational Physics, 2, 339-355, 1968.
- 28.- WARMING, R.F., HYETT, B.J., "The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods", Journal of Computational Physics, 14, 159-179, 1974.
- 29.- LILLY, D.K., "On The Computational Stability of Numerical Solutions of Time-Dependent Non-Linear Geophysical Fluid Dynamics Problems", Monthly Weather Review, 93 (1), January 1965.
- 30.- ISBACH, S.V., LEBEDEV, I.V., "Change of Natural Streams During Construction of Hydraulic Structures", IX Convención del IAHR, 1961.
- 31.- "Estudio del Escurrimiento en la Zona de Corpus con un Modelo Matemático. Informe Complementario", Informe LHA-053-02-85, Agosto 1985.



Laboratorio de Hidráulica Aplicada
Casilla de Correo 21
(1802) Aeropuerto Ezeiza, Prov. Bs. As.
ARGENTINA

Tel. 295 - 1557
295 - 1517
295 - 1562