



*Universidad*   
de Buenos Aires



**Facultad de  
Ingeniería**

**Tesis de Doctorado de la Universidad de Buenos Aires en Ingeniería**

**SEDIMENTACIÓN EN RESERVORIOS:  
MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN  
NUMÉRICA**

**por**

**Pablo Adrián TARELA**



**Octubre 2000**

**Tesis de Doctorado de la Universidad de Buenos Aires en Ingeniería**

**SEDIMENTACIÓN EN RESERVORIOS:  
MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN NUMÉRICA**

Tesista:

**Lic. Pablo A. TARELA**

Director:

**Dr. Angel N. MENÉNDEZ** (LH - Instituto Nacional del Agua)

Presentada:

**octubre de 2000**

Aprobada:

**1 de diciembre de 2000**

Jurado de Tesis:

**Dr. Eduardo N. DVORKIN** (CINI - Fundación para el Desarrollo Tecnológico)

**Dr. Guillermo R. MARSHALL** (FCEN - Universidad de Buenos Aires)

**Dr. Carlos A. VIONNET** (FICH - Universidad Nacional del Litoral)

# AGRADECIMIENTOS

Deseo realizar los siguientes agradecimientos:

Muy especialmente a mi director de tesis, el Dr. Angel N. Menéndez, por su guía en la tarea científica y sus permanentes consejos para que la misma no se aparte del objetivo ingenieril.

A las autoridades del Instituto Nacional del Agua y del Ambiente, y en particular al Ing. Julio C. De Lío, Director del Laboratorio de Hidráulica y del Ambiente (LHA), que permitieron que invierta parcialmente mi tiempo en las tareas dedicadas a esta tesis.

Al Ing. Pablo D. Spalletti, del Programa de Hidráulica Fluvial del LHA, quien eficientemente implementó y operó el modelo *HEC-6*, generando la información utilizada en la comparación entre ese modelo y el presentado en este trabajo.

A la Ing. Marcela Busquets, del Programa de Hidráulica Fluvial del LHA, quien proveyó una importante cantidad de datos del río Bermejo, empleada en la validación global del modelo.

Al Sr. Julio Torchio, del Programa de Hidráulica Computacional del LHA, por su valioso aporte a la operatividad de los equipos de computación empleados durante el desarrollo de este trabajo.

Pablo A. Tarela  
[ptarela@fi.uba.ar](mailto:ptarela@fi.uba.ar)

*Deseo dedicar el presente trabajo a mi esposa Elizabeth y a mi hija Sofía.*

*Chicas, para ustedes, con amor !*

# RESÚMEN

La capacidad natural de transporte de sedimentos de los ríos se ve disminuida, y hasta anulada, cuando estos cursos de agua son interrumpidos por la construcción de presas. El resultado es la sedimentación del material transportado, y la progresiva formación de depósitos que modifican la morfología del reservorio, ocasionando problemas como la disminución de la capacidad de almacenamiento del emprendimiento.

La presente tesis describe la formulación teórica, implementación computacional y validación con datos de campo de un modelo matemático para simular el problema de la sedimentación en reservorios.

El Capítulo 1 presenta un detallado análisis del problema de la sedimentación en reservorios, describiendo los efectos que tiene la construcción de la presa en relación al transporte de sedimentos. También se resumen los antecedentes en la cuantificación del problema, desde las relaciones empíricas tradicionales hasta los modelos matemáticos publicados en la literatura.

La formulación del modelo matemático desarrollado en este trabajo se presenta en dos secciones, correspondientes al modelo hidrodinámico (Capítulo 2) y al modelo sedimentológico (Capítulo 3). En ambos casos, el desarrollo teórico está basado en un riguroso análisis de escalas espaciotemporales, incorporándose en ellos el estado del arte en el conocimiento de la cuantificación de los procesos de interacción entre fluido y sedimento. El modelo es bidimensional integrado en la dirección transversal. A partir de los conocimientos del autor, esta es la primera vez que un modelo de estas características es desarrollado para el problema de la sedimentación en reservorios.

La resolución del modelo matemático se lleva a cabo numéricamente, a través del método de los elementos finitos. En el Capítulo 4 (modelo numérico) se presentan los detalles de la formulación e implementación del esquema numérico, que tiene la particularidad de introducir un nuevo elemento finito, especialmente adaptado al problema de interés.

Para validar el modelo se utilizan datos de campo (Capítulo 5). Se simula la evolución morfológica del lecho del lago Mead (EE.UU.), obteniéndose un muy buen acuerdo entre los datos relevados y las predicciones del modelo, tanto para los perfiles del lecho como para la distribución de tamaños de partícula en los depósitos.

La performance del modelo se contrasta con la del modelo unidimensional HEC-6, uno de los más utilizados en problemas de transporte fluvial de sedimento. Se muestra que el modelo bidimensional ofrece ventajas comparativas respecto del unidimensional.

En el Capítulo 6 se describen los principales aportes de la tesis y las conclusiones del trabajo, a la vez que se sugieren posibles extensiones del mismo.



# ÍNDICE

## **Capítulo 1: INTRODUCCIÓN**

|   |    |
|---|----|
| 1.1 PROBLEMÁTICA DE LA SEDIMENTACIÓN EN RESERVORIOS                   | 1  |
| 1.1.1 Descripción general de los reservorios                          | 1  |
| 1.1.2 Descripción general del proceso de sedimentación en reservorios | 2  |
| 1.1.3 Efectos directos de la presencia de la presa                    | 4  |
| 1.2 ANTECEDENTES EN LA CUANTIFICACIÓN DEL PROBLEMA                    | 8  |
| 1.2.1 Métodos empíricos   | 8  |
| 1.2.1.1 Pérdida de capacidad  | 8  |
| 1.2.1.2 Distribución de los depósitos de sedimento                    | 11 |
| 1.2.2 Estudios de campo y laboratorio                                 | 14 |
| 1.2.3 Modelos matemáticos 1D  | 16 |
| 1.2.4 Modelos matemáticos 2D  | 17 |
| 1.2.5 Modelos matemáticos 3D  | 19 |
| 1.2.6 Análisis de performance   | 20 |
| 1.3 OBJETIVO DE LA TESIS  | 21 |

## **Capítulo 2: MODELO HIDRODINÁMICO**

|   |    |
|---|----|
| 2.1 DELIMITACIÓN FÍSICA DEL PROBLEMA                  | 22 |
| 2.2 ESCALAS ESPACIALES                                | 22 |
| 2.3 HIPÓTESIS   | 25 |
| 2.4 ESCALAS RESUELTAS Y NO RESUELTAS                  | 27 |
| 2.5 LEYES DE CONSERVACIÓN                             | 28 |
| 2.6 EFECTOS INTEGRADOS DE TURBULENCIA Y FLUJO LATERAL | 29 |
| 2.6.1 Tratamiento de la turbulencia                   | 29 |
| 2.6.2 Tratamiento del flujo medio lateral             | 30 |
| 2.6.3 Tratamiento combinado                           | 31 |
| 2.6.4 Difusión turbulenta                             | 35 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2.7 PARABOLIZACIÓN DE LAS ECM</b>  | <b>35</b> |
| 2.7.1 Orden de magnitud de la velocidad vertical  | 36        |
| 2.7.2 Orden de magnitud de los términos del tensor de tensiones efectivas                 | 36        |
| 2.7.2.1 <i>Relación entre las tensiones viscosas y turbulentas</i>                        | 36        |
| 2.7.2.2 <i>Relación entre las tensiones turbulentas</i>                                   | 36        |
| 2.7.2.3 <i>Relación entre las tensiones dispersivas</i>                                   | 37        |
| 2.7.2.4 <i>Relación entre las tensiones dispersivas y la difusión turbulenta vertical</i> | 38        |
| 2.7.3 Orden de magnitud de los términos geométricos                                       | 40        |
| 2.7.4 Ecuaciones de movimiento a resolver: forma parabólica                               | 41        |
| <b>2.8 ANALISIS DIMENSIONAL DE LAS ECM</b>  | <b>42</b> |
| 2.8.1 ECMz: distribución de presiones   | 42        |
| 2.8.2 ECMx: modelos estáticos y dinámicos   | 43        |
| <b>2.9 CIERRE DEL MODELO</b>  | <b>44</b> |
| 2.9.1 Condiciones de borde en el fondo  | 44        |
| 2.9.2 Condiciones de borde en la superficie libre   | 45        |
| 2.9.3 Modelo algebraico para la viscosidad de torbellino                                  | 46        |
| 2.9.4 Borde inferior del modelo   | 48        |
| 2.9.5 Condiciones iniciales   | 49        |

## **Capítulo 3: MODELO SEDIMENTOLÓGICO**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>3.1 INTRODUCCIÓN</b>  | <b>52</b> |
| <b>3.2 HIPÓTESIS</b>   | <b>53</b> |
| <b>3.3 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN SUSPENSIÓN</b>      | <b>55</b> |
| 3.3.1 Conservación de la masa de cada fracción                       | 55        |
| 3.3.2 Promedio de Reynolds e integración lateral                     | 57        |
| 3.3.3 Difusión turbulenta de partículas                              | 59        |
| <b>3.4 PARABOLIZACIÓN DE LAS ETS</b>                                 | <b>61</b> |
| 3.4.1 Orden de magnitud de los términos de flujo dispersivo-difusivo | 61        |
| 3.4.2 Orden de magnitud de los términos geométricos                  | 62        |
| 3.4.3 Ecuaciones de transporte a resolver: forma parabólica          | 62        |
| <b>3.5 CIERRE DEL MODELO DE TRANSPORTE EN SUSPENSIÓN</b>             | <b>63</b> |
| 3.5.1 Velocidad de caída de las partículas                           | 63        |
| 3.5.1.1 Material granular  | 63        |
| 3.5.1.2 Material cohesivo  | 64        |
| 3.5.2 Condición de borde en la superficie libre                      | 65        |
| 3.5.3 Condición de borde en el fondo                                 | 65        |
| 3.5.3.1 Material granular  | 67        |
| 3.5.3.2 Material cohesivo  | 68        |
| 3.5.3.3 Ubicación del fondo de intercambio de partículas             | 70        |

---

|   |    |
|---|----|
| 3.5.4 Condiciones iniciales                                   | 71 |
| 3.5.4.1 Material granular                                     | 71 |
| 3.5.4.2 Material cohesivo                                     | 72 |
| 3.5.4.3 Concentración total                                   | 73 |
| 3.6 MODELO DE TRANSPORTE DE FONDO                             | 73 |
| 3.7 MODELO DE EVOLUCIÓN DEL LECHO                             | 74 |
| 3.7.1 Evolución morfológica                                   | 74 |
| 3.7.2 Distribución de partículas en el lecho                  | 75 |
| 3.7.3 Compactación  | 76 |
| 3.7.4 Rugosidad de fondo                                      | 78 |
| 3.7.4.1 Rugosidad de piel                                     | 78 |
| 3.7.4.2 Rugosidad por forma                                   | 79 |
| 3.7.4.3 Estabilidad y rangos de existencia de formas de fondo | 79 |
| 3.7.4.4 Predictor de rizos                                    | 81 |
| 3.7.4.5 Predictor de dunas                                    | 81 |

## **Capítulo 4: MODELO NUMÉRICO**

|  |     |
|--|-----|
| 4.1 ESQUEMA DE MARCHA Y MÉTODO CUASI-ESTACIONARIO        | 83  |
| 4.2 FORMULACIÓN DE RESIDUOS PONDERADOS                   | 84  |
| 4.3 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS                 | 86  |
| 4.3.1 Desarrollo de elemento finito de 6 nodos           | 87  |
| 4.3.2 Elección de las funciones de peso                  | 89  |
| 4.3.3 Forma discretizada de las ecuaciones de movimiento | 90  |
| 4.4 CONSISTENCIA Y ERROR DE DISCRETIZACIÓN               | 92  |
| 4.5 ESTABILIDAD  | 96  |
| 4.5.1 Estabilidad del campo de presión                   | 96  |
| 4.5.2 Estabilidad del campo de velocidad                 | 96  |
| 4.5.3 Precisión  | 98  |
| 4.5.4 Efecto de la integración numérica                  | 99  |
| 4.6 DISCRETIZACIÓN PARA EL TRANSPORTE DE SEDIMENTOS      | 99  |
| 4.6.1 Formulación débil y de elementos finitos           | 99  |
| 4.6.2 Consistencia y error de discretización             | 101 |
| 4.7 OTROS ASPECTOS NUMÉRICOS                             | 103 |
| 4.7.1 Superficie libre                                   | 103 |
| 4.7.2 Red de elementos finitos                           | 104 |
| 4.7.3 Tensión efectiva en el lecho                       | 106 |
| 4.7.4 Paso de tiempo                                     | 109 |
| 4.7.5 Conservación de la masa                            | 114 |
| 4.7.6 Efectos de la rugosidad del fondo                  | 114 |

## **Capítulo 5: VALIDACIÓN DEL MODELO**

|   |     |
|---|-----|
| 5.1 INTRODUCCIÓN                              | 117 |
| 5.2 VALIDACIÓN GLOBAL                         | 117 |
| 5.3 VALIDACIÓN DE DETALLE                     | 123 |
| 5.3.1 Descripción general del lago Mead       | 123 |
| 5.3.2 Extensión del modelo y período simulado | 127 |
| 5.3.3 Series temporales de datos              | 127 |
| 5.3.4 Datos batimétricos                      | 131 |
| 5.3.5 Datos sedimentológicos                  | 132 |
| 5.3.6 Implementación del modelo               | 138 |
| 5.3.7 Resultados del modelo                   | 141 |
| 5.4 COMPARACIÓN CON EL MODELO HEC-6           | 152 |
| 5.4.1 Características del modelo              | 152 |
| 5.4.2 Implementación del modelo               | 153 |
| 5.4.3 Resultados del modelo y comparación     | 155 |

## **Capítulo 6: CONCLUSIONES**

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 6.1 PRINCIPALES CONCLUSIONES       | 161 |
| 6.2 APORTES ORIGINALES DE LA TESIS | 161 |
| 6.3 APORTES SECUNDARIOS            | 162 |
| 6.4 EXTENSIONES DEL TRABAJO        | 163 |

## **REFERENCIAS**

## **ANEXO 1: CONDICIONES DE CONTORNO HIDRODINÁMICAS**

|   |      |
|---|------|
| A1.1 CONDICIONES DE CONTORNO EN EL CAUCE            | A1.1 |
| A1.2 CONDICIONES DE CONTORNO EN LA SUPERFICIE LIBRE | A1.4 |

## **ANEXO 2: PROMEDIO DE REYNOLDS E INTEGRACIÓN LATERAL DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO**

|   |      |
|---|------|
| A2.1 DESCOMPOSICIÓN DE LAS VARIABLES DE CAMPO | A2.1 |
| A2.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD                  | A2.1 |
| A2.3 ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO     | A2.3 |
| A2.4 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS   | A2.6 |

---

**ANEXO 3: RELACION ENTRE LA ALTURA EFECTIVA Y EL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD**

|                                    |             |
|------------------------------------|-------------|
| <u>A3.1 FORMULACIÓN DEL MODELO</u> | <u>A3.1</u> |
| <u>A3.2 VALIDACIÓN DEL MODELO</u>  | <u>A3.3</u> |
| <u>A3.3 MODELO ALTERNATIVO</u>     | <u>A3.7</u> |

**ANEXO 4: METODOLOGÍAS PARA PREDECIR LA CONCENTRACIÓN DE ARENA DE EQUILIBRIO EN EL LECHO**

|   |             |
|---|-------------|
| <u>A4.1 MÉTODO DETERMINÍSTICO DE VAN RIJN</u> | <u>A4.1</u> |
| <u>A4.2 MÉTODO ESTOCÁSTICO DE VAN RIJN</u>    | <u>A4.3</u> |
| <u>A4.3 MÉTODO DE ENGELUND Y FREDSOE</u>      | <u>A4.7</u> |

**ANEXO 5: MODELOS DE TRANSPORTE DE FONDO**

|   |             |
|---|-------------|
| <u>A5.1 MÉTODO DETERMINÍSTICO DE VAN RIJN</u> | <u>A5.1</u> |
| <u>A5.2 MÉTODO ESTOCÁSTICO DE VAN RIJN</u>    | <u>A5.1</u> |
| <u>A5.3 MÉTODO DE ENGELUND Y FREDSOE</u>      | <u>A5.2</u> |

**ANEXO 6: FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN**

|   |             |
|---|-------------|
| <u>A6.1 FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DE VELOCIDAD Y PRESIÓN</u> | <u>A6.1</u> |
|---|-------------|

**ANEXO 7: FORMA DISCRETIZADA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO**

|  |             |
|--|-------------|
| <u>A7.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD</u>                | <u>A7.1</u> |
| <u>A7.2 ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO</u>   | <u>A7.2</u> |
| <u>A7.3 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS</u> | <u>A7.3</u> |



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 PROBLEMÁTICA DE LA SEDIMENTACIÓN EN RESERVORIOS

#### 1.1.1 Descripción general de los reservorios

Uno de los pilares del desarrollo social y económico es el manejo racional del agua dulce. Las mayores acumulaciones de este elemento, debidas a la acción del hombre, se encuentran en los reservorios: se trata de lagos artificiales donde se almacena agua para uso futuro. La formación de los reservorios se logra interrumpiendo el flujo de uno o varios ríos, a través de la construcción de presas de embalse (consideradas por muchos las mayores obras realizadas por el hombre). Hacia 1974, el volumen de agua almacenado en todos los reservorios del mundo se estimó en 4.9 millones de  $\text{hm}^3$ , esto es, alrededor del 13% de la escorrentía total anual (Sloff 1991). A principios de los noventa, la cifra se elevó a 5.5 millones de  $\text{hm}^3$ .

Su utilidad es variada:

- Suministro de agua: para consumo humano, irrigación y/o uso industrial
- Generación de electricidad
- Control de crecidas
- Regulación de caudal: para navegación o calidad de agua
- Acuicultura
- Recreación

En la década del noventa, aproximadamente el 20% de la producción primaria mundial de energía eléctrica provino de la generación en las presas. Durante el siglo XX, el número de presas en el mundo se incrementó desde 1.000 hasta 36.000, de las cuales el 85% se construyeron en la segunda mitad del siglo (Veltrop 1991). Debido al desarrollo económico acelerado, el crecimiento de la población mundial y la expansión de la agricultura por irrigación, se espera un gran crecimiento futuro en el volumen almacenado y el número de reservorios. Sin embargo, también existe una creciente resistencia a la construcción de nuevas presas, de variada naturaleza (ambiental, social, cultural, política y económica) y fundada en el peligro del gran impacto que puede producir el emprendimiento.

Se puede señalar una serie de diferencias entre los reservorios artificiales y los lagos naturales (Sloff 1991):

- Los reservorios están generalmente alimentados por un solo río, y más influenciados por las características del área de drenaje

- La profundidad media es menor que en los lagos. Una acción suficientemente fuerte del viento puede prevenir la estratificación térmica, causando circulación vertical completa
- En general, el reservorio tiende a llenar el valle fluvial (a menudo estrecho) con lo que su forma resulta ser más o menos alargada, con la parte más profunda cerca de la presa
- La descarga puede ser subsuperficial (aliviadores de fondo) o superficial (vertederos). En los lagos es casi siempre superficial
- El tiempo de residencia, definido como el cociente entre el volumen y el caudal erogado, es pequeño comparado con el de los lagos
- Los procesos biológicos en el reservorio están más fuertemente influenciados por el material transportado por el río

El agua ingresa al reservorio desde el río principal y, eventualmente, desde ríos tributarios. Menos importante resulta el ingreso superficial por escorrentía, precipitación sobre el espejo de agua, descargas de efluentes o bombeo. El balance hídrico se complementa con los egresos de agua, debidos esencialmente a las descargas, pero también a la liberación por vertederos, evaporación a través de la superficie e infiltración subterránea.

En un reservorio para múltiples propósitos, el volumen almacenado útil se encuentra entre los niveles mínimos de los vertederos y los descargadores de fondo. La franja superior se utiliza para el control de crecidas (hasta el nivel normal de embalse), por debajo para generación hidroeléctrica (hasta el nivel mínimo de operación) y finalmente para regulación (hasta el descargador más profundo). Por debajo de este nivel se encuentra el “volumen muerto”, a menudo previsto para alojar sedimento y prevenir un eventual vaciado total del reservorio (con consecuencias ambientales y ecológicas negativas). Se ha estimado que el volumen muerto representa un tercio de la capacidad mundial almacenada en los reservorios (Sloff 1997). Por encima del nivel mínimo de los vertederos el volumen no puede ser retenido. Estas dos últimas zonas constituyen las componentes no útiles del volumen presente en un reservorio.

Alrededor del 80% de las presas tienen una altura de entre 15 y 30m, el 15% está entre 30 y 60m y solo el 5% supera los 60m, alcanzando como máximo los 300m.

### **1.1.2 Descripción general del proceso de sedimentación en reservorios**

Un río es, esencialmente, un sistema que transporta agua, sedimentos y biomasa, de forma tal que, si se construye una presa en su curso, se produce un corte abrupto de la capacidad de transporte. El agua tiende a acumularse, los sedimentos a depositarse y la biomasa a transformarse.

En el caso particular del sedimento, las partículas son erosionadas de diferentes maneras y en distintas áreas, y transportadas por la escorrentía y el viento, hasta que alcanzan el río. El transporte dentro del curso de agua se prolonga hasta que las condiciones hidráulicas conducen a la deposición: esto ocurre, por ejemplo, en el reservorio formado por la construcción de una presa.

En la zona donde el río vierte sus aguas al reservorio, denominada boca o cabecera, el incremento de la sección de flujo produce la disminución de la fuerza de arrastre ejercida sobre las partículas del lecho, de forma tal que el material grueso (arena) tiende a depositarse, formando un delta (ver figura 1.1).

La forma y localización del delta depende de diversos factores: pendiente del valle, longitud del reservorio, tamaño y distribución del sedimento, forma del cauce, operación del reservorio,

caudal líquido y sólido, etc.. Además, el delta crece en ambas direcciones (aguas arriba y aguas abajo de la cabecera), y puede estar sumergido parcial o totalmente. Cuando el delta está superficialmente expuesto, se desarrollan uno a varios canales de flujo, dependiendo del nivel de embalse, el caudal entrante y las características del sedimento. En general, cuando aumenta el caudal se forma un solo canal, en lugar de diversos brazos (Sloff 1991). De todas formas, la predicción de estos procesos es extremadamente difícil.

En la parte del delta donde el río penetra en el reservorio tiene lugar un flujo de transición entre las condiciones netamente fluviales y las del reservorio, y la carga de fondo se acumula formando la cola del delta. La pendiente en esta zona es alrededor del 50 al 66% de la pendiente original, permaneciendo aproximadamente constante durante el crecimiento del delta (que, entonces, se eleva en capas paralelas). A una cierta distancia la cola se continúa abruptamente en el frente del delta, cuya pendiente es del orden de 6.5 veces la pendiente de la cola. A partir de experimentos, Schalchli concluye que (sin corrientes de turbidez) el frente se vuelve más empinado, hasta alcanzar cierto ángulo (Schalchli 1987).

Las variaciones estacionales fuertes en el nivel de embalse pueden ocasionar la formación de múltiples frentes. De todas formas, en la parte expuesta del delta tiene lugar la acción local de olas y la corriente litoral, que tienden a suavizarlos. A menudo, las áreas más elevadas se cubren de vegetación, previniendo la circulación de agua e incrementando la evapotranspiración.

La progresiva reducción de la turbulencia produce que las partículas más finas (limo y arcilla) se depositen aguas abajo del delta, incluso llegando hasta la presa, formando los depósitos de fondo (ver figura 1.1). Estos están más esparcidos por el reservorio, acumulándose en capas que tienden a consolidarse en el tiempo, debido a la acción de la sobrepresión ejercida por las capas superiores y la columna de agua, formando un fondo denso difícil de erosionar.

El transporte del sedimento fino depende principalmente de la circulación de agua, que en el reservorio está manejada, mantenida y amplificada por el flujo entrante desde el río. Eventualmente, una concentración elevada de material fino es capaz de inducir el desarrollo de una corriente de turbidez, que puede alcanzar la presa y formar un depósito o lago de lodo en la zona del volumen muerto del reservorio (ver figura 1.1).

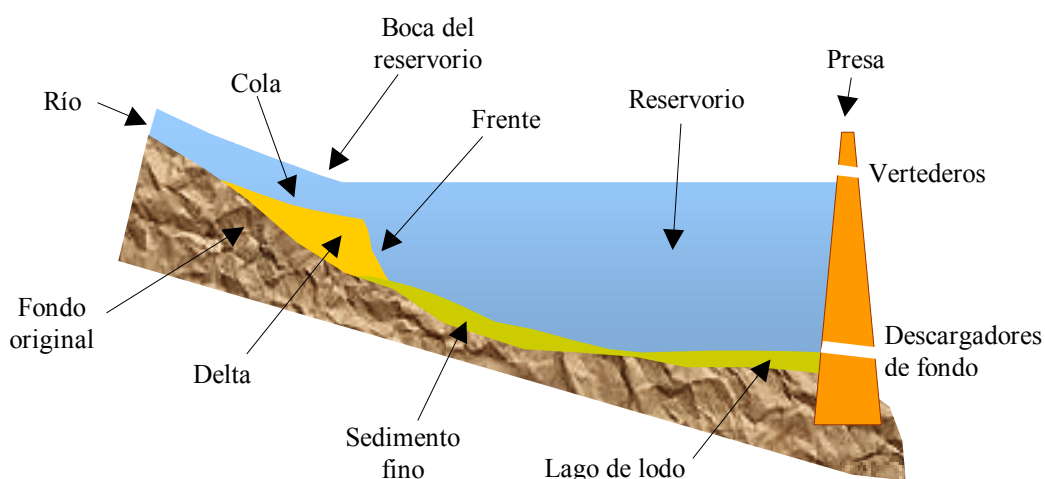


Figura 1.1 – Esquema del proceso de sedimentación en un reservorio.

### 1.1.3 Efectos directos de la presencia de la presa

La construcción de la presa produce una drástica modificación del sistema preexistente, incluyendo tanto el balance hidrosedimentológico como el biológico. En particular, el proceso global de sedimentación en reservorios genera efectos directos de interés multidisciplinario: ingenieril, operacional, ambiental, económico, regulatorio y legal. Ellos requieren ser evaluados, predichos y manejados correctamente, con el fin de que el emprendimiento sea sustentable. A continuación se citan algunos efectos de la presencia de una presa, con énfasis en aquellos relacionados al transporte de sedimentos, tanto de interés ingenieril como ambiental:

- *Pérdida de capacidad de almacenamiento*

La capacidad de transporte de sedimento se reduce drásticamente al pasar de la zona fluvial al reservorio propiamente dicho, produciendo que las partículas tiendan a depositarse en el fondo de este último. Esto implica que el vaso hidráulico pierde volumen disponible para almacenamiento de agua a expensas de la ocupación por parte del sedimento. Este proceso ocasiona la colmatación progresiva del embalse, reduciendo la vida útil de la obra, cuyo cómputo es un parámetro de diseño primordial. Donde existen diversas opciones para el desarrollo del recurso hídrico, la vida útil del reservorio es, probablemente, el factor individual más importante para determinar la viabilidad económica del emprendimiento.

En general, la pérdida de capacidad de almacenamiento de agua puede tener efectos económicos tanto de corto como de largo plazo. Hacia el año 1948, se estimó que, solamente en EE.UU., los daños anuales alcanzaban los \$ 50 millones (Graf 1983a), con un volumen depositado del orden de los 1200 hm<sup>3</sup> a mediados de los años sesenta. A fines de esa década, teniendo en cuenta principalmente reservorios para generación de electricidad, la tasa media anual de sedimentación (medida en términos de la capacidad útil) se calculó en 1.71% para Japón, 1.16% en EE.UU., 0.57% en la India y 4.51% en China (Wada 1994). Para el año 1975, el análisis de más de mil reservorios en EE.UU. determinó una pérdida promedio anual del orden del 0.2% de la capacidad total (Graf 1984). En Brasil, donde el 95% de las presas está destinada a la generación de energía eléctrica, se estima una pérdida anual del 0.5% del volumen útil debido al ingreso de sedimento en los reservorios (Mendonzo 1998). Otras estimaciones indican una tasa de pérdida media anual de alrededor del 1% de la capacidad mundial instalada (Sloff 1997). La severidad del problema ha sido confirmada por un informe del Banco Mundial, que estima la pérdida de capacidad global en alrededor de 50.000 hm<sup>3</sup>, o su equivalente en costos de reemplazo, \$ 6.000 millones anuales (Fan y Springer 1993).

En forma particular, algunos reservorios presentan una tasa de pérdida de capacidad mayor: el reservorio Sanmenxia en China pierde alrededor del 1.7% anualmente, el reservorio Sefid-Rud en Irán alrededor del 2% y el reservorio Welbedacht en Sudáfrica alrededor del 5%.

Si el reservorio es utilizado para generar hidroelectricidad, la disminución en la capacidad de almacenamiento puede ser medida directamente en términos de una reducción neta de potencia. En el caso en que el reservorio también sea utilizado para controlar crecidas, se puede incrementar la frecuencia y magnitud de los daños por crecidas, tanto aguas arriba como aguas abajo de la presa, debido a la pérdida de volumen para alojar los excedentes. Además, el menor volumen disponible ocasiona que parte del agua que podría ser utilizada para riego se pierda por los vertederos, al no poder ser almacenada en las épocas de crecida del río.

La figura 1.2 muestra el patrón de sedimentación en cinco reservorios de EE.UU., poniendo de manifiesto la pérdida de capacidad debido a este fenómeno (Graf 1983a).

- *Acumulación de sedimentos aguas arriba del reservorio*

El crecimiento de un depósito en forma de delta, en la boca del reservorio, produce el desarrollo de un remanso en la dirección aguas arriba, el cual induce la acumulación de sedimento. El depósito se extiende gradualmente aguas arriba, y puede ocasionar el incremento del nivel de inundación durante las crecidas, en el área aguas arriba del reservorio, o elevar el nivel freático en el tramo afectado por el remanso.

El remanso fluctúa de acuerdo a las variaciones en el nivel de embalse, por lo cual la región afectada tiene características duales: tipo reservorio (artificial, con tendencia a la deposición) para niveles de embalse altos, y tipo fluvial (natural, con tendencia erosiva) durante las etapas de bajo nivel.

Además, la aparición del delta causa condiciones desfavorables para las especies de peces presentes, y dificulta la navegación, aunque estabiliza los márgenes del río y crea nuevas tierras fértiles.

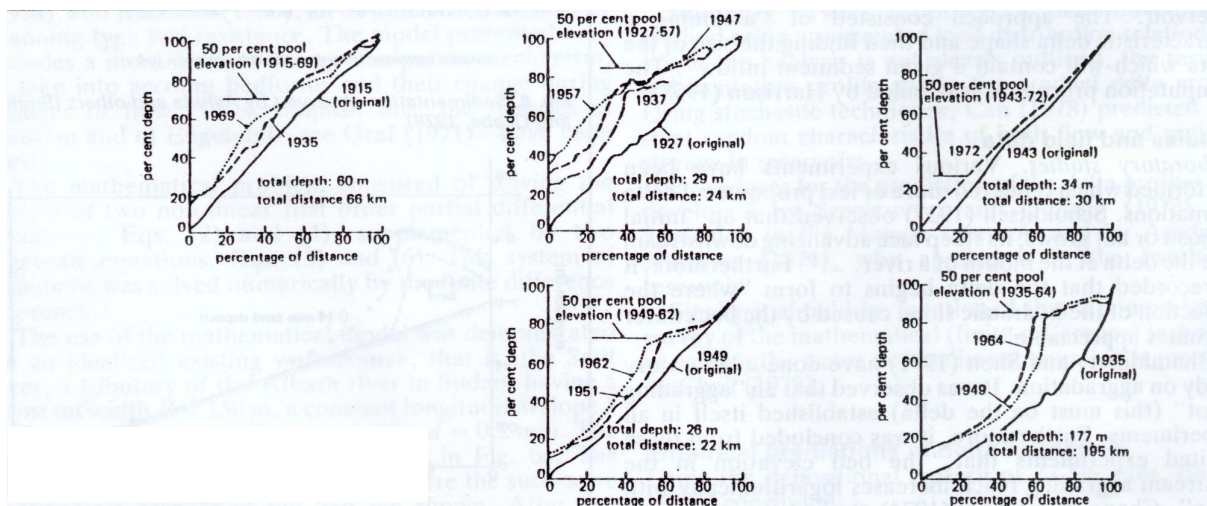


Figura 1.2 – Perfiles de sedimentación en reservorios de EE.UU. En sentido horario, comenzando arriba a la izquierda: reservorio Elephant Butte, lago H. Strunk, reservorio Guernsey, lago Mead y reservorio S. Martin.

- *Control de crecidas y niveles de agua en el río aguas abajo de la presa*

Como se mencionó anteriormente, a consecuencia del llenado progresivo del vaso hidráulico por parte del sedimento depositado, se reduce el volumen disponible para alojar crecidas, disminuyendo la capacidad de regulación del reservorio. Durante la operación normal del embalse la descarga hacia aguas abajo es más regular que en la situación natural. Los caudales extremadamente bajos ocurren mucho menos frecuentemente. Además, la regulación de las crecidas disminuye el paso de los caudales más altos. Esto influye sobre la planicie de inundación, que sufre un drenaje excesivo y disminuye su extensión efectiva, y tiene efectos sobre la agricultura, la pesca, etc..

Normalmente, la operación del reservorio no modifica el nivel de agua subterránea en la zona aguas abajo de la presa. Sin embargo, cuando ocurre excesiva evaporación en el embalse, o se toma demasiada agua para uso doméstico o rural, el caudal medio anual erogado puede ser inferior al natural, presente antes de la construcción de la presa. Esto, sumado al filtrado de las crecidas, implica que se puede esperar una disminución del nivel freático en la zona señalada anteriormente, con impactos sobre la vegetación, la vida silvestre o la agricultura (Kerssens y van der Zwaard 1980).

- *Erosión y modificación del curso aguas abajo de la presa*

Debido a la construcción y operación de la presa, la sedimentación aguas abajo de la misma se ve afectada principalmente por tres factores:

- ♦ Normalmente, la mayoría de los sedimentos que llegan al reservorio se depositan, lo que produce la erosión del curso aguas abajo de la presa, el cual se vuelve “hambriento de sedimentos” por la evacuación de aguas claras.
- ♦ Aguas abajo de la presa se pueden presentar problemas de acumulación de sedimentos en las uniones con tributarios con grandes cargas de sedimentos.
- ♦ El cambio del caudal derivado desde la presa, respecto de los patrones naturales, puede ocasionar la modificación del canal de flujo.

El curso principal aguas abajo tiende a alcanzar un nuevo equilibrio, con una capacidad de transporte correspondiente al caudal sólido erogado por la presa. La mayoría de los sedimentos gruesos y gran parte de los finos son retenidos en el reservorio, y el equilibrio se alcanza mediante la disminución de la pendiente del fondo y la modificación drástica de la distribución de tamaños en el fondo (tendencia al aumento del grano medio).

La erosión se puede propagar aguas abajo sobre grandes distancias, con valores reportados de más de 600 km (Sloff 1991), disminuyendo los niveles de agua a lo largo de todo el curso. Esto puede ocasionar el excesivo drenaje de la planicie de inundación, erosión en los tributarios y disminución del nivel freático. La fertilidad de la planicie de inundación se ve, en tal caso, afectada negativamente debido a la disminución del suministro de limo y arcilla atrapados en el reservorio.

También pueden llegar a observarse impactos favorables. Por ejemplo, el mejoramiento de la navegación, gracias a que el nuevo canal puede presentar un ancho más estable, con incremento del ancho y la profundidad y desaparición de barras peligrosas, todo debido al efecto de la erosión. Sin embargo, la migración de las barras puede causar sedimentación excesiva en marinas y puertos aguas abajo.

- *Erosión de márgenes*

Puede ocurrir tanto detrás de la presa como en el curso inmediatamente aguas abajo de ella. En el caso de un emprendimiento para generación de electricidad, el flujo emitido desde la planta está regulado por la demanda de energía del sistema servido por la misma; la operación descuidada puede causar fluctuaciones rápidas de los niveles aguas abajo, con la posibilidad de producir serios problemas de erosión de márgenes. Por ejemplo, la parada repentina de las turbinas, con la detención del flujo asociada a ella, puede generar inestabilidad de los taludes debido a la sobrepresión del agua subterránea.

- *Efectos sobre las obras de ingeniería*

La sedimentación en el reservorio puede bloquear progresivamente las tomas para generación y los descargadores de fondo. El paso del sedimento a través de la planta generadora puede también causar problemas de erosión en los revestimientos de las estructuras de la planta y en las turbinas, requiriendo la reparación frecuente de las maquinarias.

Los cambios en el nivel de agua, como los morfológicos (erosión aguas abajo de la presa, erosión de márgenes, sedimentación aguas arriba) pueden amenazar la estabilidad de las estructuras en y a lo largo del río, como las tomas, estaciones de bombeo, pilas de puentes, lugares de amarre de embarcaciones, etc. (Kerssens y van der Zwaard 1980).

- *Efectos ambientales*

Debido al proceso de sedimentación en un reservorio, se pueden producir efectos con impacto ambiental en:

- ◆ Calidad de las aguas
- ◆ Acumulación de tóxicos en los sedimentos suspendidos y depositados
- ◆ Eutroficación
- ◆ Vida acuática
- ◆ Recreación

cuya reparación suele ser muy costosa (Fan 1993).

La calidad del agua se ve afectada por la descarga de residuos orgánicos biodegradables, nutrientes provenientes de aguas residuales, contaminantes provenientes de fuentes difusas (de origen agrícola), lluvia ácida (producida por contaminantes atmosféricos como SO<sub>2</sub> y NO<sub>x</sub>) y tóxicos industriales o de uso en agricultura, entre otros (Jorgensen y Vollenweider 1989).

En particular, el comportamiento hidrofóbico de químicos orgánicos y metales pesados produce la adsorción de estos elementos en los sedimentos cohesivos y materia orgánica que se encuentran suspendidos en la columna de agua. Estas partículas tienden a depositarse en el lecho, acumulando las sustancias tóxicas. Por lo tanto, el transporte de los agentes contaminantes mencionadas está fuertemente ligado al comportamiento de los sedimentos en suspensión.

Además, debido a la construcción de la presa, el transporte de fondo es eliminado y la carga suspendida disminuye. Las erogaciones hacia aguas abajo de la presa están compuestas por fracciones más finas que las originales. La disminución en el suministro de limo y arcilla significa que el agua contiene menos nutrientes, afectando la vida acuática.

- *Morfología de estuarios y deltas*

Como resultado del corte del transporte de sedimentos las condiciones de intrusión salina y sedimentación en un estuario son directamente afectadas luego de la construcción de una presa. Aunque el proceso puede ser relativamente lento, puede inducir cambios geométricos globales. Por ejemplo, el delta modifica la evolución de su línea de costa, incluso produciéndose erosión costera (Kerssens y van der Zwaard 1980).

De lo anteriormente expresado se desprende que muchos de los problemas que aparecen por la construcción de la presa están ligados al proceso de sedimentación. Queda claro, entonces, que *la predicción del fenómeno* resulta ser de sumo interés para diferentes sectores. Esto ha llevado al desarrollo de distintas técnicas de cuantificación, de diverso grado de complejidad y precisión, un compendio de las cuales se cita en la sección siguiente.

## 1.2 ANTECEDENTES EN LA CUANTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

### 1.2.1 Métodos empíricos

Los primeros métodos desarrollados para predecir la sedimentación en un reservorio han sido los empíricos, basados en datos de campo. Su precisión es baja, su aplicabilidad usualmente reducida (por ejemplo, para cierto tipo de reservorio) y sólo permiten obtener una primera aproximación para las primeras décadas de sedimentación. Su ventaja radica en que se pueden utilizar a partir de un conjunto mínimo de parámetros globales del reservorio. Sloff (1991) presenta una serie bastante completa de referencias sobre estos métodos.

La primera magnitud que contemplan los métodos empíricos es la eficiencia de atrape, definida como el porcentaje del sedimento entrante al reservorio que es retenido en el mismo. Depende principalmente de:

- Características de la cuenca de aporte
- Entrada de agua y sedimento
- Almacenamiento del reservorio (dimensión, configuración, período de retención, etc.)
- Descarga de agua y sedimento

Su cuantificación permite dar una aproximación rápida de la pérdida de capacidad, en las etapas de los estudios de factibilidad. A continuación se describen someramente algunos métodos:

#### 1.2.1.1 Pérdida de capacidad

- *Método de Brune*

Utilizando datos de 44 reservorios normalmente llenos, Brune obtuvo la relación mostrada en la figura 1.3 (Brune 1953). La eficiencia de atrape está dada en función del cociente entre la capacidad del reservorio y el caudal medio anual entrante. Para grandes reservorios, la eficiencia de atrape tiende a ser del 100%, esto es, todo el sedimento es retenido, mientras que para reservorios pequeños ocurre lo contrario, y el material tiende a pasar la barrera que forma la presa. De las curvas que envuelven a la media (central) la izquierda está asociada a sedimento grueso, y la derecha a sedimento fino. Se observa, entonces, la tendencia general a retener un mayor porcentaje de gruesos que de finos.

- *Método de Churchill*

Churchill (1948) presentó las curvas mostradas en la figura 1.4, donde se cuantifica el porcentaje de sedimento entrante que atraviesa el reservorio, en función del índice de sedimentación. Este último se define como el cociente entre el período de retención (cociente entre la capacidad del reservorio y el caudal medio diario entrante al mismo) y la velocidad media a través del reservorio. Se determinó que este método es más aplicable a reservorios de retención de limo o semisecos que el de Brune (Borland 1971), y que debe utilizarse para períodos superiores al año (Sloff 1991).

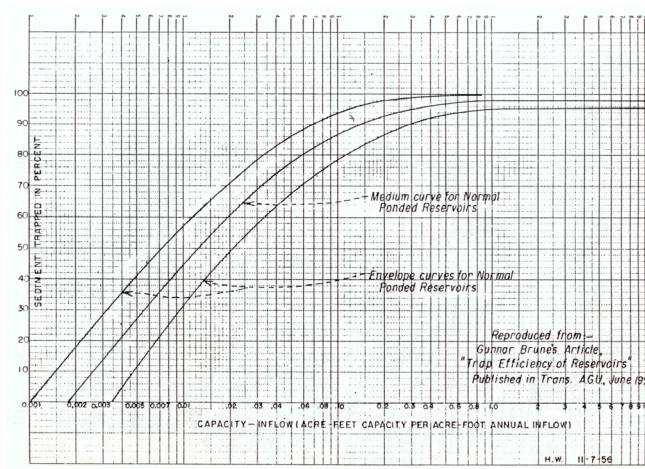


Figura 1.3 – Curva de atrape de sedimento de Brune.

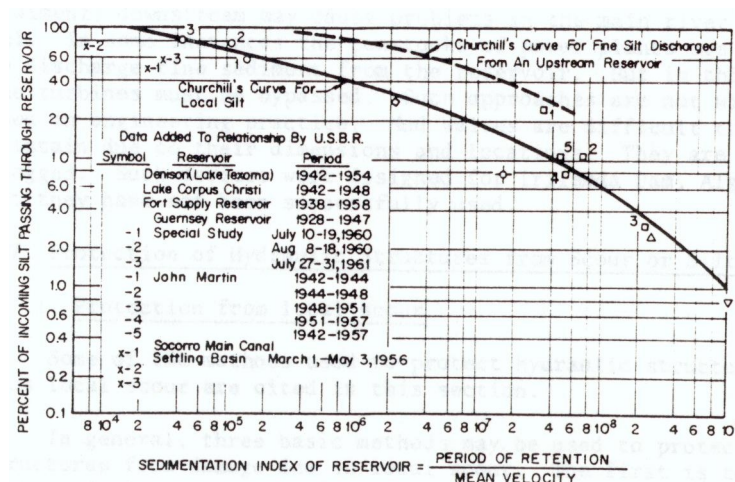


Figura 1.4 – Curva de sedimento pasante de Churchill.

- *Método de Brown*

Basado en datos de 15 reservorios, Brown (1944) produjo las curvas de la figura 1.5, en donde la eficiencia de atrape se da en función del cociente entre la capacidad de almacenamiento original y el área de la cuenca de aporte. Los detalles de cómo utilizar las diferentes curvas están descritos en la literatura (Simons y Senturk 1977).

- *Método de Chen*

Algo más contemporáneo, el trabajo de Chen utiliza el concepto de eficiencia de atrape, pero haciendo una discriminación por tamaño de grano, tal como se muestra en la figura 1.6 (Graf 1984). En este caso las abscisas corresponden al cociente entre el área de la cuenca y el caudal erogado, y se presenta una comparación con los métodos de Brune y

Churchill. De ella surge que los dos últimos tienden a subestimar la eficiencia de atrape para sedimento grueso y sobreestimarla para sedimento fino.

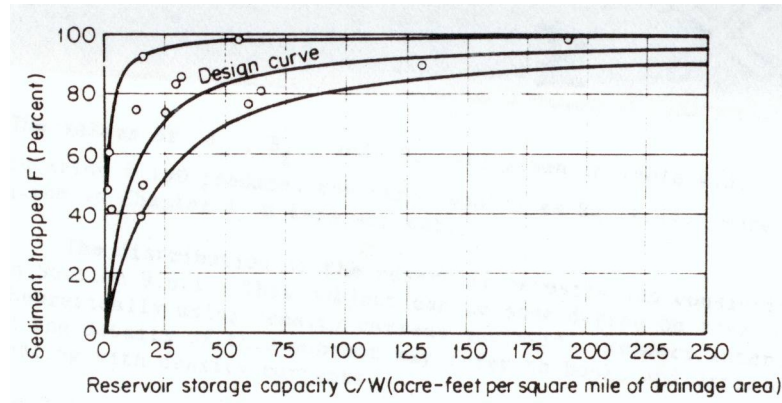


Figura 1.5 – Curva de atrape de sedimento de Brown.

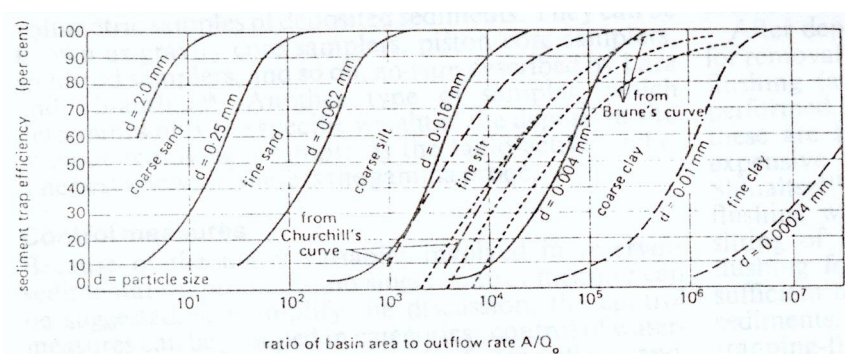


Figura 1.6 – Curva de atrape de sedimento de Chen.

- *Fórmulas para la eficiencia de atrape y el volumen depositado*

Entre otros procedimientos de cálculo simple se pueden mencionar:

- ♦ Método de Einstein (1965): determina la eficiencia de atrape de sedimentos, para lo cual se requiere utilizar la profundidad local, la velocidad de caída de las partículas de un dado tamaño y algunos parámetros geométricos del reservorio (Borland 1971).
- ♦ Método de Buttling y Shaw (1973): relaciona la pérdida porcentual anual de capacidad con el cociente entre la capacidad y el área de la cuenca de captación. Se encontró una tendencia hacia una menor pérdida en los reservorios con menores valores de la relación capacidad-área de captación. La misma tendencia se observó para los reservorios más grandes y los más pequeños (Graf 1984).

- ♦ Método de Rooseboom (1975): permite calcular, mediante una fórmula, el volumen de sedimento depositado, como función del tiempo. Está basado en datos de reservorios de EE.UU. y Sudáfrica (Graf 1984).
- ♦ Método de Gill (1978): combina los resultados de Brown y Brune y obtiene fórmulas analíticas para la eficiencia de atrape (Gill 1978). Incluye el efecto de compactación del fondo, para lo cual emplea el método empírico de Lane y Koelzer (Borland 1971).

#### *1.2.1.2 Distribución de los depósitos de sedimento*

La predicción de la distribución de los depósitos mediante técnicas empíricas es un procedimiento inexacto (Graf 1984). Algunos de los pocos métodos existentes se presentan a continuación:

- *Método de incremento de área*

Es un método geométrico, desarrollado por Cristofano (1953) y Borland y Miller (1958), que establece que el volumen ocupado por sedimento se incrementa en capas horizontales sucesivas, cuyo espesor depende del volumen del material depositado y el área horizontal determinada por la curva topográfica de nivel correspondiente a la altura de la nueva capa. El procedimiento para aplicar este método simple involucra algunas aproximaciones (Borland 1971).

- *Método de reducción de área*

Desarrollado por los mismos autores que el método de incremento de área, en este caso se utilizaron unos 30 reservorios de EE.UU. para obtener relaciones entre el porcentaje de material depositado y el porcentaje de profundidad, tal como presenta la figura 1.7. Las cuatro curvas de la figura corresponden a sendos tipos de reservorios, según una clasificación de los autores (Borland y Miller 1958). En la misma figura se muestra un ejemplo de aplicación del método (Borland 1971).

En general produce mejores resultados que el método anterior, aunque son de esperar desviaciones importantes respecto de las observaciones. No tiene en cuenta las características de los sedimentos ni los procesos físicos propios de cada reservorio, asumiendo que todos esos factores dependen de la geometría del mismo.

- *Método geométrico progresivo*

Schoklitsch (1961) propone determinar la forma de los depósitos dividiendo el reservorio en secciones que van desde la cola del embalse hasta la presa. En primer lugar determina la curva de remanso para la superficie libre, y luego distribuye los sedimentos anuales depositados haciendo una discriminación entre el material transportado en el fondo y en suspensión. La figura 1.8 muestra un ejemplo de aplicación de esta metodología.

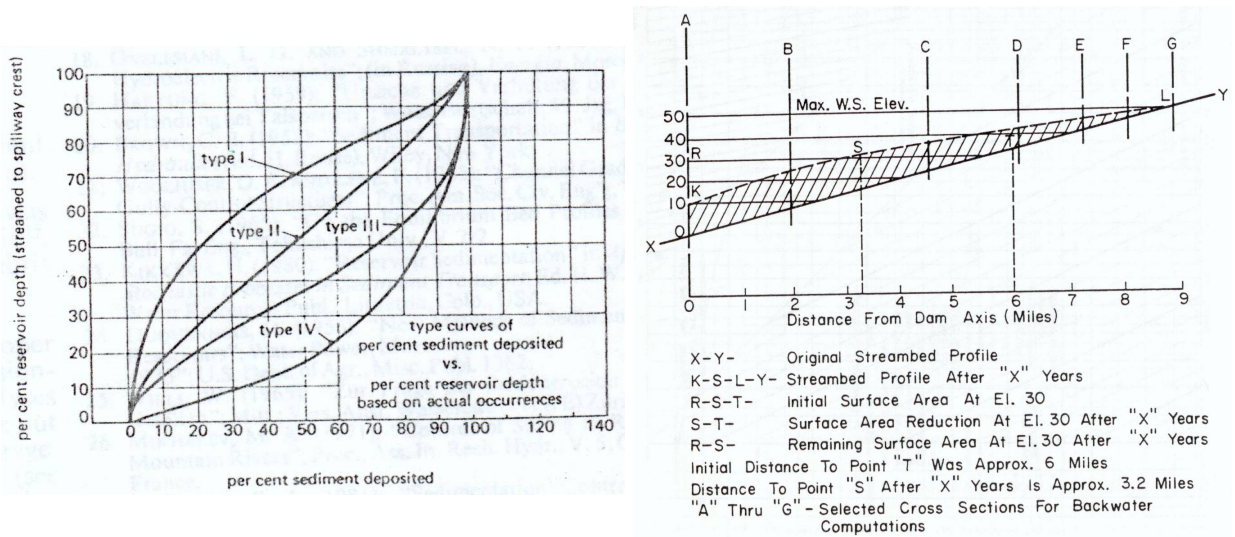


Figura 1.7 – Método empírico de reducción de área. Izquierda: curvas empíricas de Borland y Miller, donde los tipo de reservorio son: I=lago, II=planicie inundación, III=colina y IV=garganta. Derecha: ejemplo de aplicación del método.

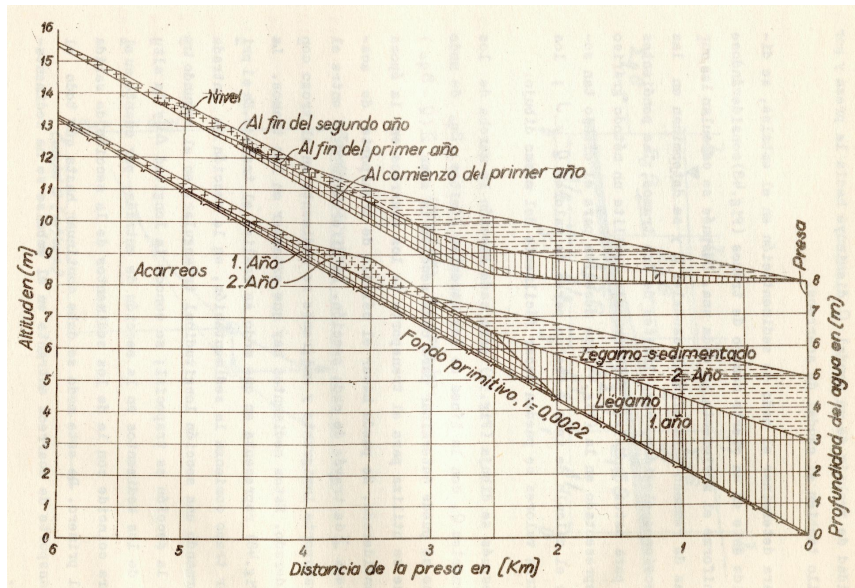


Figura 1.8 – Ejemplo de aplicación del método geométrico progresivo de Schoklitsch.

- Métodos de regresión

La aplicación de métodos matemáticos, como el de regresión múltiple, a colecciones de datos de distintos reservorios permitió establecer varias relaciones para cuantificar el proceso de sedimentación. Entre otros, Heinemann (1961) desarrolló una fórmula multilineal para cuantificar la profundidad porcentual llena de sedimentos, en función de

cuatro parámetros, mientras que Flaxman (1966) obtuvo la tasa anual de sedimentación empleando análisis de regresión y trece variables (Graf 1984).

- *Forma del delta*

La pendiente de la parte superior del delta se puede estimar a través de gráficos como el presentado en la figura 1.9. En muchos casos la misma es aproximadamente la mitad de la pendiente original del río. También se pueden utilizar fórmulas de transporte y establecer la pendiente como aquella para la cual el transporte de fondo es nulo (Borland 1971).

La cota del punto de pivot entre la pendiente de la cola del delta y la del frente se puede estimar a partir del nivel normal de la superficie libre, o el nivel medio de operación, dependiendo del tipo de operación del reservorio. El límite aguas arriba del delta se estima como el punto donde el máximo nivel de la superficie libre intercepta el fondo original. Finalmente, la pendiente del frente del delta se estima como 6.5 veces la pendiente de la parte superior. El delta así esquematizado es de forma triangular, y su extensión se puede aproximar en el tiempo a partir del cómputo o medición del volumen de sedimento que ingresa al reservorio (Borland 1971).

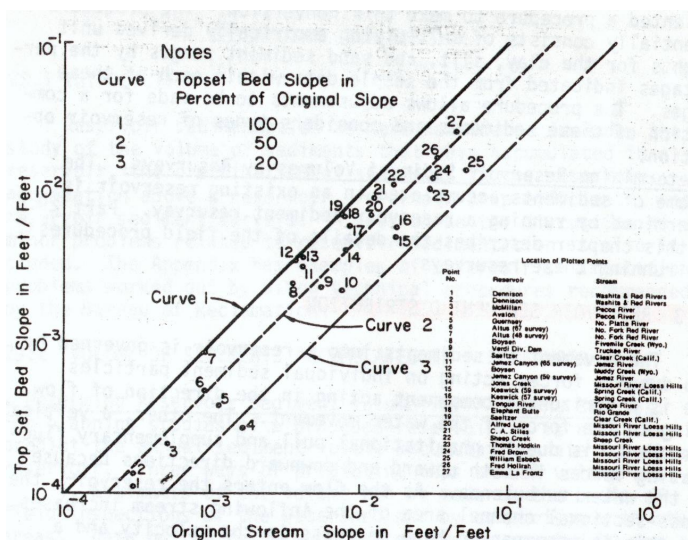


Figura 1.9 – Relación entre las pendientes de la parte superior del delta y la original del río.

Los métodos empíricos se siguen utilizando en distintas etapas del estudio de la sedimentación en reservorios. En los años ochenta, Agua y Energía Eléctrica S.E. de Argentina determinaba la colmatación, en sus estudios de prefactibilidad, utilizando el método de Brune para determinar la eficiencia de atrape y el modelo de Lane y Koelzer para el efecto de compactación (Scartascini y Dalla Salda 1982). Del mismo modo, el U.S. Bureau of Reclamation emplea las curvas de Brune y Churchill para determinar la eficiencia de atrape (Chen 1993).

En los noventa, los métodos de Brune y Churchill se utilizaron para valorar el impacto de la sedimentación en la generación hidroeléctrica (Espinosa y Hervé 1996). El modelo de Gill se utilizó con datos de reservorios de EE.UU. para determinar el volumen sedimentado en un embalse (Andrade Silva 1996). Para predecir el comportamiento sedimentológico de un

reservorio de llanura, Farias y Mattar (1996) también emplearon técnicas empíricas aplicadas a un modelo matemático ad-hoc. Incluso, otras técnicas más elaboradas se combinan con los métodos antes mencionados (Modica et al. 1997, Batuca 1997).

Sin embargo, las limitaciones en la calidad y cantidad de los resultados que pueden proveer los métodos empíricos han hecho que, hoy en día, exista una marcada tendencia a ser reemplazados por los modelos matemáticos.

### **1.2.2 Estudios de campo y laboratorio**

Schoklitsch (1937) realizó uno de los trabajos experimentales pioneros en el estudio de la formación de deltas. En una de sus experiencias señala que "...crece un depósito inicial o barra, cuyo frente empinado avanza aguas abajo como el delta en la desembocadura de un río...", y que el delta comienza a formarse "...donde la reducción de la pendiente hidráulica causada por el remanso se vuelve apreciable..." (Graf 1983a).

Estudios en canales de laboratorio más recientes muestran el desarrollo de deltas usando sedimento uniforme (Hotchkiss y Parker 1988, 1990) y mezclas de partículas finas y gruesas (Schalchli 1987). Graf (1983a) presenta un detalle abarcador de estudios de laboratorio, aunque se debe aclarar que gran parte de ellos está publicado en informes internos de los distintos laboratorios (Sloff 1991).

Cabe mencionar que los experimentos de laboratorio tienen limitaciones de escala. Por ejemplo, la relación de aspecto natural es, en general, irrealizable a escala de laboratorio. Además, aparece un límite inferior para el escalado de las partículas, donde los efectos cohesivos empiezan a ser significativos. Del mismo modo, las partículas finas (limo fino y arcilla) son difíciles o imposibles de representar con otras de menor tamaño en un modelo físico.

Respecto de los estudios de campo, existe abundante material en la literatura técnica, pero nuevamente en informes no publicados. En la figura 1.2 se mostraron los perfiles de deposición obtenidos por Pemberton en cinco reservorios de EE.UU.. Por ejemplo, en las figuras 1.10 y 1.11 se presentan relevamientos de ríos austríacos mostrando el crecimiento hacia aguas arriba de la cola del delta, y el desarrollo de los depósitos y su influencia en la curva de remanso (Schoklitsch 1961). Graf (1983a) presenta un extenso listado de trabajos de campo orientados especialmente a relevar los patrones de deposición. En este contexto, el propio mantenimiento operativo del reservorio requiere el seguimiento del patrón de deposición (Shakir 1995, Basson 1997).

En particular, resulta importante mencionar el trabajo sobre el lago Mead de Lara y Sanders (1970), posiblemente el más completo estudio de campo cuyo informe está disponible. Debido a la cantidad y calidad de los datos expuestos, ese trabajo ha sido utilizado para validar el modelo matemático presentado en esta tesis (ver Capítulo 5).

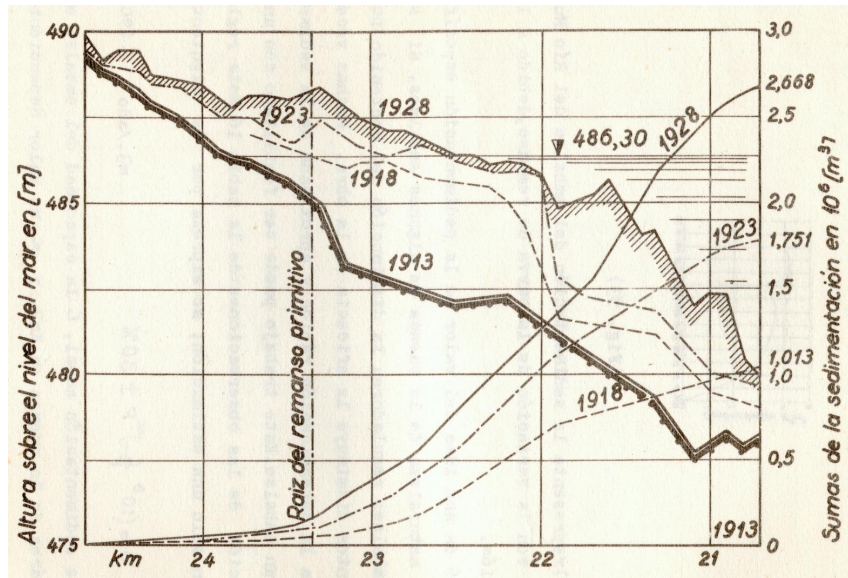


Figura 1.10 – Crecimiento regresivo de la cola del delta en el embalse del río Inn en Jettenbach (Austria).

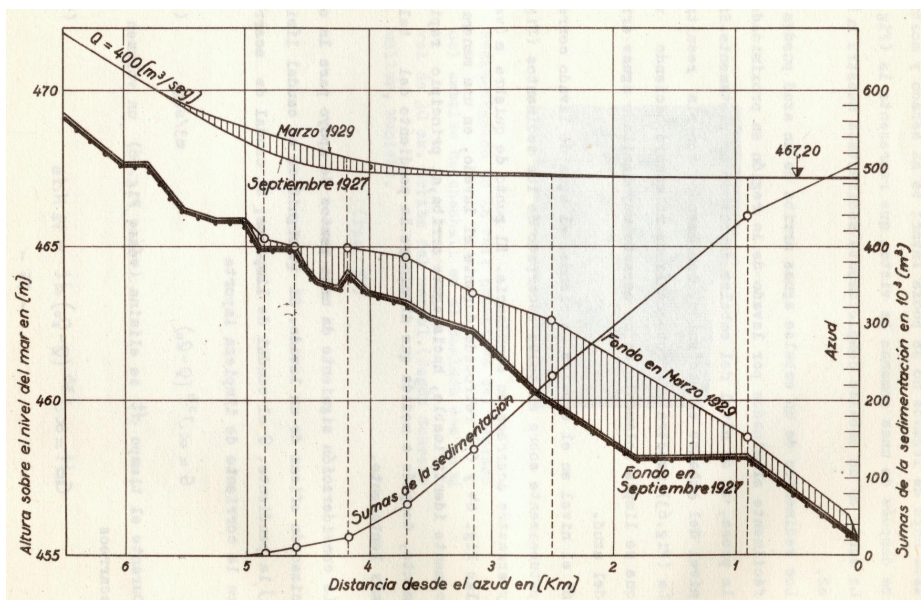


Figura 1.11 – Desarrollo de los depósitos y su influencia en la curva de remanso para el embalse del río Mur en Pernneg (Austria).

### 1.2.3 Modelos matemáticos 1D

Casi todos los modelos desarrollados para la predicción de la sedimentación en reservorios son unidimensionales (promediados en la sección transversal de flujo). Esta simplificación es a menudo justificada por el hecho de que, en general, la longitud del reservorio es mucho mayor que el ancho y la profundidad. Los modelos 1D representan el flujo a través de las ecuaciones básicas de conservación de la masa y la cantidad de movimiento de agua y la masa de sedimento. Estas ecuaciones pueden ser resueltas numéricamente utilizando métodos de diferencias finitas, tanto implícitos como explícitos. Distintos autores han hecho reseñas enumerando y describiendo los principales desarrollos (Graf 1983a, Sloff 1991, Chen 1993), presentándose aquí los que se consideran más relevantes.

Uno de los primeros intentos por modelar el transporte y deposición de sedimento en reservorios es el método de paso analítico de Fowler (1957). La hipótesis principal del modelo es que el cociente entre las concentraciones de una dada fracción de tamaño de sedimento en una sección del reservorio y la sección inicial del río aguas arriba es una función del cociente entre las velocidades de corte en ambas secciones (Chen 1993). Aplicaciones prácticas del modelo mostraron grandes discrepancias, volviéndolo cuestionable (Chen 1993).

Yücel y Graf (1973) trabajaron dividiendo el problema en dos fases: en la primera se obtiene el perfil de la curva de remanso, sin considerar el transporte de sedimento, y en la segunda se determina la deposición debida al transporte de fondo en sucesivos tramos a lo largo del reservorio. Para esta última fase se utilizan fórmulas de transporte, como la de Schoklitsch, Meyer-Peter o Einstein (ver Capítulo 3). La aplicación de este modelo mostró similitudes cualitativas con casos reales, lo que llevó a sucesivas extensiones para incluir distribución de sedimentos, transporte total, consolidación y efectos geométricos (Graf 1983a).

Probablemente, el modelo de dominio público más conocido para el presente problema es el HEC-6, cuya primer versión pública fue emitida en 1977. Fue desarrollado por Thomas en el Centro de Ingeniería Hidrológica del Cuerpo de Ingenieros del Ejército de EE.UU (Thomas y Prasuhn 1977, HEC-6 User's Manual 1991). Contempla el transporte total de material cohesivo y no cohesivo, incluyendo consolidación, armadura del fondo y distribución granulométrica de sedimentos de fondo. Graf (1983a) señala que, aunque el autor escribió que "la performance actual es juzgada como satisfactoria", no hay trabajos publicados o informes disponibles donde esto se demuestre convincentemente. Otra crítica fue hecha por Croad (1986) al indicar que el esquema numérico utilizado no cumple el requerimiento de consistencia, causando errores del mismo orden de magnitud que la solución, y que, para la mayoría de las situaciones prácticas, exhibe inestabilidades (Sloff 1991). En el Capítulo 5 se dan más detalles de este modelo, que ha sido utilizado en una comparación con el desarrollado en el presente trabajo.

Lopez (1978) esquematizó el sistema río-reservorio en tres zonas:

- Zona fluvial: se aplica un modelo de flujo 1D,
- Zona de transición: en la boca del reservorio, donde utiliza la teoría 2D horizontal de un chorro descargando en una zona abierta desde una abertura de ancho igual al ancho del río,
- Zona del reservorio: se divide en un conjunto de canales imaginarios paralelos, en cada uno de los cuales se aplica el modelo de flujo 1D, adicionando transferencia lateral de masa de agua y sedimento.

El transporte de sedimento se contabiliza como una función potencial de la velocidad local, corrigiendo el peso específico por compactación. Este modelo requiere un gran esfuerzo de

calibración para lograr resultados precisos, y se han señalado que contiene un cierto número de problemas (Chen 1993).

Chollet y Cunge (1980) utilizaron un esquema similar al de Yücel y Graf, empleando para el transporte total de sedimento las relaciones de Einstein y Engelund (ver Capítulo 3). A diferencia de la mayoría de los modelos, que utilizan para la resistencia de fondo las relaciones de Chezy o Manning, en este caso se utiliza un mecanismo de disipación de energía que contempla las formas de fondo y su evolución temporal.

Galappatti (1983) desarrolló un modelo 1D basándose en una solución asintótica para la ecuación de advección-difusión de la concentración de sedimento en suspensión.

Para predecir la sedimentación en el reservorio Tarbela (Paquistán), Chao y Ahmad (1985) emplearon un modelo 1D que tiene en cuenta la capacidad potencial de la corriente para transportar las distintas fracciones cuando el diámetro medio no es representativo de la distribución presente.

Cunge ha remarcado que, excepto para flujos en estado estacionario establecido por largos períodos, el transporte de material en suspensión está esencialmente fuera del equilibrio (Chen 1993). Por lo tanto, las hipótesis de transporte de sedimento en equilibrio, o aquellas que no permiten discriminar a la fase suspendida en forma separada, pueden constituir los mayores obstáculos en el desarrollo futuro de un código computacional.

Por ejemplo, Han y He (1990) incluyen en su modelo 1D el efecto del transporte fuera del equilibrio, esto es, la adaptación de la concentración de sedimento a las condiciones del flujo. No obstante, la cadena de suposiciones que efectúan lleva a que los resultados no sean necesariamente superiores a los preexistentes. Un modelo similar, utilizando una aproximación de cuasi-no equilibrio, fue desarrollado por Chen (1988) y aplicado a evaluar los problemas de sedimentación en la presa Three Gorges Project sobre el río Yangtze, en China. Los resultados obtenidos son similares a los del modelo de Han y He.

Holly y Rahuel (1990a,b) aplicaron un acoplamiento implícito entre los procesos hidrodinámicos y sedimentológicos, modelando la evolución morfológica de ríos y reservorios.

Trabajos más recientes muestran que los modelos 1D son todavía aplicados. Por ejemplo, Chang y otros (1996) utilizan un modelo convencional para determinar el sucesivo paso de sedimento en una serie de presas sobre el río North Fork Feather (EE.UU.), y Basson y Tsehlo (1997) aplican su modelo de transporte de sedimento fuera del equilibrio en el reservorio Mohale (Lesoto), la cuarta presa de Africa por su tamaño.

#### **1.2.4 Modelos matemáticos 2D**

Para problemas de transporte de sedimentos en general, existen dos tipos de modelos 2D:

- 2D-H: la descripción del flujo es integrada en la dirección vertical, empleándose para cuerpos de agua poco profundos, donde las escalas horizontales del problema son las dominantes,
- 2D-V: la descripción del flujo es integrada en la dirección lateral, para casos donde la estructura vertical es significativa.

En el caso de los modelos 2D-H, para el transporte de sedimento se aplican las fórmulas desarrolladas para los modelos 1D, teniendo en cuenta el carácter vectorial del flujo. Crotofino

y Holz (1984) utilizaron uno de estos modelos para simular el flujo de agua y sedimento sobre una trinchera. Tingsanchali y Rodi (1986) aplicaron un modelo 2D-H para estimar la concentración de partículas a la salida de una planta, encontrando un buen acuerdo con mediciones de campo. La evolución morfológica del lecho de un tramo del río Paraná también se simuló con este tipo de modelo (Tarela et al. 1998b). Similares desarrollos fueron llevados a cabo por Galappatti (1983) y Wang (1989). Ziegler y Nisbet (1995) simulan el transporte de sedimento fino en el reservorio Watts Bar (EE.UU.), también utilizando una versión 2D-H para la ecuación de transporte de sedimento. En el Río de la Plata se llevaron a cabo simulaciones del transporte de material fino utilizando un modelo más simple (Menéndez et al. 1997a), incluso incorporando el efecto de la marea y el oleaje simple (Menéndez et al. 1997b). Nótese que sólo uno de los casos mencionados se refiere a la problemática de los reservorios.

Borthwick y Akponasa (1997) emplearon una descripción 2D-H del flujo en un reservorio a partir de resolver las ecuaciones de aguas poco profundas expresadas en términos de las componentes contravariantes del campo de velocidad. Sólo resuelven la hidrodinámica, mostrando aplicaciones académicas, distando mucho su geometría de los casos prácticos.

Si la carga en suspensión domina el transporte, es aconsejable considerar una descripción promediada en la dirección lateral. De esta forma, los efectos de retardo debidos a la inercia de la mezcla turbulenta pueden ser representados en forma precisa. Además, la adaptación espacial y temporal de los perfiles de concentración de sedimento a condiciones variables puede ser cuantificada. En este tipo de modelos, los principales errores yacen en los coeficientes de difusión turbulenta y la tasa de intercambio de sedimento en el fondo, que debe especificarse como condición de contorno.

van Rijn (1987) desarrolló un modelo 2D-V, en el cual el campo de velocidades es determinado en forma paramétrica, para luego ser aplicado al transporte de sedimento en trincheras dragadas. El problema del flujo en un tanque de sedimentación también se simuló con modelos 2D-V, utilizando el modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ , y obteniéndose diferentes grado de acuerdo con mediciones de laboratorio (Larock et al. 1983, Casonati y Gallerano 1990, Adams y Rodi 1990).

Para el problema de la sedimentación en un reservorio, Siddique (1991) desarrolló un modelo 2D considerando los efectos de la velocidad media de flujo, la velocidad de caída de las partículas y la difusión turbulenta, para determinar el transporte de sedimento fuera del equilibrio, incluyendo limo y arcilla. El modelo consta de un submodelo de remanso (determina el perfil de la superficie libre y los parámetros hidráulicos en forma 1D), un submodelo de transporte de sedimento (resuelve una forma simplificada de la ecuación de advección-difusión 2D integrada en la dirección lateral) y un submodelo de evolución del fondo. Este modelo se aplicó para simular el crecimiento del delta en el reservorio Tarbela, observándose un acuerdo razonable con los datos relevados (ver figura 1.12).

No se han encontrado referencias de modelos 2D-V donde se resuelvan los perfiles verticales de velocidad, presión y concentración de sedimento para los distintos tamaños de partícula, aplicados al problema de sedimentación en reservorios.

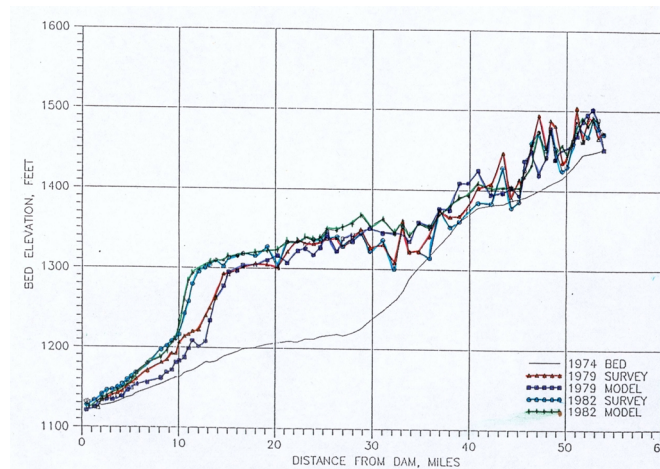


Figura 1.12 – Comparación entre los perfiles de fondo medidos en el reservorio Tarbela (Paquistán) y los resultados del modelo 2D de Siddique.

### 1.2.5 Modelos matemáticos 3D

La mayoría de los problemas de transporte de sedimento son evolutivos, por lo que todavía los modelos morfológicos totalmente 3D son poco prácticos, tanto por su complejidad como por su alto costo computacional.

De los pocos modelos que resuelven la ecuación de transporte de sedimento 3D, la gran mayoría se basa en una descripción hidrodinámica 2D-H, a partir de la cual se reconstruye en forma analítica el perfil vertical de velocidades. Este procedimiento fue utilizado por diferentes autores para simular diversos problemas (King 1985, McCarthy et al. 1986, Wang y Adeff 1986).

van Rijn (1987) utilizó la misma técnica, resolviendo luego la ecuación 3D de advección-difusión para determinar el transporte de sedimento no cohesivo en un canal parcialmente cerrado y bajo condiciones estacionarias. Luego se verificó el modelo con datos de campo, encontrándose un buen acuerdo, y concluyéndose que los principales errores provienen de la función (empírica) que determina el intercambio de partículas en el fondo (van Rijn et al. 1990).

Nicholson y O'Connor (1986) también resolvieron la ecuación 3D de advección-difusión, en este caso para simular el transporte de material cohesivo. Las verificaciones realizadas fueron satisfactorias, aunque el modelo requiere una gran cantidad de información de entrada.

Toro et al. (1989) utilizaron un modelo comercial 3D y lo compararon con uno 2D-H modificado en un problema de flujo en un canal parcialmente cerrado, concluyendo que este último ofrecía mejores resultados.

De un modo más simplificado, Shimizu et al. (1990) incorporaron modificaciones a un modelo hidrodinámico 2D-H para simular el flujo y transporte de sedimento en un río meandroso. Por su parte, Lin y Falconer (1996) emplearon un modelo 3D integrado en vertical por capas, para determinar el transporte de sedimento en estuarios y aguas costeras.

La reconstrucción del perfil vertical de velocidades a partir de una solución 2D-H se puede utilizar, incluyendo el efecto de las olas en el transporte de material no cohesivo, para simular la evolución morfológica costera en áreas marítimas, aunque su aplicabilidad es aún limitada debido al alto costo computacional (Zyserman 2000).

Olsen y Kjellesvig (1999) presentaron un modelo 3D hidrodinámico y sedimentológico, con el cual realizaron simulaciones morfológicas para el problema de una trampa de arena del tipo tunel. Aunque utilizaron condiciones de borde rígidas tanto para la velocidad como para la concentración de sedimento en el fondo, obtuvieron acuerdos razonables con mediciones de laboratorio.

Obsérvese que las referencias presentadas hasta aquí se refieren a problemas locales, y no contemplan casos de estudio en reservorios. Del material analizado, solamente se han encontrado los siguientes trabajos relativos al transporte de sedimentos en reservorios:

Yoon y Kim (1995) presentaron un modelo cuasi-3D, en el cual se reconstruye el perfil vertical de velocidad a partir de la solución 2D-H de aguas poco profundas, y al cual le acoplaron la ecuación 3D de advección-difusión para la concentración de sedimento. El modelo fue aplicado al reservorio (poco profundo) Paldang, que abastece de agua para consumo a la ciudad de Seúl. Se obtuvo únicamente la concentración, que no fue contrastada con datos de campo.

A partir de un modelo hidrodinámico 3D, Olsen (1991) desarrolló un modelo 3D de transporte de sedimento y lo aplicó en el reservorio Mae Tian (Tailandia). El reservorio es extremadamente pequeño, con una extensión de 150 m y una profundidad media de 3 m. Los resultados de Olsen se limitan a los campos de velocidad y los perfiles de concentración en una situación estacionaria. Ninguno de ellos fue contrastado con datos de campo, ni se presenta análisis alguno respecto de los procesos de erosión y sedimentación presentes.

Nótese, entonces, que ninguno de los modelos presentados se refiere al problema específicamente estudiado en el presente trabajo, es decir, la evolución morfológica del lecho del reservorio.

### **1.2.6 Análisis de performance**

Resulta interesante mencionar los resultados preliminares de un estudio sobre modelos de sedimentación llevado a cabo por un grupo de trabajo formado por personal de distintas agencias de EE.UU.. En el mismo se compararon 11 modelos, de los cuales 9 son 1D y los 2 restantes 2D. Fan (1993), presidente de dicho grupo, señala:

- Todos los modelos analizados presentan dos limitaciones: son extremadamente dependientes de los datos, y su aplicabilidad está restringida a rangos de datos empleados en sus respectivos desarrollos.
- Las técnicas de modelización están aún en etapas de desarrollo, sin entregar una representación real sino más bien una aproximación a la solución del problema.
- Al presente, los modelos no pueden substituir la experiencia profesional.

La simulación de procesos físicos con modelos matemáticos puede entregar predicciones razonables. Sin embargo, tienen que estar disponibles datos de campo confiables, no sólo para la eventual calibración o verificación, sino también para el cálculo predictivo.

Dado que los procesos físicos involucrados en el fenómeno de transporte de partículas en flujos turbulentos son aún objeto de investigación, los modelos que los representan están en continuo desarrollo. Los modelos matemáticos en uso actualmente requieren en general una alta cuota de empirismo, principalmente debido a que algunos de los procesos involucrados no están bien comprendidos. En el caso de la evolución morfológica de los reservorios, los datos de campo *disponibles* son escasos e imprecisos.

En este sentido, al presente parecen ser aún recomendables los modelos 1D o 2D, en lugar de los detallados y computacionalmente costosos modelos 3D (Sloff 1991).

### **1.3 OBJETIVO DE LA TESIS**

El *objetivo de la tesis* es formular y validar un modelo de sedimentación en embalses que combine un planteo lo más abarcador y universal posible, desde el punto de vista físico, con una implementación computacional viable en equipos comercialmente accesibles, de modo que el fruto de las investigaciones se traduzca en una herramienta ingenierilmente útil.

En función de lo expuesto en el análisis de antecedentes, se consideró viable y pertinente encarar un modelo 2D-V donde se resuelvan los perfiles verticales de velocidad, presión y concentración de sedimento para los distintos tamaños de partículas.

## Capítulo 2

# MODELO HIDRODINÁMICO

### 2.1 DELIMITACIÓN FÍSICA DEL PROBLEMA

En el problema de la sedimentación en un reservorio pueden distinguirse dos cuerpos de agua principales:

- El tramo fluvial (río, arroyo, canal), ó "emisor", que capta y transporta el sedimento con una relativamente baja pérdida de carga sólida.
- El reservorio, o "receptor", que posee una capacidad de transporte muy inferior al emisor y, por lo tanto, genera una deposición de gran parte del sedimento recibido.

Estos dos cuerpos de agua tienen características físicas (también químicas y biológicas) diferentes, lo cual se refleja en rangos de escalas espaciales que pueden resultar disímiles entre sí.

Ahora bien, la ubicación de la interfase entre ambos cuerpos varía tanto debido a procesos naturales (hidrológicos y sedimentológicos) como antropogénicos (política de operación del embalse). Por lo tanto, el estudio del proceso evolutivo de sedimentación en un reservorio debe contemplar el conjunto formado por el tramo final del emisor y todo el cuerpo receptor, involucrando ambos rangos de escalas espaciales.

### 2.2 ESCALAS ESPACIALES

Se denomina escala espacial al orden de magnitud de la distancia sobre la cual se producen variaciones significativas de la variable bajo análisis.

Para el presente problema se definieron tres categorías de escalas espaciales, a saber:

- Geométrica
- Hidrodinámica

- Sedimentológica

Las *escalas geométricas* están ligadas a la morfología del cauce del tramo fluvial y del vaso hidráulico que materializa el reservorio. Existen tres escalas geométricas, cada una relacionada a una dirección espacial. Estas son:

- ◆ *Dirección longitudinal*: Asociada a la extensión en el sentido de flujo. Se desarrolla básicamente sobre el plano horizontal.
- ◆ *Dirección lateral*: Asociada al ancho de flujo. Se desarrolla sobre el plano horizontal.
- ◆ *Dirección vertical*: Asociada a la profundidad de flujo. Se desarrolla esencialmente según la vertical.

En la siguiente tabla se indican los órdenes de magnitud de las distintas escalas geométricas para ambos cuerpos de agua.

Tabla 2.1 - Ordenes de magnitud de las escalas geométricas (en metros)

| Cuerpo   | Dirección     |               |             |
|----------|---------------|---------------|-------------|
|          | Longitudinal  | Lateral       | Vertical    |
| Emisor   | $10^2 - 10^3$ | $10 - 10^2$   | $1 - 10$    |
| Receptor | $10^4 - 10^5$ | $10^2 - 10^3$ | $10 - 10^2$ |

Las *escalas hidrodinámicas* están definidas por las características del flujo medio estadístico y de la turbulencia.

La turbulencia está producida por la vorticidad generada en el fondo (torbellinos de eje horizontal) y en las márgenes (torbellinos de eje vertical). Entonces, para cada una de esas dos fuentes se tienen los siguientes rangos de escalas:

- ◆ *Turbulencia de fondo*: Desde las dimensiones de los torbellinos generados por la rugosidad del fondo (caracterizada por la altura de rugosidad,  $k_s$ ), para el caso de una superficie hidráulicamente rugosa, o mayores que el espesor de la subcapa viscosa de fondo, para superficies hidráulicamente lisas, pasando por las de los torbellinos producidos por las formas de fondo y llegando hasta las de los comparables a la profundidad local ( $h$ ).
- ◆ *Turbulencia de margen*: Desde las dimensiones de los torbellinos generados por la rugosidad de las márgenes o mayores al espesor de la subcapa viscosa de las márgenes, pasando por las de los generados por las oscilaciones de la línea de margen y llegando hasta las de los comparables al ancho local ( $B$ ).

Nótese que las escalas geométricas vertical y lateral determinan las escalas espaciales máximas de la turbulencia.

En el caso del flujo medio, las escalas hidrodinámicas para cada una de las tres direcciones espaciales son las siguientes:

- ◆ *Dirección vertical:* Hay una escala del orden de la amplitud de las formas de fondo y otra del orden de la profundidad de flujo.
- ◆ *Dirección lateral:* Hay una escala del orden de la amplitud de las oscilaciones de la línea de margen y otra del orden del ancho de flujo.
- ◆ *Dirección longitudinal:* Existen una escala propia y otra forzada. La escala propia es la escala de adaptación hidrodinámica, que es la distancia necesaria para que un perfil de velocidades perturbado regrese al equilibrio local. Esta escala es del orden de 10 veces la profundidad (Tarela y Menéndez 1992b, Menéndez 1997c). Por su parte, la escala forzada es la asociada al efecto de remanso producido por la condición de borde impuesta por el reservorio y es del orden de la extensión del reservorio ( $L$ ).

Nótese que, excepto por la escala de adaptación hidrodinámica, la geometría condiciona totalmente las escalas hidrodinámicas en las tres direcciones espaciales.

Los órdenes de magnitud de las distintas escalas hidrodinámicas, para cada cuerpo de agua, se muestran en la siguiente tabla:

*Tabla 2.2 - Ordenes de magnitud de las escalas hidrodinámicas (en metros)*

| <b>Cuerpo</b>   | <b>Origen</b>               |                              |                             |                            |                                 |
|-----------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------------|---------------------------------|
|                 | <i>Turbulencia de fondo</i> | <i>Turbulencia de margen</i> | <i>Flujo medio vertical</i> | <i>Flujo medio lateral</i> | <i>Flujo medio longitudinal</i> |
| <i>Emisor</i>   | $10^{-5} - 10$              | $10^{-5} - 10^2$             | $10^{-3} - 10$              | $1 - 10^2$                 | $10 - 10^3$                     |
| <i>Receptor</i> | $10^{-5} - 10^2$            | $10^{-5} - 10^3$             | $10^{-2} - 10^2$            | $10 - 10^3$                | $10^2 - 10^5$                   |

Las *escalas sedimentológicas* pueden caracterizarse de acuerdo al mismo esquema de análisis que las escalas hidrodinámicas. La diferencia es que la escala de adaptación sedimentológica, que es la distancia necesaria para que un perfil de concentración de sedimento (en suspensión) perturbado regrese al equilibrio local, es del orden de 100 veces la profundidad local, pudiendo llegar a 1000 veces la profundidad para el caso de sedimentos finos (Menéndez 1997c). Para el presente problema, ésto no cambia el orden de magnitud de las escalas mostrado en la tabla 2.2.

La figura 2.1 representa los distintos rangos de escalas espaciales, de acuerdo a su origen. Los modelos matemáticos del problema varían en función de cuáles escalas resuelven y cuáles no. Para estas últimas, los modelos representan sus efectos integrados sobre las escalas resueltas.

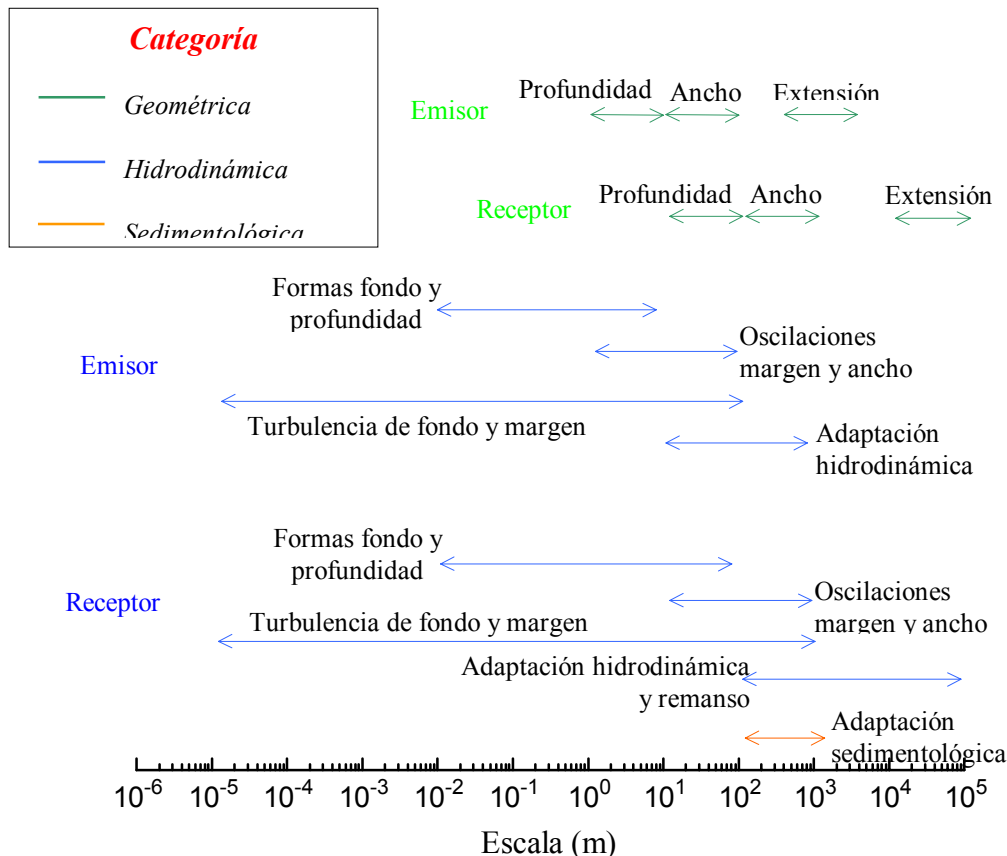


Figura 2.1 – Esquema de las escalas físicas espaciales involucradas en el problema de sedimentación en reservorios.

### 2.3 HIPÓTESIS

Se partirá de cuatro hipótesis básicas no restrictivas, cuya aplicación al problema de estudio no es necesario explicar, a saber,

- El flujo es incompresible
- El flujo es turbulento
- La profundidad local es mucho menor que la extensión del reservorio:  $h \ll L$
- La profundidad local es mucho menor que el ancho local:  $h \ll B$

Una quinta hipótesis básica consiste en suponer que el sedimento que se transporta en suspensión lo hace como un contaminante pasivo, es decir, que no influye sobre la hidrodinámica. La validez de esta hipótesis requiere que la concentración del sedimento en suspensión sea lo suficientemente baja (inferior a alrededor de 2500 mg/l). Permite desacoplar el modelo hidrodinámico del sedimentológico. No obstante, el amortiguamiento de la turbulencia cerca del fondo (“*damping*”), por efecto de una posible alta concentración de sedimentos (que supera el valor recién mencionado) puede ser tenido en cuenta (ver Capítulo 3).

Adicionalmente, se adoptarán las siguientes hipótesis simplificativas:

- i. La relación de aspecto entre el ancho y el largo del reservorio es muy baja.
- ii. Las escalas de tiempo de las excitaciones externas del sistema (régimen hidrológico del aporte y operación del nivel de embalse) son largas en relación a la escala de tiempo de adaptación del flujo a la nueva condición.
- iii. La concentración de sedimentos en suspensión es lo suficientemente baja como para evitar la formación de corrientes de turbidez.
- iv. La estratificación térmica es lo suficientemente lábil como para no afectar el proceso de transporte de sedimentos en suspensión.

La hipótesis i, que puede expresarse simbólicamente como  $L \gg B$ , determina que hay una dirección principal de flujo (la longitudinal) y que las desviaciones de las variables hidrodinámicas en la dirección lateral, respecto de su valor medio, son débiles.

La hipótesis ii determina condiciones de flujo cuasi-estacionario en todo el tramo de estudio. La escala temporal de adaptación del flujo a las excitaciones externas puede estimarse como  $5L/c$ , donde  $c$  es la velocidad media de propagación de las ondas gravitatorias superficiales en el reservorio (siendo  $L/c$  el tiempo propio del sistema), que puede calcularse como  $c = (gh)^{1/2}$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Resultan, entonces, tiempos de adaptación del orden de 30 minutos a 15 horas. Las escalas de tiempo hidrológicas son, en general, mucho mayores que esos tiempos de adaptación (del orden de semanas o meses). Por su parte, las escalas de tiempo de operación del nivel pueden ser comparables, pero aún así el efecto de impermanencia de la operación podría resultar despreciable en tanto estos cambios fueran eventuales.

La hipótesis iii conduce a condiciones que relacionan, básicamente, la diferencia de densidad por contenido de material sólido, la velocidad media del flujo y la profundidad local. Si bien no existe un criterio universal, las condiciones se condensan en parámetros adimensionales, en general formados por el número de Froude densimétrico (o el número de Richardson) y el número de Reynolds (Rouse 1950, Graf 1983b, Miyanaga et al. 1994). Por ejemplo, estudios

experimentales determinaron que el número de Froude densimétrico debe ser inferior a 0.78 (Jiahua 1986).

La hipótesis iv significa que la termoclina no llega a formarse. Por ejemplo, un criterio para que esto ocurra fue establecido por Iwasa y otros, quienes determinaron que el número de Froude densimétrico asociado a la diferencia de densidad por temperatura debe superar el valor 0.01 (Miyanaga et al. 1994).

De las hipótesis iii y iv también surge que el fluido puede ser considerado como homogéneo.

## 2.4 ESCALAS RESUELTAS Y NO RESUELTAS

*En las secciones siguientes se planteará en detalle el modelo matemático que se utilizará para el problema de la sedimentación en un embalse. No obstante, para clarificar el objetivo de los análisis presentados, resulta pertinente describir el tratamiento que se le dará a las escalas hidrodinámicas identificadas en la sección 2.2:*

- *Turbulencia de fondo:* Estas escalas no se resuelven. Su efecto integrado sobre el flujo se evalúa mediante la promediación de Reynolds (ver más abajo), que da lugar a las tensiones turbulentas, las cuales generan redistribución (difusión) de cantidad de movimiento en la vertical. El efecto resistivo sobre el flujo medio surge de imponer la condición de contorno en el fondo (ver más abajo).
- *Turbulencia de margen:* Estas escalas no se resuelven. Su efecto integrado sobre el flujo se evalúa a partir de la promediación de Reynolds (ver más abajo), que da lugar a tensiones turbulentas, las cuales generan redistribución (difusión) de cantidad de movimiento en la dirección lateral. El efecto resistivo sobre el flujo medio, asociado a la tensión de corte contra la margen y ligado a las irregularidades de la superficie, resulta despreciable en virtud de la hipótesis  $h \ll B$ .
- *Flujo medio/dirección vertical:* No se resuelve la escala ligada a la amplitud de las formas de fondo. Su efecto integrado se manifiesta como una resistencia adicional (arrastre por forma), que se representa a través de una altura efectiva (ver más abajo). Sí se resuelve la escala asociada a la profundidad.
- *Flujo medio/dirección lateral:* No se resuelve ni la escala ligada a la amplitud de variación de la alineación de la margen ni la del orden del ancho de flujo. Sus efectos integrados se manifiestan, respectivamente, como una resistencia adicional (arrastre por forma), que de todas formas resulta despreciable debido a la hipótesis  $h \ll B$ .
- *Flujo medio/dirección longitudinal:* Se resuelven tanto la escala de adaptación hidrodinámica como la ligada a la extensión del reservorio.

## 2.5 LEYES DE CONSERVACIÓN

Las ecuaciones de movimiento para el flujo de agua son las ecuaciones de Navier-Stokes. Las mismas, escritas como un conjunto de leyes de conservación en forma tensorial y en un sistema de referencia no inercial, son:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{Q} \quad (2.1)$$

con  $t$  el tiempo y

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q \\ \rho \mathbf{f}_{\text{vol}} + q \mathbf{u}_0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del agua,  $\mathbf{u}$  el vector velocidad,  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones,  $q$  y  $\mathbf{u}_0$  el aporte de masa por unidad de volumen y unidad de tiempo y la velocidad de las fuentes de agua (tomas o descargas concentradas), respectivamente, y  $\mathbf{f}_{\text{vol}}$  las fuerzas (externas) de volumen por unidad de masa. En este caso  $\mathbf{f}_{\text{vol}} = \mathbf{g}$ , siendo  $\mathbf{g}$  el vector aceleración de la gravedad. La forma del tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \left( p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I} \quad (2.3)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica del agua,  $p$  la presión e  $\mathbf{I}$  el tensor unitario.

Debido a la hipótesis  $i$  (sección 2.3), que indica que la relación de aspecto entre la escala espacial lateral y la longitudinal es pequeña, puede despreciarse el efecto de la fuerza de Coriolis (Gray 1986), por lo cual no ha sido incluida en (2.1).

La primer componente de (2.1) es la ecuación de continuidad (EC) y expresa la conservación de la masa de fluido, suponiendo que no existen fuentes puntuales. La segunda componente es la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (ECM).

Como se considera que el flujo es incompresible y homogéneo, la densidad es constante y uniforme, por lo que EC reduce las soluciones a aquellas con campos de velocidad de divergencia nula (excepto en los puntos de toma y descarga):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{q}{\rho} \quad (2.4)$$

mientras que ECM se transforma en

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g} + \frac{q}{\rho} \mathbf{u}_0 \quad (2.5)$$

Debido a la condición de incompresibilidad (2.4), el tensor de tensiones adopta la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - p\mathbf{I} \quad (2.6)$$

Las leyes de conservación se complementan con condiciones iniciales y de borde, que se presentarán oportunamente.

## 2.6 EFECTOS INTEGRADOS DE TURBULENCIA Y FLUJO LATERAL

### 2.6.1 Tratamiento de la turbulencia

En las aplicaciones de ciencia e ingeniería actuales, la resolución del sistema (2.4)-(2.5), con las condiciones iniciales y de borde apropiadas, se encara mediante tres técnicas distintas que, en orden decreciente de capacidad de resolución, son (Arunajatesan et al. 2000):

- El método DNS (*Direct Numerical Simulation*), que se basa en resolver todas las escalas físicas involucradas en el problema, lo cual requiere la utilización de equipos computacionales de alta performance
- El método LES (*Large Eddy Simulation*), que resuelve las mayores escalas del movimiento turbulento y modela los efectos de las escalas menores no resueltas
- El método RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) que utiliza el concepto clásico de promediar los efectos de la turbulencia y resolver sólo el flujo medio.

En este trabajo se utiliza el método RANS, que constituye una representación suficiente para el objetivo propuesto: simular el transporte de sedimentos.

Para obtener las ecuaciones de movimiento, el método RANS considera que cualquier campo hidrodinámico se puede visualizar como

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{r}, t) + \phi'(\mathbf{r}, t) \quad (2.7)$$

donde  $\phi(\mathbf{r}, t)$  es el valor instantáneo del campo  $\phi$  en la posición  $\mathbf{r}=(x_1, x_2, x_3)^T$ ,

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}, t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

el valor promedio en el ensamble y  $\phi'(\mathbf{r},t)$  la fluctuación turbulenta instantánea alrededor del valor promedio. En (2.8) la suma se extiende sobre una juego de muestras, cada una tomada en el mismo punto del espacio, y un tiempo  $t$  luego del comienzo de cada una de las  $N$  repeticiones del experimento (Bradshaw 1978). Por definición se cumple que  $\overline{\phi'}(\mathbf{r}, t) = 0$ .

El método de Reynolds consiste en reemplazar en EC y ECM las variables dependientes utilizando la expresión (2.7), y luego requerir que estas ecuaciones se cumplan en promedio sobre el ensamble (Bradshaw 1978).

### 2.6.2 Tratamiento del flujo medio lateral

Por otro lado, ya que el flujo bajo estudio se supone caracterizado por una dirección principal de movimiento y las variaciones laterales son poco significativas, resulta conveniente realizar una integración sobre esa dirección lateral, lo que conduce a una *descripción bidimensional según el plano vertical*.

Obviando, en principio, la descomposición de Reynolds, las variables de campo se representan, entonces, en la forma

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \phi \rangle(x_1, x_3, t) + \tilde{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

donde  $\langle \phi \rangle(x_1, x_3, t)$  es el promedio del campo sobre la dirección lateral ( $x_2$ ):

$$\langle \phi \rangle \equiv \frac{1}{B} \int_{b_d}^{b_i} \phi dx_2 \quad (2.10)$$

con  $B(x_1, x_3, t) = b_i - b_d$  el ancho de la sección de flujo, siendo  $b_i$  y  $b_d$  las funciones que definen los márgenes izquierda y derecha, respectivamente (ver figura 2.2 y Anexo 1), y donde  $\tilde{\phi}(\mathbf{r}, t)$  es la desviación local instantánea respecto del promedio lateral. En este caso se verifica que  $\langle \tilde{\phi} \rangle = 0$ . Se aclara aquí que el eje  $x_3$ , en general, no coincide exactamente con la vertical (la dirección de  $\mathbf{g}$ ) pero, debido a que las pendientes en los casos prácticos son pequeñas, difiere muy poco de ella. Aunque al plantear las ecuaciones esta diferencia será tomada en cuenta, en lo que sigue se nombrará equivalentemente a la dirección vertical o la dirección definida por el eje  $x_3$  (cuasi-vertical).

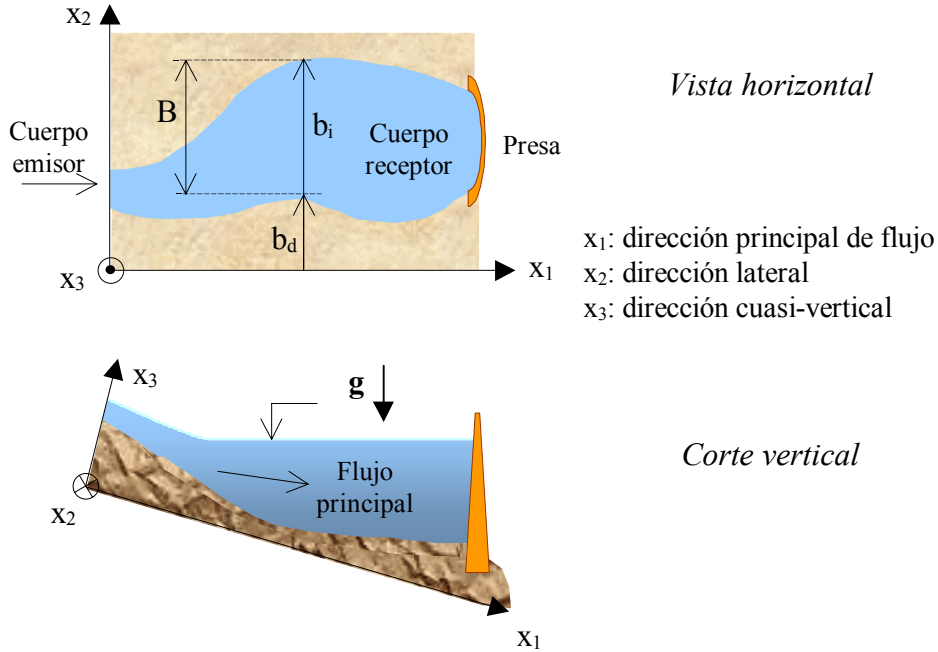


Figura 2.2 – Esquema de un reservorio y sistema de coordenadas.

### 2.6.3 Tratamiento combinado

Para trabajar con los valores medios en el sentido de Reynolds y los promedios laterales de las variables de campo simultáneamente resulta conveniente combinar (2.7) con el promedio en el ensamble de (2.9), resultando (Karpic y Raithby 1990)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \bar{\phi} \rangle(x_1, x_3, t) + \tilde{\phi}(\mathbf{r}, t) + \phi'(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

Expresando las variables de campo mediante (2.11), las ecuaciones tridimensionales (3D) (2.4) y (2.5) pueden ser promediadas sobre el ensamble de estados turbulentos para obtener ecuaciones para el flujo medio. Luego, estas ecuaciones son integradas en la dirección lateral, sobre el ancho local del reservorio, para obtener un juego de ecuaciones bidimensionales (2D) en el plano vertical  $(x_1, x_3)$ . El detalle de este proceso se presenta en el Anexo 2. El resultado es la versión 2D conservativa de EC y ECM, de acuerdo a (A2.14) y (A2.31):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (B \langle \bar{u}_k \rangle) = \frac{1}{\rho} (\bar{\sigma}_B + B \bar{q}) \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} (B \langle \bar{u}_j \rangle) - \frac{1}{\rho B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ B \left( \langle \bar{T}_{kj} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{kj} - \rho \langle \bar{R}_{kj} \rangle \right) \right\} = g_j + \frac{\bar{q}}{\rho} \langle \bar{u}_{0j} \rangle + \Gamma_j + \tilde{\Gamma}_j \quad (2.13)$$

donde  $\bar{\sigma}_B$  es el aporte neto lateral de masa que ingresa al reservorio desde el cauce (Anexo 1),  $\bar{q}$  y  $\langle \bar{u}_{0j} \rangle$  los valor promedio en el ensamble del aporte de masa por unidad de volumen y unidad de tiempo y la velocidad de las fuentes de agua,  $\mathbf{T} \equiv \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  es el tensor de esfuerzos viscosos,  $\delta$  es la delta de Kronecker,  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$  es el tensor de flujo advectivo de cantidad de movimiento, los subíndices  $j$  y  $k$  toman los valores 1 y 3, y (ver (A2.32) y (A2.33))

$$\Gamma_j \equiv \frac{1}{B} \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} + \frac{1}{\rho B} \left\{ \langle \bar{T}_{ij} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{ij} - \rho \langle \bar{R}_{ij} \rangle \right\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (2.14)$$

$$\tilde{\Gamma}_j \equiv \frac{1}{B} \tilde{u}_j \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} + \frac{1}{\rho B} \left\{ \tilde{T}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij} - \rho \tilde{R}_{ij} \right\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (2.15)$$

En las ecuaciones (2.14) y (2.15)  $1 \leq i \leq 3$ , las funciones auxiliares  $b_i$  y  $b_d$  satisfacen la condición  $B(x_1, x_3, t) = b_i - b_d$ , de acuerdo al esquema de la figura 2.2, y se ha definido  $F \equiv x_2 - b(x_1, x_3, t)$ , según lo señalado en los Anexos 1 y 2.

Entre tales ecuaciones se observa una simetría término a término. Debido a ello, y como se supone que las desviaciones laterales son poco significativas (hipótesis i), en general el término de aporte lateral asociado a las desviaciones se desprecia (Johnson 1981), esto es, se supone que

$$|\tilde{\Gamma}_j| \ll |\Gamma_j| \quad (2.16)$$

Las formas conservativas (2.12)-(2.13) de las ecuaciones de movimiento fueron desarrolladas expandiendo sus miembros izquierdos; además se aplicó la condición (2.16), arribándose a:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \langle \bar{u}_k \rangle + \frac{1}{B} \langle \bar{u}_k \rangle \frac{\partial B}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho B} (\bar{\sigma}_B + B\bar{q}) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{u}_j \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \langle \bar{T}_{kj} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{kj} - \rho \langle \bar{R}_{kj} \rangle \right) = g_j + \frac{\bar{q}}{\rho} \langle \bar{u}_{0j} \rangle + \Gamma_j + \Phi_j \quad (2.18)$$

donde

$$\Phi_j = -\frac{1}{B} \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{\rho B} \left\{ \langle \bar{T}_{kj} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{kj} - \rho \langle \bar{R}_{kj} \rangle \right\} \frac{\partial B}{\partial x_k} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$\left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right|_{b_d}^{b_i} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.20)$$

$$\langle \phi \rangle_i \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{b_d}^{b_i} = - \langle \phi \rangle_k \frac{\partial B}{\partial x_k} \quad (2.21)$$

donde  $1 \leq i \leq 3$  y  $k$  sólo toma los valores 1 y 3, resulta

$$\Gamma_j + \Phi_j = 0 \quad (2.22)$$

Ahora bien, conviene expresar el tensor integrado de flujo advectivo en la forma

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \otimes \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{D} \rangle \quad (2.23)$$

donde el primer sumando del término derecho corresponde al flujo advectivo propiamente dicho, y

$$\langle \mathbf{D} \rangle \equiv \langle \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle \quad (2.24)$$

es el tensor de dispersión-difusión. El primer término en (2.24) es el flujo por dispersión, debido a la correlación entre los términos medios de desviación. El segundo término corresponde a la difusión turbulenta, producida por las correlaciones de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad, y define las conocidas tensiones de Reynolds.

Entonces, aplicando (2.22) y (2.23) a (2.18), expandiendo el término advectivo y utilizando (2.17) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\mathbf{u}}_j \rangle + \langle \bar{\mathbf{u}}_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \bar{\mathbf{u}}_j \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \langle \bar{T}_{kj} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{kj} - \rho \langle \bar{D}_{kj} \rangle \right) = \\ = g_j - \frac{1}{B} \langle \bar{\mathbf{u}}_j \rangle \left( \frac{\bar{\sigma}_B}{\rho} - \langle \bar{\mathbf{u}}_k \rangle \frac{\partial B}{\partial x_k} \right) + \frac{\bar{q}}{\rho} \left( \langle \bar{\mathbf{u}}_{0j} \rangle - \langle \bar{\mathbf{u}}_j \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

En (2.17) y (2.25) todas las variables están integradas lateralmente y promediadas en el ensamble. Para simplificar la notación, de aquí en adelante se omitirán los símbolos que manifiestan tal condición, la cual, salvo mención expresa, se dará por sobreentendida. Se tiene entonces

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{u_k}{B} \frac{\partial B}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho B} (\sigma_B + Bq) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{kj} = g_j - \frac{1}{B} u_j \left( \frac{\sigma_B}{\rho} - u_k \frac{\partial B}{\partial x_k} \right) + \frac{q}{\rho} (u_{0j} - u_j) \quad (2.27)$$

donde

$$\tau_{kj} = T_{kj} - p\delta_{kj} - \rho D_{kj} \quad (2.28)$$

es el tensor de tensiones efectivas. Además del término de presión, en (2.28) están involucradas las tensiones viscosas (difusión viscosa), las debidas a correlaciones entre fluctuaciones turbulentas (difusión turbulenta) y aquellas provenientes de la interacción de los términos de desviación (dispersión).

Cabe mencionar que si se tiene en cuenta que el sistema de ecuaciones se resuelve numéricamente, entonces se debería agregar un término adicional en (2.28), proveniente del proceso de discretización (Deardorff 1970). El nuevo término tendría en cuenta las correlaciones entre las desviaciones respecto de los valores medios en cada elemento (volumen) de discretización, constituyendo el tensor de tensiones de la escala sub-grilla (SGS). El término SGS se puede modelar en analogía con el criterio de Boussinesq, con un coeficiente de proporcionalidad asociado al proceso de discretización, por ejemplo el de Smagorinsky (Deardorff 1970). Caso contrario, el esquema numérico deberá ser provisto con alguna técnica de estabilización que haga las veces de difusión SGS. Oñate presentó una técnica para derivar tales términos de estabilización numérica a partir de conceptos asociados a las escalas SGS (Oñate 1996). En el Capítulo 4 se presenta el tratamiento empleando en este trabajo.

Finalmente, las ecuaciones (2.26) y (2.27) constituyen la forma no conservativa de las ecuaciones de movimiento integradas lateralmente y promediadas en el ensamble de estados turbulentos. Forman un sistema de ecuaciones de advección-difusión que se puede expresar en la forma reducida

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \right) \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{C} = (q_\sigma + q_B + q_\rho) \mathbf{Q}_u + q_\rho \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_g \quad (2.29)$$

con

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ -\tau/\rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_u \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_g \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

$$q_\sigma \equiv \frac{\sigma_B}{\rho B}, \quad q_B \equiv -(\mathbf{u}\nabla) \ln B, \quad q_\rho \equiv \frac{q}{\rho} \quad (2.30)$$

donde  $\mathbf{u}=(u_1,u_3)^T$ ,  $\mathbf{g}=(g_1,g_3)^T$ ,  $\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{pmatrix}$  y el operador  $\nabla$  actúa en el plano  $(x_1,x_3)$ .

### 2.6.4 Difusión turbulenta

Existe una amplia variedad de modelos para computar el término de correlación de fluctuaciones turbulentas en (2.14), con diferentes grados de sofisticación. Una reseña histórica de dichos modelos fue presentada por Rodi, orientada a problemas de ingeniería hidráulica (Rodi 1980). En el caso particular de flujo en reservorios, Johnson discute un conjunto de modelos aplicables a los esquemas 2D vertical y 3D (Johnson 1981). Para problemas que involucran el transporte de sedimentos, la mayoría de estos modelos sigue vigente hoy en día, dependiendo su elección del problema particular a resolver y su costo computacional (van Rijn 1987, Olsen 1999, Olsen y Kjellesvig 1999).

En este trabajo se utilizó el concepto de viscosidad de torbellino de Boussinesq, a través de una forma no simétrica del tensor de tensiones turbulentas (Gray 1986):

$$\langle \overline{u'_k u'_j} \rangle = -\nu_{tk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2.31)$$

donde no hay suma sobre  $k$  y  $\nu_{tk}$  es la viscosidad de torbellino en la dirección  $k=1,3$ . Para representar esta viscosidad se empleó un modelo algebraico, que se describe en la sección 2.9.3.

## 2.7 PARABOLIZACIÓN DE LAS ECM

El objetivo de esta sección es analizar el orden de magnitud y el peso relativo de los términos del sistema (2.29), conjuntamente con el uso del modelo definido por (2.31). Para ello se utilizará la notación  $x_1 = x$ ,  $x_3 = z$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_3 = w$ , y las escalas características de la tabla 2.3:

*Tabla 2.3 – Escalas y órdenes de magnitud característicos para flujo en reservorios. Algunos valores fueron obtenidos de Gray (1986).*

| Magnitud                      | Símbolo      | Escala                         | Orden                 | Unidad            |
|-------------------------------|--------------|--------------------------------|-----------------------|-------------------|
| <i>Distancia longitudinal</i> | $L$          | Longitud del reservorio        | $10^4$ a $10^5$       | m                 |
| <i>Distancia vertical</i>     | $h$          | Profundidad                    | $10$ a $10^2$         | m                 |
| <i>Velocidad longitudinal</i> | $U$          | Velocidad en reservorio        | $10^{-1}$ a $10^{-2}$ | m/s               |
| <i>Presión</i>                | $\rho gh$    | Valor hidrostático en el fondo | $10^5$ a $10^6$       | kg/m <sup>2</sup> |
| <i>Viscosidad</i>             | $\nu$        | Viscosidad del agua            | $10^{-6}$             | m <sup>2</sup> /s |
| <i>Viscosidad torbellino</i>  | $[\nu_{tz}]$ | Valor medio vertical           | $10^{-4}$ a $10^{-2}$ | m <sup>2</sup> /s |

### 2.7.1 Orden de magnitud de la velocidad vertical

Expresando EC en forma conservativa, sin tener en cuenta el aporte lateral, el requerimiento de que sus dos términos sean de igual orden implica que

$$\frac{U}{L} \approx \frac{W}{h} \quad (2.32)$$

con lo cual el orden de magnitud de la componente vertical de la velocidad,  $W$ , es

$$W \approx \frac{h}{L} U = \alpha U \quad (2.33)$$

con  $\alpha \equiv h/L$  la relación de aspecto del reservorio. Utilizando la tabla 2.3 surge que  $\alpha \approx 10^{-4}$  a  $10^{-2} \ll 1$ , deduciéndose a partir de (2.33) el conocido resultado

$$W \ll U \quad (2.34)$$

### 2.7.2 Orden de magnitud de los términos del tensor de tensiones efectivas

#### 2.7.2.1 Relación entre las tensiones viscosas y turbulentas

Como el flujo es turbulento, las tensiones viscosas resultan despreciables frente a las tensiones de Reynolds en las ECM:

$$\frac{|\tau_{kj}|}{\langle \mathbf{u}_k \mathbf{u}_j \rangle} = \frac{\left| \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right|}{\left| v_{tk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right|} \approx \frac{\nu}{[v_{tk}]} \approx 10^{-4} \text{ a } 10^{-2} \ll 1 \quad (2.35)$$

donde se utilizaron los valores de la tabla 3.2 y que, siendo la turbulencia aproximadamente isótropa,  $[v_{tk}] \approx [v_{tz}]$ . La condición (2.35) se satisface aún cerca del lecho, puesto que los elementos de rugosidad (partículas del fondo) producen, en general, la ruptura de la capa viscosa.

#### 2.7.2.2 Relación entre las tensiones turbulentas

Debido a (2.35), las tensiones efectivas son producidas por el tensor de dispersión-difusión. En el caso de la ECM en la dirección  $x$  (ECM $_x$ ), y utilizando (2.31), los términos provenientes de la divergencia de este tensor son:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} D_{kl} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \tilde{u} \tilde{u} \rangle - v_{tx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \langle \tilde{u} \tilde{w} \rangle - v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (2.36)$$

Ya que  $[v_{tk}] \approx [v_{tz}]$ , utilizando la tabla 2.3 surge que la relación entre los dos términos turbulentos es:

$$\frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_{tx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right|} \approx \alpha^2 \approx 10^{-8} \text{ a } 10^{-4} \ll 1 \quad (2.37)$$

La relación (2.37) implica que la difusión horizontal puede despreciarse frente a la vertical. Procediendo análogamente en ECMz se arriba a la misma relación:

$$\frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_{tx} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right|} \ll 1 \quad (2.38)$$

### 2.7.2.3 Relación entre las tensiones dispersivas

Para analizar los términos de dispersión conviene previamente determinar el orden de magnitud de la relación entre  $\tilde{u}$  y  $\tilde{w}$ . Con este fin, la forma conservativa de EC, sin considerar el aporte de masa desde el cauce, se expande en la forma

$$\frac{\partial B u}{\partial x} + \frac{\partial B w}{\partial z} = \left( \frac{\partial B \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial B \langle w \rangle}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial B \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial B \tilde{w}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.39)$$

Como el primer sumando del segundo término en (2.39) satisface EC, entonces el segundo sumando cumple

$$\frac{\partial B \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial B \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.40)$$

Procediendo como en (2.32), si  $\tilde{U}$  y  $\tilde{W}$  son las escalas asociadas a las desviaciones de las componentes de velocidad longitudinal y vertical, respectivamente, entonces la relación entre ellas es

$$\tilde{W} \approx \frac{h}{L} \tilde{U} = \alpha \tilde{U} \quad (2.41)$$

De este modo, surge que la relación entre los dos términos dispersivos en ECMx es del mismo orden:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \tilde{u} \tilde{u} \rangle \right]}{\frac{\partial}{\partial z} \left[ \langle \tilde{u} \tilde{w} \rangle \right]} \approx \frac{h}{L} \alpha^{-1} = 1 \quad (2.42)$$

lo cual también se cumple para los términos dispersivos de ECMz:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \tilde{w} \tilde{u} \rangle \right]}{\frac{\partial}{\partial z} \left[ \langle \tilde{w} \tilde{w} \rangle \right]} \approx 1 \quad (2.43)$$

#### 2.7.2.4 Relación entre las tensiones dispersivas y la difusión turbulenta vertical

Fischer (1973) discutió el concepto de dispersión para flujos de corte en canales, incluyendo los efectos en las direcciones longitudinal, vertical y lateral. En el caso particular de un flujo de capa límite se cuantificaron los términos de dispersión, utilizando un modelo 3D, encontrándose que los mismos eran despreciables en cuanto a la redistribución de cantidad de movimiento (McGuirk y Rodi 1978).

Aquí se presenta un análisis simplificado de la dispersión, con el objeto de definir un criterio que permita establecer en qué casos el efecto dispersivo sobre la transferencia de cantidad de movimiento es importante, y cuándo se puede despreciar.

En primer lugar, se analizará el término asociado a las no uniformidades del perfil horizontal de velocidad en la dirección lateral. Para ello se consideran los siguientes perfiles simplificados (ver figura 2.3):

$$\begin{aligned} u_{1a}(x_2) &\equiv u_0 \left[ 1 + \beta \cos \left( 2\pi \frac{x_2}{B} \right) \right] \\ u_{1b}(x_2) &\equiv u_0 \left[ 1 + \beta \cos \left( \pi \frac{x_2}{B} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $u_0$  representa un perfil uniforme sobre el cual actúa una perturbación, cuya amplitud es modulada por el parámetro  $\beta$ . Ambos perfiles presentan, en forma simplificada, patrones similares a los de flujo en canales con geometría relativamente regular, y entonces pueden ser representativos de flujos caracterizados por una dirección principal de movimiento. Ya que se considera, como hipótesis básica, que el ancho de la sección de flujo es mucho mayor que la profundidad, se despreció la capa límite interna que estos flujos desarrollan sobre las márgenes, resultando entonces

$$\begin{aligned} \langle u_{1a} \rangle &= u_0 & \tilde{u}_{1a} &= \beta u_0 \cos\left(2\pi \frac{x_2}{B}\right) \\ \langle u_{1b} \rangle &= u_0 \left(1 + \frac{2\beta}{\pi}\right) & \tilde{u}_{1b} &= \beta u_0 \left(\cos\left(\pi \frac{x_2}{B}\right) - \frac{2}{\pi}\right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_{1a} \tilde{u}_{1a} \rangle &= 0.5\beta^2 u_0^2 \\ \langle \tilde{u}_{1b} \tilde{u}_{1b} \rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)\beta^2 u_0^2 \approx 0.095\beta^2 u_0^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como era de esperar, en ambos casos los términos dispersivos son proporcionales a  $\beta^2 u_0^2$ .

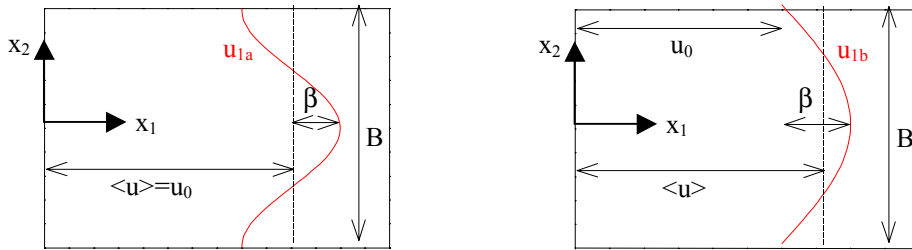


Figura 2.3 – Perfiles horizontales de velocidad no uniformes en la dirección lateral.

Debido a (2.42), en ECMx basta comparar uno de los términos dispersivos con el término difusivo remanente, surgiendo que

$$\frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \tilde{u} \tilde{u} \rangle \right] \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right|} \approx \frac{\alpha \beta^2 U^2 h}{[v_{tz}] U} \equiv c \beta^2 \quad (2.47)$$

Haciendo uso de las relaciones (2.33) y (2.41), la relación entre los términos dispersivos en ECMz (del mismo orden debido a (2.43)) y la difusión vertical resulta análoga a la anterior:

$$\frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left\langle \tilde{w} \tilde{u} \right\rangle \right] \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right|} \approx c\beta^2 \quad (2.48)$$

La tabla 2.4 presenta algunas estimaciones basadas en (2.47) y (2.48), tomando una relación de aspecto media  $\alpha \approx 10^{-3}$ . Se muestran dos regímenes distintos: el flujo aguas arriba de la boca del reservorio (emisor) y en el reservorio propiamente dicho (receptor). Se consideraron amplitudes de los términos de perturbación del orden del 10% ( $\beta=0.1$ ) y 50% ( $\beta=0.5$ ). En la zona del emisor el término de dispersión es despreciable frente al de difusión turbulenta vertical. En la zona del receptor, esa relación se mantiene si las desviaciones son menores, aproximadamente, al 50% del valor medio. Para desviaciones del orden del 50% la relación es de 0.25, esto es, el término dispersivo comienza a tener peso propio.

Tabla 2.4 – Relación entre términos de dispersión y difusión.

| Zona flujo      | Valores típicos |                                   | $c\beta^2$        |                   |
|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-------------------|-------------------|
|                 | $U$<br>[m/s]    | $[v_{tz}]$<br>[m <sup>2</sup> /s] | Desviación<br>10% | Desviación<br>50% |
| <i>Emisor</i>   | $10^{-1}$       | $10^{-2}$                         | $10^{-4}$         | $10^{-3}$         |
| <i>Receptor</i> | $10^{-2}$       | $10^{-4}$                         | $10^{-2}$         | 0.25              |

Aunque el análisis se ha hecho en forma simplificada, permite establecer ciertos rangos de trabajo donde los efectos del tensor de dispersión pueden ser despreciados. Por ejemplo, siempre que las desviaciones no superen el 10% del valor medio lateral, los términos dispersivos se desprecian frente al término de difusión turbulenta vertical. En lo que sigue del trabajo se supondrá que las desviaciones están dentro de los límites que permiten que los términos dispersivos para la transferencia de cantidad de movimiento sean despreciados frente a los términos de difusión turbulenta.

### 2.7.3 Orden de magnitud de los términos geométricos

En (2.29) está presente un término proporcional a  $q_B$ , asociado a las variaciones del cauce. En EC, dicho término da cuenta de los cambios de volumen debidos a tales variaciones geométricas y, como está asociado a la conservación de la masa, no puede ser despreciado.

Para analizar el peso relativo del término con  $q_B$  en las ECM se lo compara con el término de difusión turbulenta vertical. Por ejemplo, para la ECMx resulta:

$$\frac{\left| u \left( \frac{u}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{w}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right|} \approx \frac{Uh^2}{B[v_{tz}]} \left( \frac{\Delta B}{\Delta L} + \alpha \frac{\Delta B}{\Delta h} \right) \approx \frac{Uh^2}{B[v_{tz}]} \frac{\Delta B}{\Delta L} \quad (2.49)$$

donde  $\Delta B/\Delta L$  y  $\Delta B/\Delta h$  cuantifican los órdenes de magnitud de la divergencia horizontal del cauce y su talud lateral, respectivamente. Para que no exista separación del flujo en las paredes laterales, la divergencia del cauce no debe superar, aproximadamente, los  $7^\circ$ ; es decir,  $\Delta B/\Delta L < 0.12$ . De este modo, los valores típicos de la tabla 2.3 aplicados a (2.49) arrojan

$$\frac{\left| u \left( \frac{u}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{w}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right|} < 0.1 \quad (2.50)$$

Como en los casos anteriores, el mismo resultado surge para la ECMz. Además, ya que la cantidad de movimiento no es una cantidad que se conserva, en las ECM el término geométrico no tiene la importancia relativa que se manifestó para EC. De este modo, y en virtud de (2.50), tales términos han sido despreciados.

#### 2.7.4 Ecuaciones de movimiento a resolver: forma parabólica

Del análisis realizado en la sección 2.7.2 surge que el único término relevante dentro del tensor de tensiones efectivas es el asociado a la difusión turbulenta vertical (además del gradiente de la presión). En efecto, aplicando los resultados de las secciones 2.7.2 y 2.7.3, la forma (no conservativa) de las ecuaciones que gobiernan el sistema bajo estudio es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \ln B}{\partial x} + w \frac{\partial \ln B}{\partial z} = q_\sigma + q_\rho \quad (2.51)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = g_x - u q_\sigma + q_\rho (u_0 - u) \quad (2.52)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = g_z - w q_\sigma + q_\rho (w_0 - w) \quad (2.53)$$

donde, como se trabaja con la *aproximación cuasi-estacionaria* (hipótesis ii), los términos de derivada temporal en (2.29) han sido obviados.

Se debe destacar que las condiciones (2.37) y (2.38) producen que el sistema final de ecuaciones sea *parabólico* en la dirección principal de movimiento, ya que evitan que los términos de difusión horizontal estén presentes. La forma parabólica obtenida resulta ser *fundamental* en la elección del método numérico de resolución (ver Capítulo 4).

Nótese que, si en lugar de (2.31), se utiliza una forma simétrica para el tensor de tensiones turbulentas, luego del análisis de las secciones anteriores se obtiene un término adicional (Tarela y Menéndez 1999a). El peso de dicho término en el campo de velocidades resultante es poco significativo (Fischer 1973), y por ello se optó por trabajar con (2.31). De esta forma, las expresiones de las ECM recién presentadas muestran una *simetría* útil en su implementación computacional.

## 2.8 ANALISIS DIMENSIONAL DE LAS ECM

### 2.8.1 ECMz: distribución de presiones

Por simplicidad, en esta sección se omitirán los términos debidos a las fuentes y los aportes laterales. Tratando el resto de los términos de la ECMz en la forma usual, se obtiene la siguiente forma adimensional:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\alpha Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\alpha^2 Fr^2} \left( g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2.54)$$

donde las cursivas indican cantidades adimensionales, con  $Re \equiv Uh/[v_{tz}]$  el número de Reynolds y  $Fr \equiv U/\sqrt{gh}$  el número de Froude.

Para las escalas involucradas en este problema, se pueden distinguir los siguientes órdenes de soluciones:

- *Orden cero*: como  $\alpha^2 Fr^2 \ll \alpha Re \approx 1$ , el segundo término del miembro derecho de (2.54) es el dominante. Esto indica que, a orden cero, se obtiene una distribución hidrostática de presiones (por integración directa del término dominante):

$$p = p_h \equiv \rho g \cos \theta (\zeta - z) + p_0 \quad (2.55)$$

donde se usó que  $g_z = -g \cos \theta$ , con  $g = |\mathbf{g}|$  y  $\theta$  indicando la rotación del eje z respecto de la horizontal, siendo  $\zeta$  la posición de la superficie libre, y  $p_0$  la presión atmosférica.

- *Orden uno*: si se desdobra la presión en sus componentes hidrostática,  $p_h$ , y dinámica,  $p_d$ ,

$$p = p_h + p_d \quad (2.56)$$

la forma adimensional de la ECMz resulta

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\alpha Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\pi_d}{\alpha^2 Fr^2} \frac{\partial p_d}{\partial z} \quad (2.57)$$

En (2.57) se utilizó la escala  $\rho gh \pi_d$  para la componente dinámica de la presión, siendo  $\pi_d$  una medida del peso de la componente dinámica respecto de la hidrostática en la presión total. Dado que  $\alpha Re \approx 1$ , se concluye que  $\pi_d = \alpha^2 Fr^2$ .

Obsérvese que, de acuerdo a (2.54), el orden uno de la ECMz implica, respecto del orden cero, resolver una perturbación de orden  $\alpha^2 Fr^2$ .

### 2.8.2 ECMx: modelos estáticos y dinámicos

Utilizando el desdoblamiento de la presión definido en (2.56), la expresión adimensional para la ECMx es:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\alpha Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{Fr^2} \left( \frac{\sin \theta}{\alpha} - \cos \theta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \alpha^2 \frac{\partial p_d}{\partial x} \quad (2.58)$$

donde  $\zeta$  indica, en forma adimensional, la posición de la superficie libre, y se utilizó la relación  $\pi_d \approx \alpha^2 Fr^2$ . En este caso se pueden diferenciar soluciones asociadas a los siguientes órdenes:

- *Orden cero*: en (2.58) los términos de advección y difusión son de orden similar, puesto que  $\alpha Re \approx 1$ . En general  $Fr^2 \ll \alpha Re \approx 1 \ll \alpha^{-2}$ , por lo cual el segundo término del miembro derecho es el dominante. Así, a orden cero la ECMx se reduce a la condición estática, consistente con una superficie libre horizontal:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \text{tg} \theta \quad (2.59)$$

- *Orden uno*: ya que  $\alpha Re \ll \alpha^{-2}$  el orden uno se consigue teniendo en cuenta el término de advección-difusión en (2.58), es decir:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\alpha Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{Fr^2} \left( \frac{\sin \theta}{\alpha} - \cos \theta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad (2.60)$$

En este caso, la solución está asociada a la introducción de los efectos de la inercia y la difusión vertical, de orden  $Fr^2$ , pero considerando a la presión como hidrostática.

- *Orden dos*: corresponde a resolver (2.58) en forma completa, incluyendo el término de presión dinámica. Obsérvese que, en este caso, la perturbación adicional resulta de orden  $\alpha^2 Fr^2$ , es decir, del orden de la perturbación asociada al orden uno de la ECMz.

Nótese que, de acuerdo a los resultados obtenidos aquí, es posible construir modelos con diferente grado de resolución. Por ejemplo, el orden cero en ECMz es compatible con los órdenes cero y uno de la ECMx.

El análisis dimensional realizado en estas dos secciones se ve alterado cuando se trabaja sobre escalas longitudinales más cortas, por ejemplo del orden de la escala de adaptación hidrodinámica. En ese caso, los gradientes de velocidad y las curvaturas geométricas locales activan la componente dinámica de la presión. Por ello, se ha optado por trabajar con la forma completa de las ECM, es decir, ECMx a orden dos y ECMz a orden uno.

De esta forma, el modelo planteado está preparado para ser generalizado a casos donde existan cambios más abruptos del nivel de fondo (por ejemplo, el flujo a través de canales de dragado). Para el problema de la sedimentación en un reservorio existen, básicamente, dos situaciones donde el perfil de presión se puede apartar de la condición hidrostática:

- Cuando el río es de pendiente relativamente alta, en el encuentro con el volumen de agua embalsado que se produce en la boca del reservorio se puede generar una curvatura brusca en la superficie libre, incluso llegándose a producir un resalto (Olsen 1991),
- Cuando el nivel de embalse fluctúa alrededor del punto más elevado del delta sumergido, la forma local de la vena de flujo puede variar más rápidamente.

## 2.9 CIERRE DEL MODELO

### 2.9.1 Condiciones de borde en el fondo

En el Anexo 1 se presenta un análisis sobre las condiciones de borde a aplicar en el problema de flujo en un reservorio. De allí se desprende que, si el flujo lateral de masa a través del cauce (infiltración) es despreciable, en el fondo se impone la condición

$$\mathbf{u}|_b = \mathbf{u}_b \quad (2.61)$$

donde el subíndice b se refiere a la superficie del fondo donde se hace cumplir (2.61), siendo  $\mathbf{u}_b$  la velocidad impuesta.

Un tratamiento habitual para evitar la resolución del problema hasta el fondo consiste en imponer un valor de velocidad en la zona de solape entre las capas límite interna y externa:

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{U}_{\log} \quad (2.62)$$

Esta metodología resulta beneficiosa, al momento del cálculo numérico, por el ahorro en el tiempo de cómputo, el menor requerimiento de memoria y la ganancia en estabilidad al evitar una zona de fuertes gradientes.

En general,  $\mathbf{U}_{\log}$  se calcula relacionándola con el perfil logarítmico de velocidades asociado a una capa límite desarrollada (Bradshaw 1978). En la mayoría de los casos se adopta el valor de equilibrio local (Johnson 1981, Olsen y Kjellesvig 1999).

Sin embargo, imponer tal velocidad de equilibrio local significa suponer que la tensión de corte sobre el lecho también es la de equilibrio. Dado que dicha tensión se relaciona con un mecanismo primario del transporte de sedimentos, este tratamiento se consideró demasiado forzado.

Una forma posible de evitar imponer la velocidad de equilibrio local consiste en *extender el dominio de cálculo hasta el lecho*. Esto le otorga al modelo un importante grado de libertad extra en la determinación de la tensión efectiva sobre el fondo. Así, (2.61) se traduce en las condiciones de impenetrabilidad y no deslizamiento:

$$\mathbf{u}_b = 0 \quad (2.63)$$

En rigor, el modelo implementado admite la utilización alternativa de (2.62) o (2.63), esto es, la posibilidad de resolver o no la subcapa turbulenta interna.

Se debe destacar que para modelos 3D evolutivos en el tiempo es todavía casi una necesidad utilizar (2.62), debido al alto costo computacional que implica imponer (2.63), aún utilizando computadoras de alta performance (Olsen y Kjellesvig 1999).

### 2.9.2 Condiciones de borde en la superficie libre

De acuerdo a lo discutido en el Anexo 1, sobre la superficie libre se imponen las siguientes condiciones:

$$u \frac{d\zeta}{dx} - w = \sigma_\zeta \quad (2.64)$$

$$p|_\zeta = p_0 \quad (2.65)$$

$$\tau_{zx}|_\zeta = \tau_w \quad (2.66)$$

donde (2.64) es la versión estacionaria de (A1.18) del Anexo 1, siendo  $z = \zeta(x)$  la posición de la superficie libre,  $\sigma_\zeta$  el balance neto entrante entre las tasas de precipitación (positiva) y evaporación (negativa),  $p_0$  la presión atmosférica y  $\tau_w$  el esfuerzo de corte ejercido por el viento.

La superficie libre en sí misma se determina utilizando las ecuaciones de Saint-Venant para flujo unidimensional (Henderson 1966, Pujol y Menéndez 1987) y se impone como una tapa rígida sobre el dominio de flujo. Dentro del contexto de la aproximación cuasi-estacionaria (hipótesis ii), a los efectos de la determinación de la posición de la superficie libre resulta suficiente la utilización de la forma estacionaria de ese sistema de ecuaciones, que consiste en la conocida expresión para el cálculo de curvas de remanso:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \Big|_z + q_L - \frac{Q^2}{C^2\Omega^2 R}}{1 - Fr^2} \quad (2.67)$$

donde  $Q$  es el caudal,  $\Omega$  el área de la sección normal al flujo principal,  $q_L$  un término debido a los aportes laterales (Pujol y Menéndez 1987),  $C$  el coeficiente de Chezy,  $R$  el radio hidráulico, y el número de Froude en este caso está definido como:

$$Fr = \left( \frac{Q^2 B}{g\Omega^3} \right)^{1/2} \quad (2.68)$$

### 2.9.3 Modelo algebraico para la viscosidad de torbellino

El coeficiente de viscosidad de torbellino vertical, que varía a lo largo de la vertical, depende principalmente de la resistencia hidráulica del cauce. También pueden influir sobre él los gradientes horizontales de presión y la acción del viento en la superficie libre. Si el flujo estuviera estratificado, la estabilidad de la columna de agua y la presencia de ondas internas producirían efectos adicionales (Johnson 1981).

Bajo las hipótesis de este trabajo, el factor dominante está determinado por los efectos resistivos en el cauce, los cuales pueden ser caracterizados a través de la tensión de corte en el fondo. Considerando que existe una dirección principal de movimiento, y teniendo en cuenta que no se esperan recirculaciones importantes en el patrón de flujo, entonces el perfil vertical de velocidades no debería presentar un alejamiento desmedido respecto de las condiciones de equilibrio local. Por ello, la distribución lineal de tensiones en la vertical constituye una buena hipótesis de trabajo. Como la transferencia vertical de cantidad de movimiento está dada por

$$\tau = \rho \nu_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.69)$$

entonces, si en (2.69) se utiliza el perfil logarítmico de velocidad de von Karman (de equilibrio local)

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \ln \left( \frac{z - z_f}{z_0} \right) \quad (2.70)$$

la siguiente expresión resulta matemáticamente consistente con ese perfil

$$v_{tz} = k u_* (z - z_f) \left( 1 - \frac{(z - z_f)}{h} \right) \quad z_f \leq z \leq \zeta \quad (2.71)$$

que es el conocido resultado de distribución parabólica para la viscosidad de torbellino vertical en el caso de equilibrio local. En las dos últimas expresiones,  $z_f$  indica la posición del lecho,  $z_0$  es la altura (virtual) donde se anula la velocidad,  $h = \zeta - z_f$  es la profundidad,  $k$  es la constante de von Karman y  $u_*$  la velocidad de corte, relacionada con la tensión de corte en el fondo mediante

$$\tau_b \equiv \rho |u_*| u_* \quad (2.72)$$

La ecuación (2.71) se puede aplicar a la distribución vertical de arena e incluso permite cuantificar el parámetro de dispersión vertical de contaminantes con razonable precisión (Fischer 1973).

Una alternativa a (2.71) fue desarrollada por Kerssens, basándose en datos empíricos, y utilizada por van Rijn en un modelo de transporte de sedimentos (van Rijn 1987):

$$v_{tz} = k h u_* \begin{cases} \frac{(z - z_f)}{h} \left( 1 - \frac{(z - z_f)}{h} \right) & \text{si } z_f \leq z \leq z_f + h / 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } z_f + h / 2 \leq z \leq \zeta \end{cases} \quad (2.73)$$

El perfil (2.73) tiene la propiedad de predecir concentraciones de sedimentos no nulas en la superficie libre, a diferencia de (2.71). van Rijn utilizó este perfil para problemas de flujo lateral en canales dragados, calculando su amplitud a través de una ecuación diferencial ordinaria ajustada con los resultados de un modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ . Se determinó que puede representar aceptablemente los efectos de la turbulencia, aún en el caso mencionado, donde existen pendientes pronunciadas y recirculaciones atrapadas (van Rijn 1987). De acuerdo a ese trabajo, las diferencias relativas entre la magnitud de la velocidad calculada con (2.71) o (2.73) no superan el 2% (en la superficie libre, donde se presenta la mayor discrepancia).

El modelo desarrollado en este trabajo permite, a elección del usuario, utilizar las distribuciones (2.71) ó (2.73). Se extiende su aplicación fuera del equilibrio local, ya que la velocidad de corte no se fija externamente (como es habitual, por ejemplo en el modelo de van Rijn). Para ello se calcula la tensión de corte en el fondo utilizando una técnica numérica especial, desarrollada en el Capítulo 4. Además, no se permite que la viscosidad de torbellino adopte valores numéricos inferiores a la viscosidad molecular.

#### 2.9.4 Borde inferior del modelo

La posición del punto donde se impone la condición de borde (2.61), denominado  $z_b$ , es diferente si se resuelve la subcapa turbulenta interna (imponiendo (2.63)) o no (utilizando, entonces, (2.62)). En ambos casos se propone que la ubicación del borde esté relacionada con la capacidad de resistencia al flujo por parte del lecho.

En el caso en que se resuelve la subcapa interna, se toma el borde coincidiendo con la altura (virtual) donde se anula la velocidad,  $z_0$  (Menéndez y Ramaprian 1985):

$$z_b = z_f + z_0 \quad z_0 = \frac{k_s}{30} \quad (2.74)$$

donde  $k_s$  es la altura efectiva de los elementos de rugosidad del fondo. En caso contrario, se toma el borde como el límite inferior de la zona de solape (Tarela 1993):

$$z_b = z_f + z_{\log} \quad z_{\log} = 30z_0 \quad (2.75)$$

La altura efectiva de rugosidad depende de las irregularidades (asociadas a granos) y de las formas del fondo. En el Capítulo 3 se presenta un modelo para calcularla.

Ahora bien, en el cuerpo emisor la información sobre las pérdidas por fricción suele venir dada por el coeficiente de rugosidad de Manning (ven Te Chow 1959, Henderson 1966). En tal situación, es conveniente disponer de una relación entre este coeficiente y la altura de rugosidad efectiva, de forma tal que se pueda calcular  $z_b$ .

Para ello se derivó la siguiente relación (Tarela 1997):

$$k_s = 15h \exp \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{k h^{1/6}}{n^{eq} \sqrt{g}} \right\} \quad (2.76)$$

donde  $n^{eq}$  es el coeficiente de Manning equivalente, correspondiente a la altura de rugosidad efectiva  $k_s$  y a la profundidad local  $h$ . En el Anexo 3 se presenta la deducción de (2.76).

La ecuación (2.76) se puede invertir para dar:

$$n^{eq} = \frac{h^{1/6}}{\left[ 18 \log_{10} \left( \frac{12h}{k_s} \right) - 0.86 \right]} \quad (2.77)$$

la cual se puede contrastar con las relaciones de Strikler

$$n^{eq} = \frac{k_s^{1/6}}{24} \quad (2.78)$$

y Williamson

$$n^{eq} = \frac{k_s^{1/6}}{26} \quad (2.79)$$

Nótese que la ecuación (2.77), a diferencia de la (2.78) y (2.79), introduce una dependencia del coeficiente de rugosidad efectivo con la profundidad local.

La figura 2.4 presenta la validación de la relación (2.77), contrastándola con datos de campo y laboratorio, junto con una comparación con las expresiones (2.78) y (2.79). En el Anexo 3 se presenta un análisis cuantitativo entre las distintas expresiones, mostrando que la utilización de (2.77) permite minimizar los errores respecto de los datos disponibles.

### 2.9.5 Condiciones iniciales

Como el problema es parabólico en la dirección principal de movimiento, se puede definir una “coordenada de evolución” asociada a la misma. Entonces, en la sección de entrada del modelo (curso emisor) se especifica una “condición inicial” en lugar de una condición de borde. En el resto del dominio no es necesario especificar esta condición inicial (ver Capítulo 4) aunque, a los fines de incluir apropiadamente las excitaciones externas, la misma se debe dar para cada paso de tiempo (ver Capítulo 5).

En el caso del modelo hidrodinámico, consiste en imponer los perfiles de velocidad y presión. Esta información puede provenir de mediciones, aunque, en los casos prácticos, se suelen imponer condiciones de equilibrio local. En este trabajo se utilizan los siguientes perfiles:

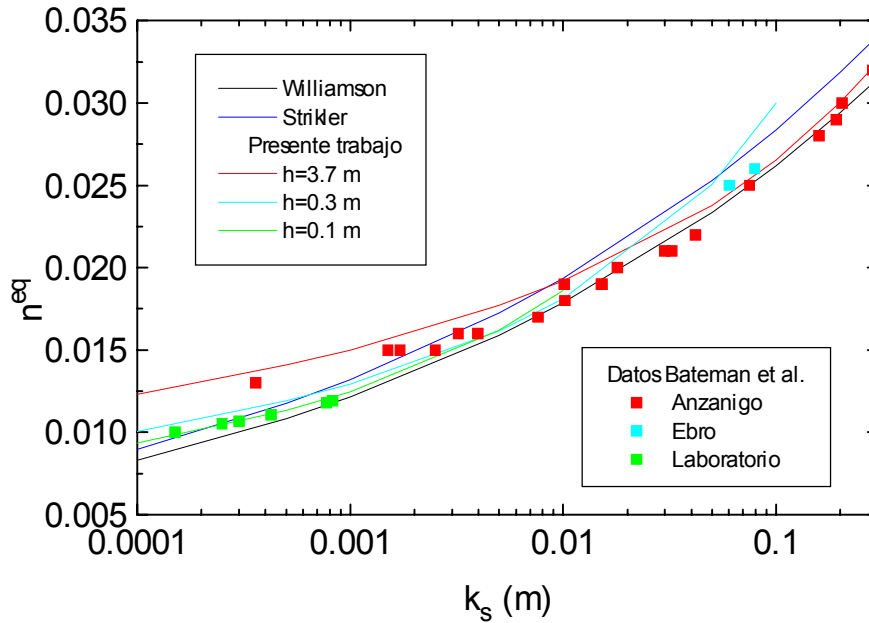


Figura 2.4 – Comparación entre las relaciones analíticas y los datos de campo y laboratorio. Las funciones correspondientes al presente trabajo se muestran con colores diferentes, cada uno de ellos asociado a un juego de datos.

- Velocidad:

En el caso de emplearse la distribución de viscosidad de torbellino (2.71) se impone el perfil logarítmico de equilibrio de von Karman

$$\mathbf{u}^{\text{eq}} = \frac{\mathbf{u}_*^{\text{eq}}}{k} \ln\left(\frac{z - z_f}{z_0}\right) \quad (2.80)$$

donde  $\mathbf{u}_*^{\text{eq}}$  es la velocidad de corte de equilibrio local.

Si se trabaja con la distribución (2.73) de Kerssens, el perfil de equilibrio local resultante es (Tarela 1993):

$$\mathbf{u}^{\text{eq}} = \frac{\mathbf{u}_*^{\text{eq}}}{k} \begin{cases} \ln\left(\frac{z - z_f}{z_0}\right) & \text{si } z_f \leq z \leq z_f + h/2 \\ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{h}{2z_0}\right) - 2\left(\frac{z - z_f}{h} - 1\right)^2 & \text{si } z_f + h/2 \leq z \leq \zeta \end{cases} \quad (2.81)$$

- Presión:

Se impone el perfil (2.55) de presión hidrostática.

Adicionalmente, se debe fijar el nivel de la superficie libre (“pelo de agua”) en la última sección aguas abajo para resolver la ecuación (2.67), teniendo en cuenta que el flujo en el reservorio es siempre subcrítico, es decir,  $Fr < 1$ . En el caso en que el flujo incidente sea supercrítico ( $Fr > 1$ ), también se requiere el nivel aguas arriba y, entonces, la integración de (2.67) debe hacerse con cuidado para determinar la transición entre ambos regímenes.

## Capítulo 3

# MODELO SEDIMENTOLÓGICO

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Se pueden distinguir dos modos de transporte de sedimentos en un flujo de agua, dependiendo del tamaño de las partículas presentes en el lecho y las condiciones de flujo:

- *Transporte de fondo*: cuando el valor de la velocidad de corte en el lecho excede el valor crítico para el inicio del movimiento, las partículas ruedan y se deslizan en contacto continuo con el fondo. Si se incrementa la velocidad de corte las partículas se mueven a lo largo del cauce a través de saltos relativamente regulares.
- *Transporte en suspensión*: cuando el valor de la velocidad de corte en el lecho excede el de la velocidad de caída de las partículas, las mismas pueden elevarse hasta un nivel en el cual las fuerzas de ascenso turbulentas son de orden comparable o mayor que el peso sumergido de las partículas. Como resultado, el sedimento entra en estado de suspensión.

Dentro del transporte en suspensión se pueden presentar dos sub-modos. El primero corresponde al material que es transportado interactuando con el lecho, con el cual se produce un constante intercambio de partículas, de acuerdo a los mecanismos de resuspensión y caída recién mencionados. El segundo corresponde a la denominada

- *Carga de lavado*: es la porción de la carga suspendida que está gobernada por el suministro de material desde aguas arriba, y no por la composición y propiedades del material del lecho.

En condiciones naturales no existe una división perfectamente marcada entre los modos de transporte de fondo y en suspensión, la cual más bien se define a partir de las necesidades de modelación del fenómeno de transporte de sedimentos.

Aunque menos frecuente en la naturaleza, existe un tercer modo de transporte que puede llegar a ocurrir a partir de la descarga del emisor en el cuerpo receptor:

- *Corriente de turbidez*: bajo ciertas condiciones de concentración del flujo entrante y el ambiente hidrodinámico, puede aparecer una corriente de fondo con entidad propia, capaz de arrastrar sedimentos finos a través de largas distancias.

En este trabajo se considerará que las partículas pueden ser transportadas como carga de fondo y suspensión, incluyendo la carga de lavado. A partir de la aplicación de la hipótesis iii, queda fuera del alcance el tercer modo posible mencionado.

En lo que sigue se presentan los modelos utilizados para representar los distintos modos de transporte, con especial énfasis en la carga suspendida.

### 3.2 HIPÓTESIS

En este caso se aplicarán las siguientes hipótesis no restrictivas:

- Las partículas son rígidas
- Las partículas son *pesadas*, en el sentido que la fuerza gravitacional sobre ellas no es despreciable. Por ello, las partículas están caracterizadas por una velocidad de caída, que representa velocidad terminal de descenso en la fase fluida.

Uno de los primeros aspectos que se deben tener en cuenta es la posible distribución de tamaños de partículas. Desde el punto de vista de la mecánica del continuo, las partículas de diferente tamaño se pueden visualizar como distintas “fases”, aún cuando el material constituyente de las partículas sea el mismo. La escala inferior de la distribución está dada por el mínimo tamaño que tienen que tener las partículas para no ser consideradas en solución:

$$\delta^{\min} \approx 0.45\mu\text{m} \quad (3.1)$$

Aún las partículas de menor tamaño están constituidas por un gran número de moléculas, de modo que la velocidad de cada partícula sólida debido a su propio estado térmico es extremadamente baja, y la fase particulada no contribuye a la presión estática del sistema (Soo 1967).

La aplicación de la hipótesis del continuo impone una cota superior en la extensión de la función de distribución de tamaños de partícula, que formalmente puede expresarse como:

$$\frac{\delta^{\max}}{\ell_s} \ll 1 \quad (3.2)$$

donde  $\delta^{\text{máx}}$  es el tamaño máximo de las partículas y  $\ell_s$  la escala espacial del sistema.

De este modo, cuando tanto la mezcla (agua y sedimento) como sus componentes son tratados como continuos, la situación general puede visualizarse como un número de sistemas interactuantes que ocupan el mismo espacio. Cada uno de ellos puede tener sus propias líneas de corriente (Tarela 1995).

En principio, existe interacción partícula-partícula, partícula-fluido y ambos con los contornos. En los contornos inmóviles la velocidad del flujo cae a cero, aunque esto no necesariamente ocurre con la fase sólida. Debido a esta inercia característica de tal fase, la velocidad de las partículas se puede identificar separadamente de la del fluido, lo cual marca una diferencia respecto del tratamiento habitual realizado sobre las soluciones (Tarela 1995).

Se aplicarán las siguientes hipótesis en la formulación del modelo de transporte de sedimento:

- v. La distribución de tamaños es tal que las partículas son lo suficientemente grandes como para no encontrarse en solución, pero a la vez lo suficientemente pequeñas como para poder aplicar la hipótesis del continuo
- vi. La densidad de cada fase es pequeña en comparación con la del agua
- vii. La escala de tiempo de la excitación externa del sistema (régimen hidrológico del aporte sólido) es larga en relación a la escala de tiempo de adaptación sedimentológica a la nueva condición.

La hipótesis v implica que los límites de la distribución de tamaños de partícula son los establecidos en (3.1) y (3.2).

Por su parte, la hipótesis vi se expresa matemáticamente como:

$$\rho_j \ll \rho \quad (3.3)$$

donde  $\rho_j$  es la densidad de la fase j.

Finalmente, al igual que lo mencionado en el Capítulo 2, la hipótesis vii implica condiciones cuasi-estacionarias en todo el tramo de estudio. Si  $L_s$  es la escala de adaptación sedimentológica, la escala de tiempo de adaptación a un cambio hidrológico en el aporte es del orden de  $L_s / U$ , siendo  $U$  la velocidad media de flujo. Empleando las escalas del Capítulo 2, el tiempo de adaptación sedimentológica es de entre 15 minutos y 3 horas en el cuerpo emisor, llegando al orden de 1 día en el cuerpo receptor (en condiciones típicas). Ambas resultan mucho menores que la escala de tiempo del régimen hidrológico de aporte de sedimentos, el cual está generalmente caracterizado por un ciclo anual con variaciones características mensuales o semanales.

### 3.3 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN SUSPENSIÓN

#### 3.3.1 Conservación de la masa de cada fracción

Se considerará en esta sección el modo de transporte en suspensión. Debido a la hipótesis v es posible definir para la j-ésima fase, o *fracción* de tamaño de partículas, funciones continuas de densidad,  $\rho_j$ , y velocidad,  $\mathbf{v}_j$ , de modo tal que la ecuación de conservación de la masa para esa fase es (Soo 1967):

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{v}_j) = \Pi_j \quad (3.4)$$

donde  $\Pi_j$  es la tasa de creación de la especie j por unidad de volumen.

La ecuación (3.4) resulta robusta desde el punto de vista conceptual, ya que involucra la velocidad media de una partícula de “fluido” definida utilizando estrictamente la segunda ley de Newton (Tarela 1995). Sin embargo, posee la desventaja de trabajar sobre los campos de velocidad de cada fase, los cuales son desconocidos. Para evitar este inconveniente se hará uso de la hipótesis vi. A partir de ella se deducen las siguientes conclusiones generales:

- La densidad de cada fase se puede aproximar por su concentración,  $S_j$ :

$$\rho_j \equiv \frac{m_j}{\mathcal{V}} \equiv \frac{m_j}{\mathcal{V}_p} \equiv S_j \quad (3.5)$$

donde  $m_j$  es la masa de la fase j presente en el volumen de control  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_j + \mathcal{V}_p$ , siendo  $\mathcal{V}_j$  el volumen de sólido y  $\mathcal{V}_p$  el volumen de agua.

- La concentración de sedimento resulta baja, en concordancia con la hipótesis iii (Capítulo 2)
- Los efectos de la interacción entre partículas son pequeños, pudiéndose considerar que las mismas están aisladas
- El flujo de retorno vertical debido al fluido desplazado por las partículas en descenso resulta poco significativo
- La velocidad de la mezcla,  $\mathbf{u}_m$ , se puede aproximar por la velocidad del agua

$$\mathbf{u}_m \equiv \frac{\left( \rho \mathbf{u} + \sum_j \rho_j \mathbf{v}_j \right)}{\left( \rho + \sum_j \rho_j \right)} \equiv \mathbf{u} \quad (3.6)$$

- Las fases particuladas son transportadas pasivamente por el agua, es decir, su presencia no altera las condiciones hidrodinámicas

En virtud de los dos últimos puntos, se puede considerar que la velocidad de la j-ésima fase viene dada por

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj} \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{w}_{sj}$  es la velocidad de caída de las partículas de la fracción j en agua en reposo.

Entonces, aplicando (3.5) y (3.7) en (3.4) se obtiene:

$$\frac{\partial s_j}{\partial t} + \nabla \cdot (s_j (\mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj})) = \frac{1}{\rho_{sj}} \Pi_j \quad (3.8)$$

donde se trabaja con la concentración volumétrica de sedimento definida por:

$$s_j \equiv \frac{S_j}{\rho_{sj}} \quad (3.9)$$

con  $\rho_{sj}$  la densidad (constante) del sólido que constituye la partícula de la fracción j.

Se considerará que la tasa de creación de la especie j por unidad de volumen proviene del aporte asociado a la fuente q (masa de agua por unidad de volumen y unidad de tiempo) y de reacciones/transformaciones, es decir

$$\Pi_j = \frac{\rho_{sj}}{\rho} s_{0j} q + \rho_{sj} \Psi_j \quad (3.10)$$

donde  $s_{0j}$  es la concentración de la fracción j en la fuente y  $\Psi_j$  es la tasa de reacción por unidad de masa.

Entonces, resulta la siguiente ecuación de transporte de sedimento (ETS) para la fracción j:

$$\frac{\partial s_j}{\partial t} + \nabla \cdot (s_j (\mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj})) = s_{0j} \frac{q}{\rho} + \Psi_j \quad (3.11)$$

### 3.3.2 Promedio de Reynolds e integración lateral

Expandiendo las variables de campo en (3.11) mediante (2.11), promediando sobre el ensamble de estados turbulentos e integrando en la dirección lateral, la forma conservativa de la ETS para la fracción  $j$  es (ver detalles en Anexo 2):

$$\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} \left( B \langle \overline{s_j} \rangle \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ B \langle \overline{R_{jk}^s} \rangle \right\} = \langle \overline{s_{0j}} \rangle \frac{\bar{q}}{\rho} + \langle \overline{\psi_j} \rangle + \Gamma_j^s + \tilde{\Gamma}_j^s \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{R}_j^s \equiv s_j(\mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj})$  es el vector de flujo advectivo de partículas debido a la velocidad del agua y la velocidad de caída, el subíndice  $k$  toma los valores 1 y 3, y (ver Anexo 2)

$$\Gamma_j^s \equiv \frac{1}{B} \langle \overline{s_j} \rangle \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} - \frac{1}{B} \langle \overline{R_{ji}^s} \rangle \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (3.13)$$

$$\tilde{\Gamma}_j^s \equiv \frac{1}{B} \tilde{s}_j \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} - \frac{1}{B} \tilde{R}_{ji}^s \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (3.14)$$

A partir de aquí se trabajará análogamente a lo realizado en el Capítulo 2. En primer lugar, invocando la hipótesis  $i$  el término de aporte lateral asociado a las desviaciones es despreciado, ya que:

$$|\tilde{\Gamma}_j^s| \ll |\Gamma_j^s| \quad (3.15)$$

Entonces, la forma no conservativa que se obtiene expandiendo el miembro izquierdo de (3.12) y aplicando la condición (3.15) es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overline{s_j} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \overline{R_{jk}^s} \rangle = \langle \overline{s_{0j}} \rangle \frac{\bar{q}}{\rho} + \langle \overline{\psi_j} \rangle + \Gamma_j^s + \Phi_j^s \quad (3.16)$$

donde

$$\Phi_j^s = -\frac{1}{B} \langle \overline{s_j} \rangle \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{B} \langle \overline{R_{jk}^s} \rangle \frac{\partial B}{\partial x_k} \quad (3.17)$$

Además, aplicando (2.20) y (2.21) resulta

$$\Gamma_j^s + \Phi_j^s = 0 \quad (3.18)$$

Por otro lado, resulta conveniente expandir el vector de flujo advectivo en la forma

$$\langle \mathbf{R}_j^s \rangle = \langle s_j \rangle (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{w}_{sj}) + \langle \mathbf{D}_j^s \rangle \quad (3.19)$$

donde

$$\langle \mathbf{D}_j^s \rangle \equiv \langle \tilde{\mathbf{u}} \tilde{s}_j \rangle + \langle \mathbf{u}' s'_j \rangle \quad (3.20)$$

es el vector de dispersión-difusión de partículas. La primer componente de (3.20) corresponde al flujo por dispersión, debido a la correlación entre los términos medios de desviación de la velocidad del flujo y la concentración de sedimento de la fracción  $j$ . La segunda componente es debida a la difusión turbulenta, producida por la correlación entre las fluctuaciones turbulentas de la velocidad y la concentración.

Por lo tanto, utilizando (3.18) y (3.19) en (3.16), expandiendo el término advectivo propiamente dicho y aplicando (2.17) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle s_j \rangle + (\langle \mathbf{u}_k \rangle + \mathbf{w}_{sjk}) \frac{\partial}{\partial x_k} \langle s_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \mathbf{D}_{jk}^s \rangle = \\ = \left( \langle s_{0j} \rangle - \langle s_j \rangle \right) \frac{q}{\rho} + \langle \psi_j \rangle - \frac{1}{B} \langle s_j \rangle \left( \frac{\bar{\sigma}_B}{\rho} - \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial B}{\partial x_k} \right) - \langle s_j \rangle \frac{\partial w_{sjk}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ya que todas las variables en (3.21) están integradas lateralmente y promediadas en el ensamble, de aquí en adelante se simplifica la notación, obteniéndose la siguiente forma no conservativa de las ETS integradas lateralmente y promediadas en el ensamble de estados turbulentos:

$$\frac{\partial s_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{sjk}) \frac{\partial s_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{D}_{jk}^s}{\partial x_k} = (s_{0j} - s_j) \frac{q}{\rho} + \psi_j - \frac{1}{B} s_j \left( \frac{\sigma_B}{\rho} - \mathbf{u}_k \frac{\partial B}{\partial x_k} \right) - s_j \frac{\partial w_{sjk}}{\partial x_k} \quad (3.22)$$

donde el subíndice  $j$  identifica la fracción de sedimento y el subíndice  $k$  solo adopta los valores 1 y 3.

En forma genérica, la expresión (3.22) para cada fase constituye una ecuación de advección-difusión-reacción que se puede expresar en la forma compacta

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj}) \nabla \right) s_j + \nabla \cdot \mathbf{D}_j^s = - (q_\sigma + q_B + q_\rho + \nabla \cdot \mathbf{w}_{sj}) s_j + q_\rho s_{0j} + \Psi_j \quad (3.23)$$

donde los términos del miembro derecho se expresan utilizando la notación del Capítulo 2 (definiciones (2.30) para la forma compacta (2.29) de las ECM), siendo  $\mathbf{u}=(u_1, u_3)^T$ ,  $\mathbf{w}_{sj}=w_{sj}(\text{sen}\theta, -\text{cos}\theta)^T$  con  $\theta$  indicando la rotación del eje z respecto de la horizontal, estando el operador  $\nabla$  restringido al plano  $(x_1, x_3)$  y donde  $\mathbf{D}_j^s = (D_{j1}^s, D_{j3}^s)^T$ .

### 3.3.3 Difusión turbulenta de partículas

En la medida en que la concentración de sedimento cohesivo sea inferior a los 10 g/l, aproximadamente, el comportamiento reológico del fluido puede considerarse Newtoniano (van Rijn 1993), y la aplicación de los conceptos de viscosidad y difusividad de torbellino es válida. Por encima de ese umbral el fluido “barroso” presenta un comportamiento no lineal, llegando a ser pseudo-plástico si la concentración de limo, arcilla y material orgánico supera los 50 g/l.

Entonces, ya que la concentración de sedimento es baja (hipótesis vi), y por analogía con las tensiones de Reynolds, el término de difusión turbulenta de partículas se modela de acuerdo a la ley de Fick

$$\langle \overline{u'_k s'_j} \rangle = -v_{sk} \frac{\partial s_j}{\partial x_k} \quad (3.24)$$

donde no hay suma sobre k y  $v_{sk}$  es el coeficiente de difusividad de torbellino.

Johnson (1981) propone que, si el flujo no está estratificado, una buena elección es tomar la difusividad de torbellino igual a la viscosidad de torbellino. Del mismo modo, Fischer (1973) cita los resultados de las mediciones de perfiles verticales de concentración de arena realizadas por distintos autores que confirman que el número de Schmidt turbulento es de orden uno:

$$Sc \equiv \frac{v_{tk}}{v_{sk}} \approx 1 \quad (3.25)$$

van Rijn (1984b) propone representar los eventuales apartamientos de la relación (3.25) mediante la aplicación de factores de corrección:

$$v_{sk} = \beta \phi v_{tk} \quad (3.26)$$

donde el factor  $\beta$  representa la relación entre la difusión de una partícula sólida y una de agua, y el factor  $\phi$  expresa el amortiguamiento de la turbulencia (“damping”) por la presencia de las partículas de sedimento.

Ya que las partículas sólidas no pueden responder exactamente como las de agua a las fluctuaciones turbulentas, podría considerarse que debe ser  $\beta < 1$ . Sin embargo, como la fuerza centrífuga sobre los sedimentos debe ser superior a aquella ejercida sobre el agua, de modo que las partículas sólidas son arrojadas fuera de los remolinos turbulentos, incrementado la longitud de mezcla y, en consecuencia, la tasa de difusión, debería cumplirse que  $\beta > 1$ . En la bibliografía aparecen resultados en uno y otro sentido (van Rijn 1984b). Considerando datos experimentales donde el efecto de amortiguamiento puede despreciarse, la expresión propuesta para este factor es (van Rijn 1984b):

$$\beta = 1 + 2 \left( \frac{w_s}{u_*} \right)^2 \quad \text{para } 0.1 < \frac{w_s}{u_*} < 1 \quad (3.27)$$

donde  $w_s$  es la velocidad de caída del sedimento suspendido. Sin embargo, el mismo autor muestra que la utilización de (3.27) sobrestima la carga en suspensión, la cual es mejor predicha utilizando  $\beta=1$  (van Rijn 1984b). Ya que parece necesaria más investigación al respecto, en este trabajo se asume como válida la relación (3.25) en lo referido a la difusión diferencial entre partículas sólidas y partículas de fluido, es decir, se toma

$$\beta = 1 \quad (3.28)$$

Por otro lado, ajustando tres series de datos van Rijn (1984b) propuso para el factor  $\phi$ :

$$\phi = 1 + \left( \frac{s}{s_0} \right)^{0.8} - 2 \left( \frac{s}{s_0} \right)^{0.4} \quad (3.29)$$

donde  $s$  es la concentración local y  $s_0=0.65$  la concentración volumétrica máxima. El autor sugiere que la contribución de (3.29) puede despreciarse si  $s < 2500$  mg/l. Debido a la hipótesis vi, aquí se propone disponer de la expresión (3.29) para su eventual uso en aplicaciones particulares, pero no afectar el coeficiente de viscosidad de torbellino en el modelo hidrodinámico por el efecto de amortiguamiento, de modo que se siga cumpliendo el desacople con el modelo sedimentológico.

### 3.4 PARABOLIZACIÓN DE LAS ETS

#### 3.4.1 Orden de magnitud de los términos de flujo dispersivo-difusivo

Retomando la notación del Capítulo 2, el término de flujo dispersivo-difusivo en (3.23), de acuerdo a (3.24), es:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_j^s = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left\langle \tilde{u} \tilde{s}_j \right\rangle - v_{sx} \frac{\partial s_j}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left\langle \tilde{w} \tilde{s}_j \right\rangle - v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial z} \right] \quad (3.30)$$

Para analizar el peso relativo de cada uno de los términos en (3.30) se procede de forma análoga a lo hecho en 2.7. Para ello resulta conveniente realizar la siguiente asociación entre (3.30) y (2.36):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\rightarrow \tilde{s}_j \\ v_{tx} &\rightarrow v_{sx} \\ v_{tz} &\rightarrow v_{sz} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Suponiendo que  $v_{sk} \approx v_{tk}$ , la relación entre los términos de difusión turbulenta es

$$\frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_{sx} \frac{\partial s_j}{\partial x} \right] \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial z} \right] \right|} \approx \frac{[v_{tx}]}{[v_{tz}]} \alpha_s^2 \ll 1 \quad (3.32)$$

donde, por isotropía de la turbulencia,  $[v_{tx}] \approx [v_{tz}]$  (Capítulo 2) y  $\alpha_s \equiv h/L_s$ , siendo  $L_s$  la escala horizontal de variación de la concentración de sedimentos. Para representar esta escala se tomó, conservativamente, la longitud de adaptación sedimentológica, obteniéndose, de acuerdo a lo analizado en el Capítulo 2,  $\alpha_s \approx 10^{-3}$  a  $10^{-2}$ . El resultado (3.32) indica que la difusión horizontal puede despreciarse frente a la vertical.

Por su parte, utilizando (2.41) se obtiene que la relación entre los términos dispersivos es aproximadamente de orden uno:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left\langle \tilde{u} \tilde{s}_j \right\rangle \right]}{\frac{\partial}{\partial z} \left[ \left\langle \tilde{w} \tilde{s}_j \right\rangle \right]} \approx \frac{\alpha_s}{\alpha} \approx 1 \text{ a } 10 \quad (3.33)$$

Bajo la hipótesis de que el análisis realizado en 2.7.2.4 se puede extender a los términos verticales de dispersión y difusión turbulenta, provista la asignación definida en (3.31), es posible despreciar ambos términos dispersivos (de orden similar) frente a la difusión turbulenta vertical de partículas.

### 3.4.2 Orden de magnitud de los términos geométricos

Nuevamente aplicando la asociación (3.31), usando que  $v_{sk} \approx v_{tk}$  y bajo las premisas descritas en 2.7.3, el término proporcional a  $q_B$  en (3.23), asociado a las variaciones del cauce, resulta despreciable frente a la difusión turbulenta vertical de sedimento:

$$\frac{\left| s_j \left( \frac{u}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{w}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial z} \right] \right|} \approx \frac{Uh^2}{B[v_{tz}]} \frac{\Delta B}{\Delta L} < 0.1 \quad (3.34)$$

### 3.4.3 Ecuaciones de transporte a resolver: forma parabólica

El análisis realizado en la sección 3.4.1 determina que el único término relevante dentro del término de flujo dispersivo-difusivo de partículas es el debido a la difusión turbulenta vertical. A partir de (3.34) el término geométrico en (3.23) también se puede despreciar.

Por otra parte, en la medida en que las concentraciones son relativamente bajas (hipótesis vi), la velocidad de caída de las partículas no se ve afectada por la presencia de partículas vecinas, de modo que su módulo resulta constante. De este modo, el gradiente de la velocidad de caída que aparece en (3.23) puede ser despreciado (ver sección 3.5.1).

Entonces, aplicando los resultados de 3.4.1 y 3.4.2, la consideración sobre el gradiente de la velocidad de caída recién mencionada, y la *aproximación cuasi-estacionaria* (hipótesis vii, que permite que el término de derivada temporal en (3.23) sea obviado), la forma (no conservativa) de las ETS se reduce a:

$$\left( u + w_{s_j} \sin \theta \right) \frac{\partial s_j}{\partial x} + \left( w - w_{s_j} \cos \theta \right) \frac{\partial s_j}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial z} \right) = -s_j q_\sigma + q_\rho (s_{0j} - s_j) + \Psi_j \quad (3.35)$$

Como en las ECM, el conjunto final de ETS resulta *parabólico* en la dirección principal de movimiento. Obsérvese que existe una gran simetría con las ECM (2.52) y (2.53).

### 3.5 CIERRE DEL MODELO DE TRANSPORTE EN SUSPENSIÓN

#### 3.5.1 Velocidad de caída de las partículas

Considerando partículas individuales cayendo en agua limpia, se utilizan las siguientes relaciones, en función del diámetro  $\delta_j$  de cada fracción, para determinar la velocidad de caída:

$$w_{sj} = \begin{cases} \frac{\Delta_j g \delta_j^2}{18\nu} & \delta_j < 100\mu\text{m} \\ \frac{10\nu}{\delta_j} \left\{ \sqrt{1 + \frac{0.01\Delta_j g \delta_j^3}{\nu^2}} - 1 \right\} & 100\mu\text{m} < \delta_j < 1000\mu\text{m} \\ 1.1\sqrt{\Delta_j g \delta_j} & \delta_j > 1000\mu\text{m} \end{cases} \quad (3.36)$$

donde  $\nu \equiv \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del agua y  $\Delta_j \equiv \rho_{sj}/\rho - 1$ .

Para partículas menores a 100  $\mu\text{m}$  la relación (3.36) corresponde al rango de Stokes, entre 100 y 1000  $\mu\text{m}$  se utiliza la expresión de Zanke y para partículas de más de 1 mm la expresión propuesta por van Rijn (1984b).

##### 3.5.1.1 Material granular

Para sedimentos no cohesivos, en la medida en que la concentración aumenta las partículas comienzan a interactuar mutuamente y se produce una reducción en la velocidad efectiva de caída. Por ejemplo, Lewis y otros encontraron que la velocidad efectiva de caída se puede representar con una ecuación del tipo (Cheng 1997):

$$w_{sj}^{\text{efectiva}} = (1-s)^n w_{sj} \quad (3.37)$$

donde  $s$  es la concentración local y  $n$  un exponente. Para condiciones normales de flujo y sedimento entre 50 y 500  $\mu\text{m}$ , van Rijn (1984b) propone  $n=4$ . De acuerdo a resultados de Richardson y Zaki, el exponente  $n$  es función del número de Reynolds asociado a la velocidad terminal de una partícula aislada,  $Re_j \equiv w_{sj}\delta_j/\nu$ , cubriendo un rango de variación  $2.4 \leq n \leq 4.6$ . Cheng (1997) presentó un análisis donde se indica que  $n = n(Re_{j,s}, \Delta_j)$ , aunque las variaciones respecto de los resultados de Richardson y Zaki resultan pequeñas.

Considerando  $n=4$  y  $s \approx 2500 \text{ mg/l}$ , la reducción predicha por (3.37) es del 0.4%, alcanzando el 1.5% para  $s \approx 10\,000 \text{ mg/l}$ . Variaciones superiores al 10 % se alcanzan recién cuando  $s > 70$

g/l. Por ello, y teniendo en cuenta la hipótesis vi, la corrección dada en (3.37) puede ser obviada, de modo que la velocidad de caída para el material no cohesivo es considerada constante a los efectos prácticos. Esto permite, además, eliminar el término del gradiente de la velocidad de caída, presente en el miembro derecho de (3.23), de acuerdo a lo señalado en la sección anterior.

### 3.5.1.2 *Material cohesivo*

En el caso de sedimentos cohesivos, se utiliza la relación de Stokes dada en (3.36). Sin embargo, estas partículas están sujetas a la acción de fuerzas electroquímicas superficiales debido a su pequeño tamaño, de modo que bajo ciertas condiciones pueden flocular. En esos casos, los agregados de partículas pueden tener velocidades de caída varias veces superior a la de una partícula aislada.

Tales velocidades diferenciales se pueden estimar a través del factor de Migniot (Teisson 1991). Otros autores han presentado modelos para casos particulares a partir de los cuales se puede estimar el tamaño medio de los flóculos y su velocidad de caída (Ziegler y Nisbet 1994, 1995). En estos casos, el término de reacción en (3.35) debe tener en cuenta el traspaso de masa entre especies de distinto tamaño.

Una metodología alternativa propuesta por Krone (1962) a partir de mediciones de deposición de limo y arcilla en agua con contenido salino, consiste en correlacionar la velocidad de caída con la concentración de los sedimentos en suspensión. Para concentraciones bajas ( $s < 300 \text{mg/l}$ ) se utiliza la expresión de Stokes para partículas aisladas. Para concentraciones moderadas ( $0.3 \text{g/l} < s < 10 \text{g/l}$ ) la velocidad de caída aumenta con la concentración. Finalmente, para concentraciones mayores ( $s > 10 \text{g/l}$ ) la decantación resulta entorpecida por las restricciones que sufre el agua que escapa de los intersticios entre los agregados, de forma que la velocidad de caída se reduce nuevamente.

En general, estas metodologías se utilizan cuando existen fluidos barrosos (Nicholson y O'Connor 1986, Murakami et. al, 1995) y transporte de sedimentos finos en estuarios, donde existe influencia salina (Ariathurai y Krone 1976).

Trabajos recientes como el presentado por Winterwerp (1998) tienen en cuenta el efecto de la turbulencia en la formación y disgregación de los flóculos. En la medida en que el flujo cambia de laminar a turbulento, la tasa de colisión entre partículas cohesivas se incrementa, propiciando la floculación. Para tensiones de corte crecientes la situación se invierte, produciéndose la ruptura de los agregados e inhibiéndose la floculación.

De acuerdo a Winterwerp son necesarios siete parámetros para caracterizar un fluido con contenido de material cohesivo, y dieciocho para determinar las propiedades fisico-químicas del "barro" (Teisson 1991). Hoy en día, tales parámetros son complejos y poco entendidos

como para ser manejados directamente en los modelos de transporte de sedimentos. Por ello, y de acuerdo a lo descrito en esta sub-sección, en las aplicaciones ingenieriles no se pueden emplear relaciones universales, sino que se utilizan fórmulas empíricas simples válidas in-situ.

Dentro de este contexto, y teniendo en cuenta la hipótesis de concentración de sedimento baja, para este trabajo se utilizará la relación de Stokes para partículas aisladas. De ser necesario para una cierta aplicación particular, la modificación a la expresión de la velocidad de caída puede ser implementada en el modelo sin mayor dificultad.

### 3.5.2 Condición de borde en la superficie libre

Como condición de borde en la superficie libre se impone flujo nulo de partículas:

$$-v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial n_\zeta} - \cos \chi_\zeta w_{sj} s_j = 0 \quad (3.38)$$

donde  $\chi_\zeta$  es el ángulo entre la normal a la superficie libre,  $\mathbf{n}_\zeta$ , y la vertical gravitatoria,  $\mathbf{n}_g \equiv \mathbf{g}/g$ . Si  $\varphi_\zeta$  es el ángulo entre  $\mathbf{n}_\zeta$  y el eje z,  $\mathbf{e}_z$ , resulta conveniente utilizar la relación  $\chi_\zeta = \theta - \varphi_\zeta$ , ya que  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{n}_g$  y  $\mathbf{e}_z$ , resultando

$$-v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial n_\zeta} - \cos(\theta - \varphi_\zeta) w_{sj} s_j = 0 \quad (3.39)$$

### 3.5.3 Condición de borde en el fondo

Uno de los problemas fundamentales en la descripción del transporte de sedimentos reside en la modelación del proceso que controla el intercambio de partículas entre las zonas de transporte de fondo y en suspensión.

En el caso de un fondo estrictamente plano, la altura donde comienza la zona de transporte en suspensión puede asimilarse a la altura máxima de salto de las partículas. Sin embargo, en los casos prácticos esta situación puede no reproducirse debido, esencialmente, a las concentraciones crecientes cerca del lecho. Esto causa problemas tales como la modificación de la viscosidad del fluido, la reducción de la velocidad de caída de las partículas o el amortiguamiento de la turbulencia por efecto de la cercanía entre ellas. De acuerdo a lo mencionado anteriormente, el conocimiento de estos efectos es actualmente reducido, por lo que se deben realizar hipótesis de trabajo para la obtención de resultados cuantitativos.

Desde el punto de vista de la modelación numérica surgen los siguientes inconvenientes:

- Se requieren pequeños pasos de cálculo para representar los fuertes gradientes de concentración cerca del fondo
- La presencia de dunas magnifica las velocidades y concentraciones en las zonas de pendientes crecientes, por lo que deberían utilizarse pasos pequeños en comparación con la longitud de las dunas, lo cual complica la representación de grandes extensiones (por ejemplo los reservorios)
- La fluidodinámica en la zona cercana a lecho se puede volver extremadamente compleja debido a que el propio fluido cambia de propiedades por efecto del aumento de la concentración de partículas, y porque puede desaparecer la subcapa viscosa debido a la acción de remolinos de pequeña escala asociados a las irregularidades de las formas de fondo.

Siguiendo la metodología usual, para evitar estos inconvenientes se ha aplicado una esquematización del perfil de concentraciones, basada en imponer la condición de contorno inferior en un fondo ficticio, matemáticamente definido por la coordenada local  $z_{bs}$ . En general,  $z_{bs} > z_b$ , siendo este último el fondo matemático donde se imponen las condiciones de borde de la velocidad (Capítulo 2). En la subsección 3.5.3.3 se dan detalles sobre la posición del fondo ficticio.

A través del fondo ficticio se impone la siguiente relación general de conservación de la masa sólida (Partheniades 1964, Tarela 1997, Tarela y Menéndez 2000), que establece que el flujo neto de sedimento es igual a la tasa de erosión neta del fondo:

$$-v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial n_{bs}} - \cos \chi_{bs} w_{sj} (1 - P_{dj}) s_j = E_j \quad (3.40)$$

donde  $\chi_{bs}$  es el ángulo entre la normal interior al fondo ficticio,  $-\mathbf{n}_{bs}$ , y la vertical gravitatoria,  $E_j$  es la tasa de erosión neta para la fracción  $j$  y  $P_{dj}$  es la probabilidad de deposición de la fracción  $j$ , definida como la proporción de sedimento cercano al fondo que alcanza el lecho y se “pega” al mismo (Partheniades 1988). El primer término del miembro izquierdo de (3.40) representa el flujo difusivo por efecto de la turbulencia. El segundo término del miembro izquierdo de (3.40) representa la tasa de deposición por advección, y tiene en cuenta que no todas las partículas que llegan al lecho por acción de su propio peso permanecen depositadas. Algunas de ellas son arrastradas y se resuspenden nuevamente, y esa proporción está representada por el factor  $(1 - P_{dj})$ . Por su parte, el miembro derecho presupone que las partículas que son desprendidas del fondo, haya o no cohesión, llegan a la zona de transporte en suspensión por efecto de la turbulencia.

Como en el caso anterior, resulta conveniente reescribir (3.40) utilizando la relación  $\chi_{bs} = \theta - \varphi_{bs}$ , donde  $\varphi_{bs}$  es el ángulo entre  $-\mathbf{n}_{bs}$  y  $\mathbf{e}_z$ :

$$-v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial n_{bs}} - \cos(\theta - \phi_{bs}) w_{sj} (1 - P_{dj}) s_j = E_j \quad (3.41)$$

La tasa de erosión neta y la probabilidad de deposición se modelan en función de las características físico-químicas de las partículas. Para ello se empleó un criterio esquemático, que separa las propiedades a partir del tamaño del sedimento. Se consideró material granular (no cohesivo) para  $\delta_j > 62\mu\text{m}$  y material cohesivo para  $\delta_j < 62\mu\text{m}$ , aunque, en rigor, el cambio de propiedades es más gradual entre ambos tipos de material.

### 3.5.3.1 Material granular

Para material no cohesivo (arena,  $\delta_j > 62\mu\text{m}$ ) se toman:

$$P_{dj} = 0 \quad (3.42)$$

$$E_j = \alpha_e \cos(\theta - \phi_{bs}) w_{sj} (s_j^{\text{eq}} - s_j) \quad (3.43)$$

donde la primera indica no adhesión, ya que la interacción electroquímica entre las superficies de los granos resulta despreciable, y la segunda considera que la tasa neta de erosión es proporcional al decremento de la concentración respecto del valor de equilibrio local,  $s_j^{\text{eq}}$ , siendo  $\alpha_e$  un coeficiente a determinar.

La aplicación de (3.42) y (3.43) en (3.41) da lugar a una condición de borde relativamente general, donde ni la concentración ni su gradiente en el lecho son considerados en equilibrio local:

$$-v_{sz} \frac{\partial s_j}{\partial n_{bs}} - \cos(\theta - \phi_{bs}) w_{sj} s_j = \alpha_e \cos(\theta - \phi_{bs}) w_{sj} (s_j^{\text{eq}} - s_j) \quad (3.44)$$

La expresión (3.44), presentada por Cheng (1984), considera que el flujo neto (miembro izquierdo, debido a la suma de los flujos difusivo y advectivo) es una función lineal de la diferencia entre la concentración y su valor de equilibrio local. El coeficiente  $\alpha_e$  es considerado un parámetro de calibración, que para arena debería cumplir  $\alpha_e \cong 1$  (van Rijn 1987). Este valor es el adoptado en el presente trabajo, por lo cual (3.44) pasa a establecer condiciones de flujo difusivo de equilibrio local.

La cuantificación de la concentración de equilibrio local conlleva un error de predicción importante y, en la medida en que no se cuente con mediciones, es uno de los factores que

introduce mayor incertidumbre al modelo. Para este trabajo se implementaron las siguientes tres metodologías de cálculo que permiten predecirla, las cuales se describen en el Anexo 4:

- Método determinístico de van Rijn (1984b)
- Método estocástico de van Rijn (1987)
- Método de Engelund y Fredsoe (1976)

El primero está desarrollado para condiciones hidrodinámicas de capa límite en equilibrio, y puede aplicarse a flujos gradualmente variados. El segundo se aplica en situaciones donde el flujo puede variar rápidamente sobre pendientes bruscas, y evita predecir concentración nula cerca de los puntos de estancamiento y separación, donde la turbulencia continúa actuando y produce entrada de material en suspensión.

En el caso de flujo con variaciones relativamente suaves en los perfiles de concentración, como el presente, las metodologías determinística y estocástica de van Rijn arrojan resultados similares (Tarela 1997).

El tercer método está basado en consideraciones dinámicas, y es una extensión de la teoría de transporte de fondo de los mismos autores. Se toma en cuenta la tensión dispersiva (Bagnold 1954) que se transmite al lecho como consecuencia del intercambio de cantidad de movimiento que se produce por choques de las partículas de sedimento. El método resulta ser conceptualmente interesante, ya que está basado en la descripción de los procesos físicos involucrados. Sin embargo, tiene la desventaja principal de determinar la concentración de equilibrio a una altura sobre el lecho comparable a la rugosidad de piel, lo cual puede conducir a imprecisiones (Tarela 1997).

### 3.5.3.2 *Material cohesivo*

En el caso de material más fino (limo,  $d_j < 62 \mu\text{m}$ ) aparecen fuerzas de cohesión fisicoquímicas al momento de la deposición que aumentan cuando el tamaño de las partículas disminuye. Por ello, parte del material sedimentado no queda disponible para la resuspensión. Los procesos de deposición y erosión dependen tanto de las condiciones hidrodinámicas como de las características de las partículas y el lecho. Aquí se emplearán los criterios simplificados descriptos a continuación.

Cuando la tensión de corte en el lecho no es suficiente para resuspender las partículas que contactan el fondo y se pegan, ocurre la deposición. La tensión de corte a partir de la cual aparece una tasa de deposición incipiente,  $\tau_d$ , se denomina tensión crítica de deposición. Su valor puede ser igual o menor al de la tensión crítica de erosión (ver más abajo), dependiendo de la historia de la superficie del fondo. Utilizando esta descripción del fenómeno, propuesta por Krone (1962), para la probabilidad de deposición se utiliza la relación:

$$P_{dj} = \begin{cases} 0 & \tau_b > \tau_{dj} \\ 1 - \frac{\tau_b}{\tau_{dj}} & \tau_b < \tau_{dj} \end{cases} \quad (3.45)$$

donde  $\tau_{dj}$  es la tensión crítica de deposición de la fracción  $j$ . Este parámetro no está establecido en forma precisa, obteniéndose de la literatura valores típicos en el rango  $0.06 \leq \tau_{dj} \leq 1.1 \text{ N/m}^2$  (Ziegler y Nisbet 1994).

La aplicación de la formulación de Krone es ampliamente aceptada en la literatura (Harrison y Owen 1971, Ariathurai y Krone 1976, Teisson 1992, Ziegler y Nisbet 1994, 1995, Tarela et al. 1997, Menéndez y Castellano 2000).

Una vez que el material cohesivo se ha depositado, las ligaduras entre las partículas pueden romperse en la medida en que aumenta la tensión de corte en el fondo. La resistencia del lecho cohesivo a la erosión depende de numerosos factores, tales como el material y la estructura de formación del lecho, la historia de los esfuerzos a los cuales fue sometido, el contenido de materia orgánica, etc (Ariathurai y Krone 1976).

Para cuantificar la erosión, una de las formulaciones más aplicadas es la Partheniades (1962):

$$E_j = \begin{cases} 0 & \tau_b < \tau_{ej} \\ M_e \left( \frac{\tau_b}{\tau_{ej}} - 1 \right) & \tau_b > \tau_{ej} \end{cases} \quad (3.46)$$

donde  $M_e$  es la tasa de erosión cuando la tensión de corte en el fondo es igual al doble de la tensión crítica de erosión ( $\tau_{ej}$ ). La expresión (3.46) ha sido utilizada en numerosas aplicaciones, (Harrison y Owen 1971, Ariathurai y Krone 1976, Parchure y Metha 1985, Teisson 1991, Le Normant et al. 1995, Murakami et al. 1995, Menéndez y Castellano 2000). En ellas se adopta un valor constante para  $\tau_{ej}$ , pero diferentes criterios en la definición del factor  $M_e$  (el cual puede ser constante o no).

Existen generalizaciones de la expresión (3.46), pero en todos los casos fuertemente relacionadas a alguna aplicación particular (Nicholson y O'Connor 1986, Ziegler y Nisbet 1995). Incluso se puede tener en cuenta la erosión superficial (partículas individuales) o la erosión de masa (guijarros) (Ariathurai y Korne 1976).

Cuanto mayor es la sobrepresión ejercida por las capas superiores y la columna de agua, y mayor es el tiempo transcurrido desde la deposición, mayor es la resistencia a la erosión. A partir de experimentos de laboratorio se demostró que los efectos de la consolidación sobre la resuspensión del material cohesivo son mínimos luego de una semana de consolidación (Ziegler y Nisbet 1995).

Sin embargo, en el caso de un reservorio, donde las escalas de tiempo de las excitaciones externas del sistema son relativamente largas (hipótesis ii), el material fino encuentra condiciones de deposición que se mantienen durante suficiente tiempo como para alcanzar cierto grado de consolidación (Lara y Sanders 1970). Excepto en el caso de la limpieza del lecho del reservorio por operación de las esclusas de fondo (“flushing”), la zona de deposición de finos no está sometida a tensiones de corte en el lecho que sobrepasen la tensión crítica de erosión.

Teniendo en cuenta estos efectos, y que el flujo es en general desacelerado, en este trabajo se impone la siguiente condición:

$$E_j = 0 \quad (3.47)$$

lo cual no resulta restrictivo, ya que la implementación de (3.46) es inmediata.

Si las condiciones de floculación no son alcanzadas (por ejemplo, los contenidos de materia orgánica y sal son bajos) entonces la arcilla ( $\delta_j < 4\mu\text{m}$ ) puede tratarse como el limo, esto es, (3.45) y (3.47) se aplican al rango entero de partículas finas ( $\delta_j < 62\mu\text{m}$ ).

### 3.5.3.3 Ubicación del fondo de intercambio de partículas

La condición de borde (3.41) se aplica a un altura  $\delta_{bs}$  por sobre el fondo, de modo que se define un fondo ficticio en

$$z_{bs} = z_f + \delta_{bs} \quad (3.48)$$

En el caso en que el fondo es plano y está constituido por material granular, el fondo ficticio se puede asociar a la interfase entre los modos de transporte de sedimentos de fondo y en suspensión, utilizándose la siguiente relación

$$\delta_{bs} = k_{sp} \quad (3.49)$$

siendo  $k_{sp}$  la rugosidad de piel (ver **3.7.4**).

Sin embargo, a partir de la medición de perfiles verticales de concentración, Sumer y otros (1996) mostraron que la distribución de Rouse (ver **3.5.4**) representa bien los datos siempre y cuando el nivel de referencia esté alejado de los elementos de rugosidad del fondo. En este sentido, van Rijn (1984b) recomienda, también por razones de precisión, que

$$\delta_{bs} \geq 0.01h \quad (3.50)$$

Si existen formas de fondo (ver 3.7.4), el fondo ficticio se define a una altura por sobre el fondo equivalente a la mitad de la altura media de las formas de fondo,  $\Delta_b$ :

$$\delta_{bs} = \frac{1}{2} \Delta_b \quad (3.51)$$

Como en general se utiliza la condición de borde (2.63) para la velocidad, resulta  $z_{bs} > z_b$ , es decir, las condiciones de borde en el fondo de los modelos hidrodinámico y sedimentológico se introducen en distintos lugares.

Ya que para transportar el material en suspensión se debe conocer el campo de velocidades, bajo cualquier elección de las condiciones de borde en el fondo para la velocidad y la concentración de sedimento, se debe respetar la relación

$$z_{bs} \geq z_b \quad (3.52)$$

la cual resulta equivalente a pedir que  $\delta_{bs} \geq z_0$ .

### 3.5.4 Condiciones iniciales

Como el problema es parabólico, en la sección de entrada del modelo (curso emisor) se especifica una “condición inicial” en lugar de una condición de borde. Tal condición inicial se debe dar para cada paso de tiempo, y consiste en prescribir los perfiles de concentración para todas las fracciones. Como en general estos datos no están disponibles, se esquematizaron las condiciones iniciales suponiendo que los perfiles en la entrada del modelo son los de equilibrio local, de acuerdo a la discriminación por tipo de sedimento que se describe en lo que sigue.

#### 3.5.4.1 Material granular

Si se supone válida la expresión (3.25), y se utiliza la distribución (2.71) para la viscosidad de torbellino, la solución de (3.35) en condiciones de equilibrio local (flujo uniforme y ausencia de términos fuente y de reacción) da lugar a la distribución de Rouse:

$$s_{0,j}^{eq} = s_j^{eq} \left\{ \left( \frac{\delta_{bs}}{h - \delta_{bs}} \right) \left( \frac{h - z'}{z'} \right) \right\}^Z \quad (3.53)$$

donde  $z' \equiv z - z_f$  y

$$Z \equiv \frac{w_{sj} \cos \theta}{ku_*} \quad (3.54)$$

es el número de Rouse, que expresa la relación entre la fuerza de atracción gravitatoria y la fuerza de restitución turbulenta. En el caso en que el fondo está cubierto por dunas, Engelund y Fredsoe (1976) proponen reemplazar  $u_*$  por la velocidad de corte efectiva (ver Anexo 4).

Bajo las mismas condiciones, pero utilizando la distribución de Kerssens (2.73) para la viscosidad de torbellino, van Rijn (1987) dedujo la siguiente expresión:

$$s_{0j}^{eq} = s_j^{eq} \left( \frac{\delta_{bs}}{h - \delta_{bs}} \right)^Z \begin{cases} \left( \frac{h - z'}{z'} \right)^Z & \text{si } \delta_{bs} \leq z' \leq h/2 \\ e^{-4Z \left( \frac{z' - 1}{h/2} \right)} & \text{si } h/2 \leq z' \leq h \end{cases} \quad (3.55)$$

la cual es válida para concentraciones bajas ( $s < 0.001$ ). Nótese que (3.55) predice concentraciones de sedimentos no nulas en la superficie libre, a diferencia de (3.53).

Si la difusividad y viscosidad de torbellino difieren entre sí, se debe modificar consistentemente el número de Rouse (van Rijn 1987) y el perfil de equilibrio se obtiene, eventualmente, por integración numérica.

#### 3.5.4.2 Material cohesivo

En condiciones de equilibrio local, la carga de lavado es transportada por el curso emisor sin interacción con el fondo

$$P_{dj} = E_j = 0 \quad (3.56)$$

lo cual conduce a los mismos perfiles de equilibrio presentados en la sección anterior.

Sin embargo, en este caso no se conoce la concentración de equilibrio en el fondo, ya que la carga de lavado no depende de las condiciones locales, sino del aporte desde aguas arriba. Además, como el material cohesivo presenta velocidades de caída pequeñas, en el cuerpo emisor las condiciones turbulentas producen que

$$Z \ll 1 \quad (3.57)$$

De este modo, tomando el límite  $Z \rightarrow 0$  en cualquiera de los perfiles de equilibrio anterior surge que

$$s_{0j}^{eq} = \text{constante} \quad (3.58)$$

la cual se aplica como condición inicial en cada paso de tiempo.

#### 3.5.4.3 Concentración total

La concentración total de sedimento en suspensión en la entrada del modelo se computa como

$$s_0^{eq} = \sum_j \alpha_j s_{0j}^{eq} \quad (3.59)$$

donde  $\alpha_j$  es un coeficiente que representa el peso relativo de la  $j$ -ésima fracción en la distribución global. La expresión (3.59) se generaliza a todo el dominio de cálculo, de forma que la concentración local se determina como

$$s = \sum_j s_j \quad (3.60)$$

donde los coeficientes de peso están implícitos en la concentración de cada fracción, al ser absorbidos desde la condición inicial.

La determinación de los coeficientes  $\alpha_j$  depende de cuán discriminada (por fracciones y en el tiempo) esté dada la información de entrada, y en general se hace a través de hipótesis de trabajo (ver Capítulo 5).

### 3.6 MODELO DE TRANSPORTE DE FONDO

De acuerdo a lo señalado en **3.5.3**, el transporte en suspensión se modela por encima del fondo ficticio, de modo que el eventual transporte en estado de suspensión por debajo de tal límite queda representado por la condición de borde de intercambio de partículas. Además, en esta última zona tiene lugar el transporte de fondo.

La modelación explícita del transporte de fondo constituye un problema muy complicado. Debido a las altas concentraciones locales, se deben tener en cuenta las partículas individuales y su interacción mutua, que junto con el agua circundante dan lugar a un sistema donde se producen fenómenos físicos no lineales. Una técnica de trabajo para abordar este tipo de problemas es la dinámica molecular (Herrmann 1993).

Aquí se opta por abordar el problema desde un punto de vista más práctico, consistente en modelar el modo de transporte de fondo a partir de fórmulas de transporte. Si bien constituyen

una visión simplificada del fenómeno, presentan la virtud de cuantificar el flujo sólido con un aceptable grado de precisión.

Para el material granular se implementan tres formulaciones, las cuales se describen en el Anexo 5:

- Método determinístico de van Rijn (1984a)
- Método estocástico de van Rijn (1987)
- Método de Engelund-Fredsoe (1976)

En el caso de material cohesivo se considera, análogamente a la relación (3.46), que las partículas efectivamente depositadas se adhieren instantáneamente al lecho y no entran nuevamente en movimiento. Es decir, el transporte neto de fondo para el material cohesivo se supone nulo.

### 3.7 MODELO DE EVOLUCIÓN DEL LECHO

#### 3.7.1 Evolución morfológica

Las variaciones del nivel del lecho son producto del eventual desbalance entre los caudales sólidos entrantes y salientes en un volumen de control. Cuando el proceso de sedimentación comienza, el fondo se modifica de acuerdo a

$$\frac{dz_f}{dt} = - \sum_j \frac{1}{(1 - \pi_j) B_f} \frac{dQ_{sj}}{dx} \quad (3.61)$$

donde  $\pi_j$  es la porosidad del material de la fracción  $j$ ,  $B_f$  es el ancho medio en la capa de fondo modificada y  $Q_{sj}$  el caudal sólido de la  $j$ -ésima fracción, definido como

$$Q_{sj} \equiv q_{ssj} + q_{sbj}^{nc} + q_{sbj}^c \quad (3.62)$$

donde  $q_{ssj}$  es el caudal sólido (flujo volumétrico de partículas) en suspensión:

$$q_{ssj} = \int_{\delta_{bs}}^{\zeta} B(u + w_{sj} \text{sen } \theta) s_j dz \quad (3.63)$$

$q_{sbj}^{nc}$  es el caudal sólido producto del transporte de fondo del material no cohesivo:

$$q_{sbj}^{nc} = B_f \phi_{sbj} \quad (3.64)$$

con  $\phi_{sbj}$  el transporte de fondo por unidad de ancho (ver Anexo 5) y, de acuerdo a lo señalado anteriormente, el transporte de fondo del material cohesivo se considera nulo:

$$q_{sbj}^c = 0 \quad (3.65)$$

### 3.7.2 Distribución de partículas en el lecho

Para determinar la evolución de la distribución de partículas en el lecho se plantea un modelo simplificado en términos del flujo neto de masa sólida para cada fracción. Si se considera un volumen de control cuya altura abarca toda la profundidad de flujo, entonces el flujo neto de masa sólida de la  $j$ -ésima fracción en la superficie del fondo viene dado por

$$\varphi_j \equiv \rho_{sj} (\Delta q_{ssj} + \Delta q_{sbj}^{nc}) \quad (3.66)$$

donde  $\Delta q_{ssj}$  y  $\Delta q_{sbj}^{nc}$  representan las variaciones de los caudales sólidos en suspensión y de fondo, respectivamente, entre las caras de entrada y salida (en la dirección del flujo) del volumen de control para la fracción  $j$ .

Sea  $p_j$  la fracción de masa de sedimento que corresponde a la fase  $j$  en la composición de la capa superficial del lecho. Si se produce un cambio debido a los procesos de erosión/sedimentación, la fracción de masa de esa fase en la composición de la nueva capa superficial,  $p'_j$ , se determina a partir del siguiente criterio:

- Ausencia de erosión/deposición neta

En este caso se cumple  $\varphi_j = 0 \quad \forall j$ , por lo que se mantiene la distribución anterior

$$p'_j = p_j \quad (3.67)$$

- Deposición neta

Si  $\varphi_j \geq 0 \quad \forall j$  y  $\sum_j \varphi_j \neq 0$ , se toma la distribución proporcional al flujo de cada especie

$$p'_j = \frac{\varphi_j}{\sum_j \varphi_j} \quad (3.68)$$

- Erosión neta

Cuando  $\varphi_j \leq 0 \quad \forall j$  y  $\sum_j \varphi_j \neq 0$ , se supone que se desarrolla una capa de armadura que luego impide que el material de las fracciones erosionadas se continúe erosionando

$$p'_j = \begin{cases} \frac{p_j}{\sum_{jne} p_{jne}} & \text{si } \varphi_j = 0 \quad (\text{fase no erosionada}) \\ 0 & \text{si } \varphi_j < 0 \quad (\text{fase erosionada}) \end{cases} \quad (3.69)$$

donde el subíndice jne indica fracciones no erosionadas. En el caso en que  $\sum_{jne} p_{jne} = 0$  se mantiene la distribución anterior, es decir, se aplica (3.67).

- Erosión/deposición simultánea

En el hipotético caso en que algunas fracciones se erosionan y otras se depositan, se supone que se desarrolla una capa de armadura, conformada por el material depositado, que inhibirá la erosión posterior, aplicándose entonces

$$p'_j = \begin{cases} \frac{\varphi_j}{\sum_{jd} \varphi_{jd}} & \text{si } \varphi_j > 0 \quad (\text{fase depositada}) \\ 0 & \text{si } \varphi_j \leq 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

donde el subíndice jd identifica a las fracciones depositadas.

### 3.7.3 Compactación

El aumento del peso específico seco de los depósitos, por efecto de la compactación del lecho, se puede expresar a través de (Shen 1971):

$$\gamma_d = \gamma_0 + 0.4343K \left\{ \left( \frac{\tau_c}{\tau_c - 1} \right) \ln \tau_c - 1 \right\} \quad (3.71)$$

donde  $\gamma_0$  es el peso específico inicial (en libras por pie cúbico, y usualmente luego de un año de compactación), K un factor de compactación y  $\tau_c$  el tiempo de compactación. La expresión (3.71) representa un valor promedio luego de  $\tau_c$  años.

Los valores del peso específico inicial y el factor de compactación dependen del tipo de sedimento que constituye el lecho, y del modo de operación típico del reservorio, de acuerdo a los resultados de distintos autores presentados en la tabla 3.1 (Shen 1971).

Luego, a partir del peso específico se puede determinar la evolución de la porosidad de cada estrato depositado, de acuerdo a lo presentado en la figura 3.1:

$$\pi = 1 - \frac{\gamma_d}{\gamma_s} \quad (3.72)$$

con  $\gamma_s$  el peso específico del material sedimentado.

*Tabla 3.1 - Peso específico inicial y factor de compactación para lechos de reservorios.  
(Los valores están expresados en libras por pie cúbico)*

| Operación del reservorio                                | Autor          |   |            |     |            |      |            |   |            |     |            |      |
|---|----------------|---|------------|-----|------------|------|------------|---|------------|-----|------------|------|
|   | Lane y Koelzer |   |            |     |            |      | Trask      |   |            |     |            |      |
|   | arena          |   | limo       |     | arcilla    |      | arena      |   | limo       |     | arcilla    |      |
| Sedimento siempre o casi siempre sumergido              | 93             | 0 | 65         | 5.7 | 30         | 16   | 88         | 0 | 67         | 5.7 | 13         | 16   |
| Variación del nivel de embalse normalmente moderada     | 93             | 0 | 74         | 2.7 | 46         | 10.7 | 88         | 0 | 76         | 2.7 | -          | 10.7 |
| Variación del nivel de embalse normalmente considerable | 93             | 0 | 79         | 1   | 60         | 6    | 88         | 0 | 81         | 1   | -          | 6    |
| Reservorio normalmente vacío                            | 93             | 0 | 82         | 0   | 78         | 0    | 88         | 0 | 84         | 0   | -          | 0    |
|   | $\gamma_0$     | K | $\gamma_0$ | K   | $\gamma_0$ | K    | $\gamma_0$ | K | $\gamma_0$ | K   | $\gamma_0$ | K    |

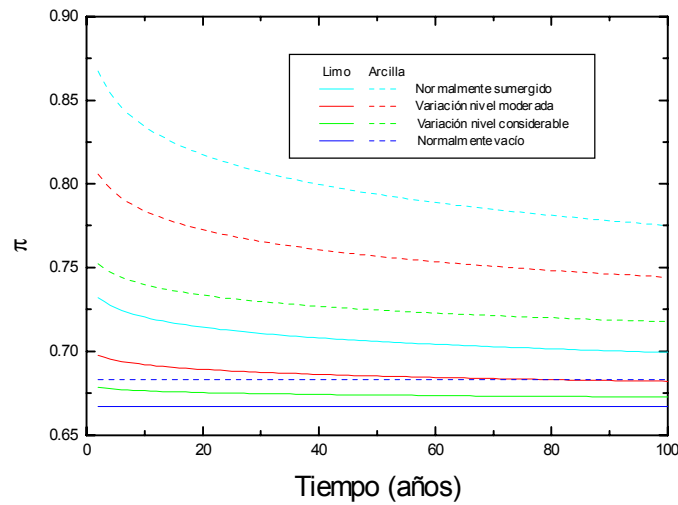


Figura 3.1 – Modificación media de la porosidad del lecho por efecto de la compactación.

### 3.7.4 Rugosidad de fondo

#### 3.7.4.1 Rugosidad de piel

La rugosidad equivalente en el caso de un lecho plano es la rugosidad de piel ( $k_{sp}$ ), y se determina a través de la relación

$$k_s = k_{sp} = \begin{cases} 2\delta_{50} & \text{si } Re_* < 4 \\ 3\delta_{90} & \text{si } Re_* > 70 \end{cases} \quad (3.73)$$

donde  $\delta_{90}$  representa el diámetro de partícula para el cual el 90% de la distribución de tamaños en el lecho es menor, en peso, y  $Re_*$  es el número de Reynolds de la partícula

$$Re_* \equiv \frac{u_*' \delta_{50}}{\nu} \quad (3.74)$$

siendo  $u_*'$  la velocidad de corte en el fondo relacionada con los granos (ver Anexo 4).

Cuando  $Re_* < 4$  los elementos de rugosidad superficial están dentro de la subcapa laminar, y se considera que el fondo es hidráulicamente liso. Si  $Re_* > 70$ , aproximadamente, la subcapa laminar se rompe y el contorno se vuelve hidráulicamente rugoso. Entre ambos regímenes se considera una variación lineal de la rugosidad de piel. En la literatura se pueden encontrar variaciones respecto de la cuantificación de la rugosidad de piel definida por (3.73) (van Rijn 1984c, Raudkivi 1976, Engelund y Fredsoe 1976).

### 3.7.4.2 Rugosidad por forma

Normalmente el lecho plano compuesto por material granular es inestable y tiende a deformarse dando lugar a la aparición de distintas formas de fondo. En la medida en que un lecho plano es sometido a flujos de potencia creciente, aparecen rizos, dunas, se recupera el fondo plano y, en casos extremos, antidunas. Entonces, la relación (3.73) se generaliza como

$$k_s = k_{sp} + k_{sf} \quad (3.75)$$

donde  $k_{sf}$  es la rugosidad por forma, asociada a la altura característica de las formas de fondo.

### 3.7.4.3 Estabilidad y rangos de existencia de formas de fondo

Teniendo en cuenta la evolución de perturbaciones periódicas de un lecho constituido por material granular, se puede establecer un criterio de estabilidad de las ondulaciones del fondo (Fredsoe 1985). En el caso que la hidrodinámica y el transporte de sedimentos produzcan la disminución de la amplitud de las perturbaciones, las mismas tenderán a desaparecer y se recuperará el fondo plano original (estabilidad). Por el contrario, si la amplitud de las perturbaciones aumenta el lecho resulta inestable, lo cual finalmente dará lugar a la formación de rizos, dunas y antidunas.

Los resultados de Fredsoe (1985), basados en la hipótesis de que el transporte en suspensión es preponderante, se resumen en las siguientes condiciones:

- Lecho estable

$$Fr^2 < \frac{\tanh(kh)}{kh} \quad \text{o} \quad Fr^2 > \frac{\coth(kh)}{kh} \quad (3.76)$$

donde  $Fr$  es el número de Froude (definido en el Capítulo 2),  $h$  es la profundidad local de flujo y  $k$  es el número de onda de las ondulaciones

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_f} \quad (3.77)$$

con  $\lambda_f$  la longitud de onda de las formas de fondo.

- Lecho inestable

$$\frac{\tanh(kh)}{kh} < Fr^2 < \frac{\coth(kh)}{kh} \quad (3.78)$$

El análisis anterior debe ser complementado en el caso de lecho estable para los menores números de Froude, ya que la hipótesis de transporte en suspensión predominante frecuentemente no se cumple (Fredsoe 1985).

Por otro lado, en función de parámetros típicos del transporte de sedimento granular, se han establecido criterios empíricos que determinan rangos (no establecidos en forma exacta) de existencia de distintos tipos de cobertura del lecho (Fredsoe 1985, Raudkivi 1976):

- Fondo plano:

$$\begin{aligned} Re_* < 4 \quad \text{o} \quad Re_* > 1000 \\ \frac{\theta'}{\theta_{cr}} > 65 \\ \delta_{50} < 62 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde  $\theta'$  es el parámetro de Shields (o tensión efectiva adimensional)

$$\theta' = \frac{\tau'_b}{\rho g \Delta \delta_{50}} \quad (3.80)$$

con  $\tau'_b$  la tensión de corte en el fondo relacionada con los granos (ver Anexo 4),  $\theta_{cr}$  la tensión crítica adimensional

$$\theta_{cr} = \frac{\tau_{b,cr}}{\rho g \Delta \delta_{50}} \quad (3.81)$$

siendo  $\tau_{b,cr}$  es la tensión de corte crítica de acuerdo al criterio de Shields (a partir de la cual comienza el proceso de resuspensión, ver Anexo 4).

- Rizos:

$$\begin{aligned} 4 < Re_* < 12 \\ 1 < \frac{\theta'}{\theta_{cr}} < 14 \\ 62 \mu\text{m} < \delta_{50} < 700 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (3.82)$$

- Dunas:

$$\begin{aligned}
 12 < Re_* < 1000 \\
 1 < \frac{\theta'}{\theta_{cr}} < 65 \\
 \delta_{50} > 150 \mu\text{m}
 \end{aligned}
 \tag{3.83}$$

A partir de los criterios empíricos y de estabilidad anteriores es posible determinar la factibilidad de la presencia de formas de fondo. Para cuantificar sus dimensiones se utilizan los criterios detallados en las dos secciones siguientes.

#### 3.7.4.4 Predictor de rizos

Los rizos presentan una forma triangular dentro del rango

$$\begin{aligned}
 \Delta_r < 60 \text{ mm} \\
 \lambda_r < 0.6 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{3.84}$$

donde  $\Delta_r$  y  $\lambda_r$  son la altura y longitud típicas.

Para la longitud de los rizos se utiliza (Raudkivi 1976)

$$\lambda_r \approx 1000\delta_{50}
 \tag{3.85}$$

Respecto de la altura de los rizos, Raudkivi (1976) reproduce un rango de valores cuyo promedio se presenta en la figura 3.2. A través de un ajuste de estos datos (ver figura 3.2) se arribó a la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} = -0.0487 + 0.0516 \frac{\theta'}{\theta_{cr}} - 0.00371 \left( \frac{\theta'}{\theta_{cr}} \right)^2
 \tag{3.86}$$

#### 3.7.4.5 Predictor de dunas

Para predecir los parámetros en el caso de dunas, se utilizan las expresiones de van Rijn (1984c):

$$\lambda_d = 7.3h
 \tag{3.87}$$

$$\Delta_d = 0.11h \left( \frac{\delta_{50}}{h} \right)^{0.3} (25 - T) (1 - e^{-T/2}) \quad (3.88)$$

donde  $\Delta_d$  y  $\lambda_d$  son la altura y longitud típicas de duna, siendo T el parámetro de estado de transporte definido en el Anexo 4.

Las expresiones (3.87) y (3.88) fueron obtenidas con partículas en el rango  $160 < \delta_{50} < 3600 \mu\text{m}$  y profundidades de hasta 20m.

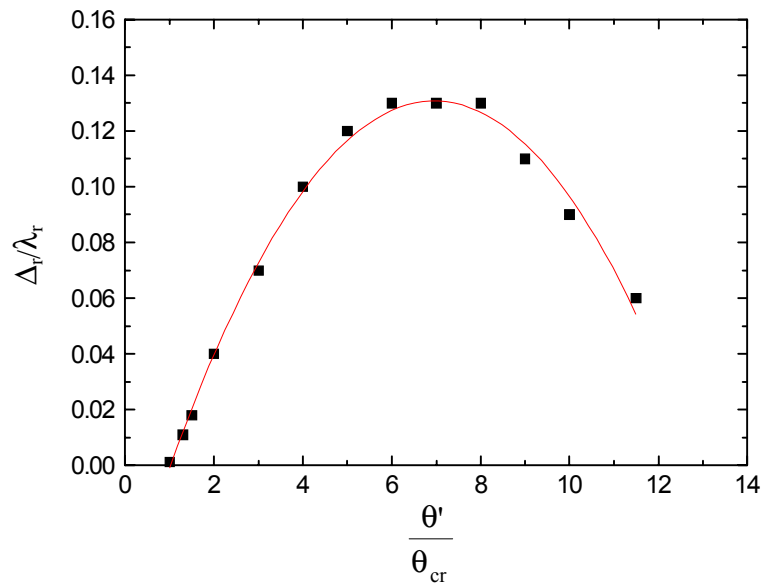


Figura 3.2 – Parámetros de rizo en función de la tensión adimensional.

Finalmente, la rugosidad por forma se determina a partir de

$$k_{sf} = \begin{cases} 0 & \text{fondo plano} \\ \Delta_r & \text{rizos} \\ \Delta_d & \text{dunas} \end{cases} \quad (3.89)$$

## Capítulo 4

# MODELO NUMÉRICO

### 4.1 ESQUEMA DE MARCHA Y MÉTODO CUASI-ESTACIONARIO

Con el objeto de hallar las soluciones del modelo matemático presentado en los Capítulos 2 y 3, se utilizó un esquema numérico de cálculo. Para resolver problemas de la dinámica de fluidos computacional (CFD), hoy en día se dispone de métodos relativamente generales (Hirsch 1988, Versteeg y Malalasekera 1995). En este caso, sin embargo, *se desarrolló un modelo numérico con características novedosas*, que explota ventajosamente las particularidades del problema, tal como se explica a continuación.

En el Capítulo 2 se mostró que el sistema físico bajo estudio involucra múltiples escalas espaciales y temporales. Algunas de ellas son resueltas por el modelo matemático, mientras que para las restantes sólo se representan sus efectos integrados. De todos modos, el amplio espectro de escalas resueltas determina que el modelo numérico deba utilizar una discretización lo suficientemente fina como para resolver las escalas más pequeñas, pero lo suficientemente extendida como para abarcar las escalas mayores, lo cual conduce a un gran volumen de cálculo y almacenamiento de información. Aún así, dado que uno de los objetivos centrales del trabajo es construir una herramienta de cálculo que no necesite de hardware de alta performance, el esquema numérico debe ser eficiente, en el sentido de que sea capaz de proveer resultados de interés ingenieril en tiempos de cómputo razonables.

El primer paso en este sentido ya ha sido dado con el planteo del propio modelo matemático, a través de la parabolización de las ecuaciones de movimiento. Efectivamente, con independencia del método de discretización a emplear, esta aproximación permite establecer un *proceso de marcha* en la dirección principal de flujo, es decir que, conocidos los campos hidrodinámicos en una sección vertical arbitraria (sección de base), se puede determinar la solución en la siguiente sección aguas abajo (sección de cálculo) sin más información que la disponible entre ambas secciones. En otras palabras, la coordenada espacial longitudinal actúa como el tiempo en los problemas parabólicos tradicionales, permitiendo definir distintos esquemas de resolución (Marshall 1985).

De esta manera, se reduce notablemente la dimensión de los sistemas a resolver (obviamente, a costa de resolver una mayor cantidad de sistemas), lo cual se traduce en un notable ahorro de tiempo de procesamiento.

El segundo paso también ha sido considerado en la formulación del modelo matemático y se refiere a la representación temporal de la evolución del sistema. Dado que las escalas temporales de adaptación del flujo a las excitaciones externas son mucho menores que la escala de evolución de esas excitaciones (hipótesis ii), de origen hidrológico, puede adoptarse la aproximación cuasi-estacionaria. Esto es, la evolución temporal del sistema se representa a través de una sucesión de estados estacionarios, en cada uno de los cuales se supone que las variables de campo se adaptan instantáneamente a condiciones de equilibrio. La aproximación cuasi-estacionaria permite que la discretización sea exclusivamente espacial.

Otra consideración relevante está asociada a la evolución del lecho, debida al transporte de sedimentos, y la modificación temporal de la posición de la superficie libre, que dan lugar a un recinto morfológicamente variable en cada paso de tiempo. Ya que el problema no es cilíndrico, se plantea una discretización por *elementos finitos* que, entonces, resulta superior al método de diferencias finitas. Además de su natural adaptación a los contornos irregulares, con el método de los elementos finitos es posible densificar en forma sencilla aquellas regiones donde se desea (o numéricamente se necesita) un mayor detalle, en particular las adyacencias del lecho.

Finalmente, el carácter desacoplado de las ecuaciones de la hidrodinámica y el transporte de sedimentos permite que la resolución numérica también sea llevada a cabo en forma desacoplada.

## 4.2 FORMULACIÓN DE RESIDUOS PONDERADOS

La discretización en elementos finitos se construyó a partir de una formulación de residuos ponderados. De acuerdo a lo señalado anteriormente, se trabaja con el sistema (2.51)-(2.53) y sus condiciones de borde (2.61) y (2.64) a (2.66). En primer lugar se presenta la formulación para el modelo hidrodinámico, mientras que la del modelo sedimentológico se desarrollará más adelante (ver 4.6). Sean

$$\ell(u, w) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \ln B}{\partial x} + w \frac{\partial \ln B}{\partial z} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}_x(u, w, p) \equiv u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_z(u, w, p) \equiv u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.3)$$

La expresión en residuos ponderados de las ecuaciones que gobiernan el sistema es:

$$\iint_{\Omega} W_p^{\Omega} (\ell(u, w) - q_{\sigma} - q_{\rho}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\zeta}} \overline{W}_p^{\zeta} (p - p_0) d\Gamma_{\zeta} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W_x^{\Omega} (\mathcal{L}_x(u, w, p) - g_x + uq_{\sigma} - q_{\rho}(u_0 - u)) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_b} \overline{W}_x^b (u - u_b) d\Gamma_b + \int_{\Gamma_{\zeta}} \overline{W}_x^{\zeta} (v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} - \tau_w) d\Gamma_{\zeta} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W_z^{\Omega} (\mathcal{L}_z(u, w, p) - g_z + wq_{\sigma} - q_{\rho}(w_0 - w)) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_b} \overline{W}_z^b (w - w_b) d\Gamma_b + \int_{\Gamma_{\zeta}} \overline{W}_z^{\zeta} (u \frac{d\zeta}{dx} - w - \sigma_{\zeta}) d\Gamma_{\zeta} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $\Omega$  es el dominio de flujo,  $\Gamma_b$  el contorno del fondo,  $\Gamma_{\zeta}$  el de la superficie libre y  $W$  y  $\overline{W}$  las funciones de peso. Para estas últimas, los supraíndices indican el dominio sobre el cual están definidas, mientras que los subíndices indican que, en general, las asociadas a cada ecuación son diferentes entre sí.

Las funciones de peso se pueden elegir de forma tal de satisfacer las condiciones de borde de Dirichlet (Zienkiewicz y Taylor 1989). Por ejemplo, si en (4.4) la función presión se elige de forma tal de cumplir la condición rígida en la superficie libre, se puede tomar  $W_p^{\Omega} \Big|_{\Gamma_{\zeta}} = \overline{W}_p^{\zeta} = 0$ , resultando

$$\iint_{\Omega} W_p^{\Omega} \ell(u, w) d\Omega = \iint_{\Omega} W_p^{\Omega} (q_{\sigma} + q_{\rho}) d\Omega \quad (4.7)$$

Del mismo modo, si las velocidades satisfacen las condiciones de borde en el fondo se tiene la libertad de definir  $W_x^{\Omega} \Big|_{\Gamma_b} = \overline{W}_x^b = W_z^{\Omega} \Big|_{\Gamma_b} = \overline{W}_z^b = 0$ .

Como es usual, los términos difusivos de los operadores  $\mathcal{L}_x$  y  $\mathcal{L}_z$  se integran por partes utilizando el teorema de Green. Este proceso reduce el requerimiento de continuidad en las derivadas segundas de los campos de velocidad, los cuales sólo deben ser clase  $C^1$  (forma débil). Aplicando el teorema de Green al término difusivo en (4.5) se obtiene:

$$-\iint_{\Omega} W_x^{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial W_x^{\Omega}}{\partial z} v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} d\Omega - \int_{\Gamma} W_x^{\Omega} v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} n_z \Big|_b^{\zeta} d\Gamma \quad (4.8)$$

siendo  $n_z$  la proyección de la normal al contorno  $\Gamma$  sobre la dirección  $z$ . En (4.8) las integrales de línea del miembro derecho están definidas sobre la superficie libre ( $dx = n_z d\Gamma_\zeta = \mathbf{n}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z d\Gamma_\zeta$ ) y el fondo ( $dx = n_z d\Gamma_b = \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{e}_z d\Gamma_b$ ), y se extienden desde la sección de entrada hasta la sección final de cálculo.

Entonces, eligiendo  $\overline{W}_x^\zeta = W_x^\Omega|_{\Gamma_\zeta}$  y recordando que  $W_x^\Omega|_{\Gamma_b} = 0$ , la ecuación (4.5) resulta

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W_x^\Omega \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_x^\Omega}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_\zeta} W_x^\Omega \tau_w d\Gamma_\zeta + \iint_{\Omega} W_x^\Omega (g_x - uq_\sigma + q_\rho (u_0 - u)) d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

El término difusivo en (4.6) se trata de igual forma. Eligiendo  $\overline{W}_z^\zeta = W_z^\Omega|_{\Gamma_\zeta}$  y recordando que  $W_z^\Omega|_{\Gamma_b} = 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W_z^\Omega \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_z^\Omega}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_\zeta} W_z^\Omega \left( u \frac{dh}{dx} - w - \sigma_\zeta - v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} n_z \right) d\Gamma_\zeta = \iint_{\Omega} W_z^\Omega (g_z - wq_\sigma + q_\rho (w_0 - w)) d\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

Las ecuaciones (4.7), (4.9) y (4.10) constituyen la forma de residuos ponderados para el problema diferencial planteado en el Capítulo 2, y sirven de base para introducir la discretización por elementos finitos.

### 4.3 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

La solución numérica de este tipo de problemas presenta dos complicaciones principales:

- La condición de incompresibilidad produce la aparición de ondas de presión que viajan por la malla con velocidad infinita, cuya incorrecta representación puede causar la aparición de oscilaciones espurias globales en la solución numérica (Sani et al. 1981a , 1981b), el incumplimiento de la condición de incompresibilidad (Pelletier et al. 1989) o la falta de convergencia cuando se refina la malla (Walters y Carey 1983).
- La preponderancia de los términos no lineales advectivos puede ocasionar inestabilidades locales, sobre todo en la vecindad de gradientes importantes (Gresho y Lee 1981, Zienkiewicz y Taylor 1989).

Dentro del contexto del método de elementos finitos (MEF), el esquema clásico de Galerkin para las formulaciones en residuos ponderados, como la anterior, presenta ambos inconvenientes. El primero debido a que, al aproximar las variables incógnitas con interpolaciones de igual orden, no se satisface la condición inf-sup, o condición de Babuska-Brezzi (Babuska 1971, 1973, Brezzi 1974). El segundo producido por el carácter centrado de la discretización de los operadores diferenciales de primer orden, en este caso los términos advectivos (Oñate 1996).

El problema asociado al carácter incompresible del flujo se ataca clásicamente mediante aproximaciones mixtas con interpolaciones de diferente orden para los campos de velocidad y presión (Fortin 1981, Jackson y Cliffe 1981, Sani et al. 1981b, Zienkiewicz y Taylor 1989). Para este caso se desarrollaron técnicas que permiten determinar qué combinación de interpolaciones satisface la condición inf-sup (Zienkiewicz et al. 1986).

Otros tratamientos evitan la utilización de la interpolación mixta, estabilizando el campo discreto de presión con técnicas como la penalización (Hughes et al. 1979a), introduciendo términos de segundo orden (difusivos) para el campo de presión (Rice y Schnipke 1986), o perturbando las funciones de peso (Hughes et al. 1986a, Hughes et al. 1987, De Sampaio 1991).

Respecto del problema de los flujos dominados por advección, en el caso de los métodos de diferencias finitas centradas el inconveniente se resolvió introduciendo difusión numérica a través de técnicas de “upwinding” (Hirsch 1990). Esta metodología se extendió al MEF (Hughes, T.J.R. 1978, Heinrich 1980), incluso utilizando difusión sólo a lo largo de las líneas de corriente para evitar la difusión excesiva (Heinrich et al. 1977, Hughes y Brooks 1979b, Kelly et al. 1980). Estos esquemas, de Petrov-Galerkin (PG), incluso se desarrollaron para problemas no estacionarios (Yu y Heinrich 1986, 1987).

Finalmente, las técnicas anteriores dieron lugar al método SUPG (*Streamline Upwind/Petrov-Galerkin*, Brooks y Hughes 1982), que ha sido exitosamente utilizado en una amplia variedad de problemas dominados por la convección. A partir del método SUPG se han desarrollado técnicas de estabilización para esquemas en elementos finitos (Hughes et al. 1986b, Idelsohn et al. 1994), marcando una tendencia hacia formulaciones dentro de un contexto teórico general (Hughes 1995, Codina 1997). Esencialmente, consisten en sumar un término de estabilización a la formulación original de Galerkin. Este término se puede visualizar como un producto  $L_2$ , dentro de cada elemento, del residuo de la ecuación a resolver por un operador aplicado sobre la función de prueba, todo escalado con un parámetro numérico (Codina 1997).

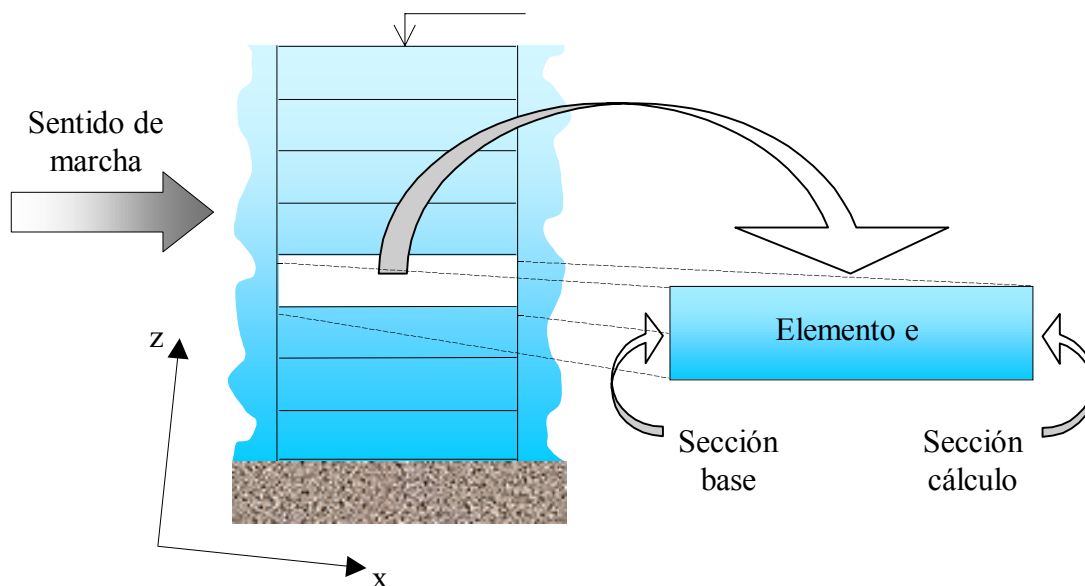
#### **4.3.1 Desarrollo de elemento finito de 6 nodos**

De entre las distintas técnicas de estabilización mencionadas, para el sistema formado por (4.7), (4.9) y (4.10) se opta por utilizar interpolación mixta, esto es, los campos de velocidad y presión se discretizan dentro de cada elemento mediante

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &\approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \\
 \mathbf{w} &\approx \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{N}\mathbf{w}^e \\
 p &\approx \hat{p} = \mathbf{M}\mathbf{p}^e
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{w}}$  son las aproximaciones por elementos finitos de las componentes de velocidad en el plano vertical,  $\hat{p}$  la aproximación de la presión,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{M}$  los vectores cuyas componentes son las funciones de interpolación de la velocidad y la presión, respectivamente, y  $\mathbf{u}^e$ ,  $\mathbf{w}^e$  y  $\mathbf{p}^e$  los vectores que contienen los valores nodales de dichos campos.

Ahora bien, para que el proceso de marcha sea útil, la discretización del dominio de flujo debe ser tal que queden perfectamente definidas las secciones de base y de cálculo. Por ello resulta conveniente utilizar una red estructurada de elementos cuadrangulares, con dos de sus caras paralelas y coincidiendo con tales secciones, de acuerdo al esquema de la figura 4.1.



*Figura 4.1 – Esquema de discretización con elementos finitos cuadrangulares: volumen de control entre secciones de base y de cálculo (desde el fondo hasta la superficie libre).*

Para ser consistentes con el proceso de marcha, los nodos incógnita sólo deberían estar localizados en la sección de cálculo, es decir, no debería haber nodos intermedios entre las secciones de base y de cálculo. Esto produce que la interpolación en la dirección de marcha sea lineal, generando un esquema de primer orden en esa dirección, propiedad que cumplen algunos esquemas en diferencias finitas para las ecuaciones de Navier-Stokes parabolizadas (Israeli y Lin 1985).

De entre distintas posibilidades para definir las interpolaciones que cumplan estos requisitos, se utiliza la que se esquematiza en la figura 4.2 (Tarela 1993). Se trata de un *nuevo tipo de elemento finito 2D de 6 nodos*. La presión se interpola bilinealmente (4 nodos en las esquinas), y las velocidades se interpolan linealmente en la dirección de marcha y cuadráticamente en la vertical (3 nodos sobre cada una de las secciones de base y de cálculo). Las coordenadas se interpolan bilinealmente. En el Anexo 6 se presentan las funciones de interpolación.

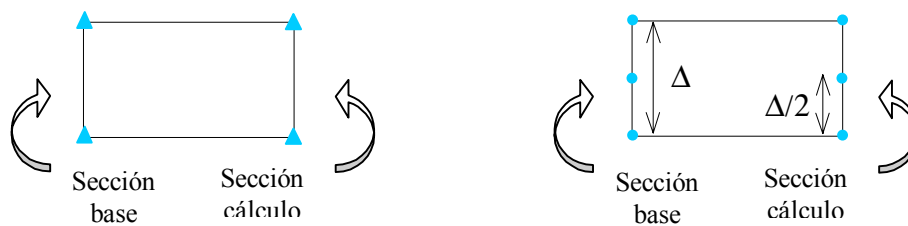


Figura 4.2 – Esquema del elemento finito utilizado: posición de nodos de presión (▲) y velocidad (●)

### 4.3.2 Elección de las funciones de peso

Las funciones de peso de la formulación en residuos ponderados se eligieron en la forma clásica para esquemas con interpolación mixta, siendo en este caso:

$$\begin{aligned} W_p^\Omega &= M \\ W_x^\Omega &= W_z^\Omega = N \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde M y N son las funciones de interpolación de la presión y las componentes de velocidad, respectivamente (ver Anexo 6).

Al aplicar la técnica de marcha a las ecuaciones de movimiento, las funciones de peso se evalúan solamente sobre la sección de cálculo. Esto produce que las mismas sean discontinuas sobre cada sección, tal como se muestra en la figura 4.3 para el caso de la función N evaluada en un nodo esquina. El esquema así planteado se puede interpretar como un método PG (Tarela y Menéndez 1998a), ya que las funciones de peso provienen de las de forma, pero están truncadas respecto de ellas.

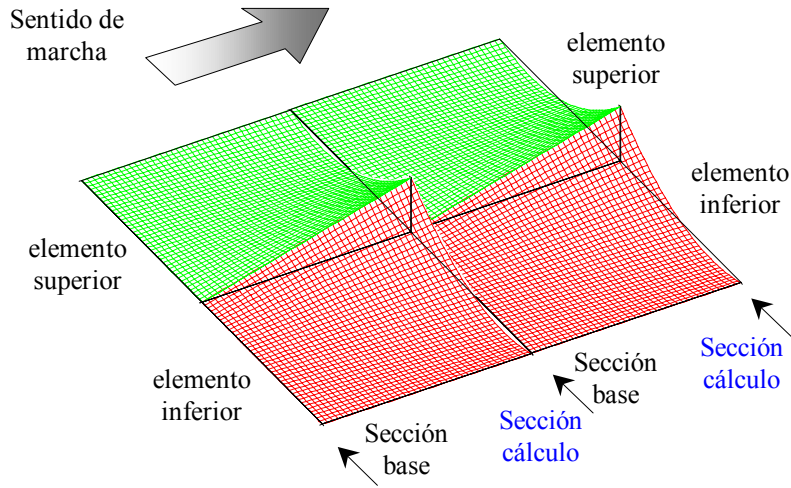


Figura 4.3 – Funciones de peso  $N$  para ECM en nodos esquina. Se muestran dos secciones de cálculo consecutivas, y el patrón para dos elementos adyacentes. Los colores diferencian las partes de  $N$  que actúan sobre los elementos superior e inferior, respectivamente.

### 4.3.3 Forma discretizada de las ecuaciones de movimiento

El sistema (4.7)-(4.9)-(4.10) se discretiza utilizando (4.11) para las variables de campo y (4.12) para las funciones de peso, en este caso evaluadas en cada elemento en que se subdivide el dominio de cálculo. Considerando la técnica de marcha, la forma discreta de las ecuaciones de movimiento, luego del proceso de ensamble, adopta la siguiente forma para el nodo genérico  $j$ :

$$\{A_{ji}^e + A_{c_{ji}}^e\}u_i^e + \{B_{ji}^e + B_{c_{ji}}^e\}w_i^e = Q_{\sigma p_j}^e \quad (4.13)$$

$$\{C_{x_{ji}}^e + C_{z_{ji}}^e + D_{ji}^e\}u_i^e + \{P_{x_{jk}}^e\}p_k^e = q_{x_j}^e + Q_{gx_j}^e + Q_{0x_j}^e + \{Q_{\sigma v_{ji}}^e\}u_i^e \quad (4.14)$$

$$\{C_{x_{ji}}^e + C_{z_{ji}}^e + D_{ji}^e\}w_i^e + \{P_{z_{jk}}^e\}p_k^e + q_{z_j}^e = Q_{gz_j}^e + Q_{0z_j}^e + \{Q_{\sigma v_{ji}}^e\}w_i^e \quad (4.15)$$

donde  $1 \leq i \leq 6$ ,  $1 \leq k \leq 4$  y  $j$  representa los nodos incógnita de las esquinas de los elementos en (4.13) y todos los nodos incógnita en (4.14) y (4.15).

En (4.13),  $A^e$  y  $B^e$  representan los operadores discretos, dentro del elemento  $e$ , de derivada primera en  $x$  y  $z$ , respectivamente,  $A_c^e$  y  $B_c^e$  son los operadores asociados al gradiente logarítmico del ancho local y  $Q_{\sigma p}^e$  es el operador de los términos fuente y de aporte lateral. En (4.14) y (4.15),  $C_x^e$  y  $C_z^e$  son los operadores discretos advectivos en la dirección  $x$  y  $z$ , respectivamente, mientras que  $D^e$  representa el operador de difusión vertical. En (4.14),  $P_x^e$  es

el operador gradiente horizontal de presión,  $q_x^e$  el de tensión de corte del viento en la superficie libre,  $Q_{gx}^e$  el de la componente de la fuerza de volumen en la dirección x,  $Q_{0x}^e$  el de la componente en la dirección x de la velocidad de la fuente externa y  $Q_{\sigma v}^e$  el asociado al aporte lateral. Finalmente, en (4.15),  $P_z^e$  representa el operador gradiente vertical de presión,  $q_z^e$  el término de superficie libre de ECMz,  $Q_{gz}^e$  la componente de la fuerza de volumen en la dirección z y  $Q_{0z}^e$  el de la componente en la dirección z de la velocidad de la fuente externa, respectivamente. Las expresiones para los coeficientes de las matrices del sistema anterior, que conforman los operadores mencionados, se presentan en el Anexo 7.

La forma operativa de imponer las condiciones de borde esenciales para las velocidades consiste en reemplazar las ECM correspondientes a los respectivos nodos de borde por un 1 en la diagonal de la matriz de rigidez y el valor prescrito en el vector independiente (Taylor et al. 1978). En el caso de la presión, el procedimiento se lleva a cabo en la EC correspondiente al nodo de la superficie libre.

Las integrales que determinan los coeficientes en (4.13) a (4.15) se resuelven numéricamente, utilizando cuadratura de Gauss de dos puntos en cada dirección.

Para tratar la no linealidad del problema se utiliza un método de punto fijo, resolviendo iterativamente el siguiente sistema:

$$\{A_{ji}^e + A_{c,ji}^e\}^{(n+1)} u_i^e + \{B_{ji}^e + B_{c,ji}^e\}^{(n+1)} w_i^e = Q_{\sigma p_j}^e \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \{^{(n)}C_{x,ji}^e + ^{(n)}C_{z,ji}^e + ^{(n)}D_{ji}^e\}^{(n+1)} u_i^e + \{P_{x,jk}^e\}^{(n+1)} p_k^e = \\ = q_{xj}^e + Q_{gx_j}^e + Q_{0xj}^e + \{Q_{\sigma v,ji}^e\}^{(n+1)} u_i^e \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \{^{(n)}C_{x,ji}^e + ^{(n)}C_{z,ji}^e + ^{(n)}D_{ji}^e\}^{(n+1)} w_i^e + \{P_{z,jk}^e\}^{(n+1)} p_k^e + ^{(n+1)} q_{zj}^e = \\ = Q_{gz_j}^e + Q_{0zj}^e + \{Q_{\sigma v,ji}^e\}^{(n+1)} w_i^e \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde el supraíndice (n), ubicado a la izquierda de la variable, indica el paso iterativo. Obsérvese que, como la viscosidad de torbellino es función de la tensión en el fondo (la cual constituye una de las incógnitas del problema), los términos difusivos deben recalcularse, en general, en cada iteración. Las expresiones para los operadores discretizados en cada paso se presentan en el Anexo 7.

El sistema anterior se resuelve, en cada iteración, mediante eliminación de Gauss con pivoteo. Como la malla es estructurada, conviene ordenar las incógnitas por nodo global, de forma de minimizar el ancho de banda y poder utilizar rutinas de resolución que explotan esta propiedad (en este caso la subrutina LEQT1B de la librería Fortran IMSL). El criterio de convergencia empleado en el proceso iterativo es

$$\left| \frac{\varphi_i^e - \varphi_i^e}{\varphi_i^e} \right| \leq \varepsilon \quad (4.19)$$

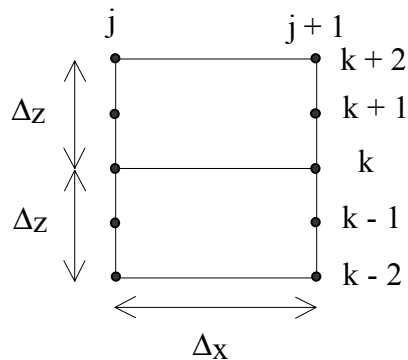
para toda variable de campo no nula,  $\varphi_i^e$ , en el nodo  $i$  del elemento  $e$ , y con  $\varepsilon=10^{-6}$ .

Más adelante se expondrán otros detalles de carácter numérico. Mientras tanto, en las secciones siguientes se discute la performance de este esquema.

#### 4.4 CONSISTENCIA Y ERROR DE DISCRETIZACIÓN

El esquema numérico planteado utiliza un nuevo elemento finito y se vale de un proceso de marcha dentro de un contexto de formulación débil, lo cual introduce una variante original de pesado de las ecuaciones de movimiento. Por este motivo, se analiza aquí, en forma explícita, la consistencia del método.

Para ello se considera la unidad mínima de discretización que se presenta en la figura 4.4. La misma consiste en dos elementos idénticos, contiguos y no deformados en la vertical ( $\Delta z = \text{cte.}$ ). Por definición del esquema de marcha, los elementos nunca están deformados en la dirección horizontal ( $\Delta x = \text{cte.}$  para todos los elementos de una misma columna de cálculo). Por simplicidad, se considera que estos elementos no son adyacentes a la superficie libre ni al fondo.



*Figura 4.4. Unidad mínima de discretización para estudiar la consistencia del método. La numeración nodal corresponde a una malla estructurada, donde  $j$  alude a la discretización horizontal y  $k$  a la vertical.*

El análisis que sigue se llevó a cabo utilizando una forma simplificada de las ecuaciones del sistema. Las mismas se linealizaron introduciendo velocidades advectivas ( $U, W$ ) constantes y comunes a ambos elementos de la figura 4.4. Por simplicidad se consideró un coeficiente de difusividad constante,  $D$ , una sección de ancho uniforme y ausencia de fuentes y de aportes laterales. Bajo estas condiciones simplificadas los operadores diferenciales definidos en (4.1)-(4.3) se reducen a

$$\ell^{\text{red}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}_x^{\text{red}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}) \equiv U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + W \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - D \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \quad (4.21)$$

$$\mathcal{L}_z^{\text{red}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}) \equiv U \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + W \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} - D \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \quad (4.22)$$

Se presenta a continuación la forma explícita de la discretización sobre los elementos de la figura 4.4, considerando integración exacta. Para los nodos centrales el ensamble se lleva a cabo sólo sobre el propio elemento. Por ejemplo, si se considera el nodo  $(j+1, k+1)$ , la forma discreta de las ecuaciones de cantidad de movimiento es, de acuerdo a (4.14) y (4.15):

$$\begin{aligned} & \frac{U \Delta z}{30} \left[ (u_{k+2}^{j+1} + 8u_{k+1}^{j+1} + u_k^{j+1}) - (u_{k+2}^j + 8u_{k+1}^j + u_k^j) \right] + \\ & \quad + \frac{W \Delta x}{9} \left[ (2u_{k+2}^{j+1} + u_{k+2}^j) - (u_k^j + 2u_k^{j+1}) \right] - \\ & - \frac{4}{9} D \frac{\Delta x}{\Delta z} \left[ (2u_{k+2}^{j+1} - 4u_{k+1}^{j+1} + 2u_k^{j+1}) + (u_{k+2}^j - 2u_{k+1}^j + u_k^j) \right] + \\ & \quad + \frac{\Delta z}{6\rho} \left[ (p_{k+2}^{j+1} + p_k^{j+1}) - (p_{k+2}^j + p_k^j) \right] - \frac{\Delta z \Delta x}{3} g_x = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{U \Delta z}{30} \left[ (w_{k+2}^{j+1} + 8w_{k+1}^{j+1} + w_k^{j+1}) - (w_{k+2}^j + 8w_{k+1}^j + w_k^j) \right] + \\ & \quad + \frac{W \Delta x}{9} \left[ (2w_{k+2}^{j+1} + w_{k+2}^j) - (w_k^j + 2w_k^{j+1}) \right] - \\ & - \frac{4}{9} D \frac{\Delta x}{\Delta z} \left[ (2w_{k+2}^{j+1} - 4w_{k+1}^{j+1} + 2w_k^{j+1}) + (w_{k+2}^j - 2w_{k+1}^j + w_k^j) \right] + \\ & \quad + \frac{\Delta x}{9\rho} \left[ (2p_{k+2}^{j+1} + p_{k+2}^j) - (p_k^j + 2p_k^{j+1}) \right] - \frac{\Delta z \Delta x}{3} g_z = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde los supraíndices y los subíndices indican la discretización espacial en  $x$  y  $z$ , respectivamente, siendo  $\phi_k^j$  el valor nodal del campo incógnita  $\phi$  en el respectivo nodo  $(j, k)$ .

En el caso de los nodos de las esquinas de los elementos, el ensamble comprende ambos elementos e incluye la EC. Para el nodo  $(j+1, k)$  resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta z}{6} \left[ (u_{k+1}^{j+1} + u_k^{j+1} + u_{k-1}^{j+1}) - (u_{k+1}^j + u_k^j + u_{k-1}^j) \right] + \\ & + \frac{\Delta x}{36} \left[ (2w_{k+2}^{j+1} + w_{k+2}^j + 8w_{k+1}^{j+1} + 4w_{k+1}^j) - (2w_{k-2}^{j+1} + w_{k-2}^j + 8w_{k-1}^{j+1} + 4w_{k-1}^j) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{U\Delta z}{60} \left[ \left( -u_{k+2}^{j+1} + 2u_{k+1}^{j+1} + 8u_k^{j+1} + 2u_{k-1}^{j+1} - u_{k-2}^{j+1} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \left( -u_{k+2}^j + 2u_{k+1}^j + 8u_k^j + 2u_{k-1}^j - u_{k-2}^j \right) \right] + \\
 & + \frac{W\Delta x}{36} \left[ \left( -2u_{k+2}^{j+1} - u_{k+2}^j + 8u_{k+1}^{j+1} + 4u_{k+1}^j \right) - \left( 4u_{k-1}^j + 8u_{k-1}^{j+1} - u_{k-2}^j - 2u_{k-2}^{j+1} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{18} D \frac{\Delta x}{\Delta z} \left[ \left( -2u_{k+2}^{j+1} + 16u_{k+1}^{j+1} - 28u_k^{j+1} + 16u_{k-1}^{j+1} - 2u_{k-2}^{j+1} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left( u_{k+2}^j + 8u_{k+1}^j - 14u_k^j + 8u_{k-1}^j - u_{k-2}^j \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{\Delta z}{6\rho} \left[ \left( p_k^{j+1} - p_k^j \right) \right] - \frac{\Delta z \Delta x}{6} g_x = 0
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{U\Delta z}{60} \left[ \left( -w_{k+2}^{j+1} + 2w_{k+1}^{j+1} + 8w_k^{j+1} + 2w_{k-1}^{j+1} - w_{k-2}^{j+1} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \left( -w_{k+2}^j + 2w_{k+1}^j + 8w_k^j + 2w_{k-1}^j - w_{k-2}^j \right) \right] + \\
 & + \frac{W\Delta x}{36} \left[ \left( -2w_{k+2}^{j+1} - w_{k+2}^j + 8w_{k+1}^{j+1} + 4w_{k+1}^j \right) - \left( 4w_{k-1}^j + 8w_{k-1}^{j+1} - w_{k-2}^j - 2w_{k-2}^{j+1} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{18} D \frac{\Delta x}{\Delta z} \left[ \left( -2w_{k+2}^{j+1} + 16w_{k+1}^{j+1} - 28w_k^{j+1} + 16w_{k-1}^{j+1} - 2w_{k-2}^{j+1} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left( w_{k+2}^j + 8w_{k+1}^j - 14w_k^j + 8w_{k-1}^j - w_{k-2}^j \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{\Delta x}{36\rho} \left[ \left( p_{k+2}^j + 2p_{k+2}^{j+1} \right) - \left( 2p_{k-2}^{j+1} + p_{k-2}^j \right) \right] - \frac{\Delta z \Delta x}{6} g_z = 0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Las ecuaciones algebraicas 4.23 a 4.27 representan el mínimo conjunto de relaciones discretas para el problema reducido.

Para analizar la consistencia se procede de la forma habitual, reemplazando los valores nodales  $\phi_k^j$  en las ecuaciones discretas por la solución exacta del problema diferencial (reducido)  $\Phi(x_j, z_k)$  y expandiendo esta última en serie de Taylor, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathcal{L}_x^{\text{red}}(u, w, p) - g_x \right] + \varepsilon_{x_{k+1}}^{j+1} &= \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2D \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] - \\
 & - \Delta z^2 \left[ \frac{U}{40} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{W}{36} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial z^2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{L}_z^{\text{red}}(u, w, p) - g_z \right] + \varepsilon_{z_{k+1}}^{j+1} &= \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2D \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right] - \\ &- \Delta z^2 \left[ \frac{U}{40} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} + \frac{W}{36} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{1}{24\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

para los nodos centrales, y

$$\left[ \ell^{\text{red}}(u, w) \right] + \varepsilon_k^{j+1} = \frac{\Delta x}{6} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] - \frac{\Delta z^2}{54} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right] \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{L}_x^{\text{red}}(u, w, p) - g_x \right] + \varepsilon_{x_k}^{j+1} &= \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2D \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] + \\ &+ \Delta z^2 \left[ \frac{U}{20} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{W}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{L}_z^{\text{red}}(u, w, p) - g_z \right] + \varepsilon_{z_k}^{j+1} &= \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2D \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right] + \\ &+ \Delta z^2 \left[ \frac{U}{20} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} + \frac{W}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - \frac{1}{6\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

para los nodos de las esquinas. En todos los casos los campos se desarrollaron a orden 3 (suponiendo que son lo suficientemente diferenciables), mostrándose los resultados al menor orden en cada paso de discretización.

Ya que la solución satisface el sistema reducido, los corchetes de los miembros izquierdos de (4.28) a (4.32) son idénticamente nulos. Entonces, los miembros derechos de dichas ecuaciones representan explícitamente los errores de discretización,  $\varepsilon_k^j$ . Estos indican en qué medida la solución analítica del problema reducido satisface las ecuaciones discretas.

Se concluye que el método cumple el *requerimiento de consistencia*, toda vez que el error de discretización tiende a cero cuando  $\Delta x$  y  $\Delta z$  se aproximan a cero en forma arbitraria, de modo que se recupera la forma diferencial del sistema reducido (Zienkiewicz y Taylor, 1989).

Además, por inspección de estas ecuaciones surge que dicho error es de la forma  $\mathcal{O}(\Delta x, \Delta z^2)$ , verificándose que el grado de precisión es 1 en la dirección de marcha (esquema descentrado) y 2 en la vertical (esquema centrado).

## 4.5 ESTABILIDAD

### 4.5.1 Estabilidad del campo de presión

Ya se mencionó que la utilización de interpolación mixta permite estabilizar la presión, evitando problemas como la aparición de oscilaciones globales espurias.

En el caso del presente esquema se respeta la diferencia en 1 grado entre los polinomios interpolantes de la velocidad y la presión en la dirección vertical. Esto permite “conectar” la información del campo de presión entre nodos contiguos (por ejemplo, los niveles  $k$  y  $k+2$  en (4.24)) gracias a la existencia de los nodos centrales de velocidad (Tarela y Menéndez 1998a). Obsérvese que la discretización del gradiente vertical de presión en los nodos de las esquinas de los elementos permanece centrada (ec. (4.27)), como en los esquemas de igual interpolación.

De no existir la conexión adicional provista por la discretización en los nodos centrales, el campo discreto de presiones resulta susceptible de producir una solución que oscila alternadamente entre nodos contiguos, generando dos tendencias débilmente relacionadas. Una de ellas recibe en forma directa la información de la única condición de borde del campo de presión, y puede permanecer acotada. La otra evoluciona casi independientemente de la primera, pero no dispone de condición de borde, por lo cual respeta el gradiente pero su módulo no está acotado y se vuelve rápidamente inestable (Tarela 1992a).

Por su parte, en la dirección de marcha los campos de velocidad y presión están representados linealmente, violando la interpolación mixta. Sin embargo, el gradiente horizontal de presión está discretizado en forma descentrada (ver ec. (4.26)), por definición del esquema de marcha, de modo que no hereda la tendencia al efecto de tablero de ajedrez.

### 4.5.2 Estabilidad del campo de velocidad

Si se analizan las ecuaciones (4.23) a (4.27) se verifica que el operador de advección horizontal es descentrado, mientras que el vertical es centrado. Esta asimetría en el operador de advección define un upwinding implícito, el cual surge automáticamente por definición del proceso de marcha, que utiliza funciones de peso solo en la columna de aguas abajo.

Tratándose de un esquema del tipo PG, el método utilizado introduce difusión numérica. Esta formulación “natural” es rígida, en el sentido de que el upwinding no se lleva a cabo exactamente a lo largo de las líneas de corriente. Sin embargo, dentro del contexto de flujo de capa límite, la dirección dominada por la convección es la de marcha, por lo cual el upwinding es introducido en forma consistente con el flujo que se desea resolver.

Una forma de visualizar el efecto de la introducción de difusión numérica en forma explícita consiste en utilizar el concepto de ecuación modificada (Warming y Hyett 1974). Más allá de

los errores de redondeo (y, eventualmente, de integración numérica) la ecuación modificada representa la ecuación diferencial exacta resuelta con el esquema de elementos finitos.

Para realizar este análisis se trabaja con las ECM del sistema reducido. Se procede de manera similar a lo hecho para probar la consistencia del método, pero expandiendo los términos del sistema algebraico alrededor de sus soluciones nodales exactas  $\phi_k^j$ . Para ello se supone que existen funciones interpolantes continuas suficientemente diferenciables  $\hat{\phi}(x, z)$  que, entonces, coinciden en los nodos con la solución exacta del sistema discreto:  $\hat{\phi}(x_j, z_k) = \phi_k^j$ . El resultado es análogo al obtenido anteriormente, pero en este caso la solución interpolante no satisface el sistema reducido original. Si se descartan los términos con derivadas de orden superior al segundo se tiene:

$$\mathcal{L}_x^{\text{red}}(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) - g_x = \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial z} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} \right] \quad (4.33)$$

$$\mathcal{L}_z^{\text{red}}(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) - g_z = \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial z} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x \partial z} \right] \quad (4.34)$$

Al orden desarrollado, la discretización de las ECM proporciona expansiones iguales tanto en los nodos centrales como en los de las esquinas de los elementos.

El paso siguiente del método consiste en eliminar las derivadas cruzadas por diferenciación repetida de las expansiones obtenidas. En este caso basta diferenciar (4.33) y (4.34) respecto de  $x$ , y mantener los términos al menor orden de diferenciación, obteniéndose:

$$\mathcal{L}_x^{\text{red}}(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) - g_x = \frac{U \Delta x}{6} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\Delta x}{6\rho} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} \quad (4.35)$$

$$\mathcal{L}_z^{\text{red}}(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) - g_z = \frac{U \Delta x}{6} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \quad (4.36)$$

El mismo proceso aplicado a la EC arroja:

$$\ell^{\text{red}}(\hat{u}, \hat{w}) = \frac{\Delta x}{6} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \quad (4.37)$$

Las ecs. (4.35) a (4.37) son, entonces, las ecuaciones modificadas (Warming y Hyett 1974).

Las ecs. (4.35) y (4.36) ponen de manifiesto que el método utilizado introduce una difusión numérica

$$v_{\text{num}} \equiv \frac{U \Delta x}{6} \quad (4.38)$$

en la dirección de marcha, de acuerdo a lo mencionado anteriormente. La solución será numéricamente estable si se cumple  $v_{\text{num}} \geq 0$  (Hirt 1968). En este caso, la condición de estabilidad se traduce en que el campo de advección longitudinal no debería presentar inversión de corrientes en el sentido medio, lo cual está completamente de acuerdo con el contexto de capa límite donde se desarrolla el flujo.

Obsérvese que el método no introduce difusión numérica en la vertical. Además, involucra un término fuente en la ECMx, proporcional a la longitud de los elementos, que depende de la distribución longitudinal de la presión.

Para determinar la magnitud relativa del término introducido por el método de estabilización implícita, se pueden comparar el tiempo de tránsito advectivo dentro de un elemento de longitud  $\Delta x$ ,  $\tau_{\text{adv}}^e \approx \Delta x / U$ , con el tiempo sobre el cual actúa la difusión numérica,  $\tau_{\text{dif,num}}^e \approx \Delta x^2 / v_{\text{num}}$  (Batchelor 1967), resultando

$$\tau_{\text{dif,num}}^e \approx 6\tau_{\text{adv}}^e \quad (4.39)$$

La relación (4.39) significa que los efectos difusivos de origen numérico actúan sobre escalas sub-elementales, es decir, que solo constituyen una contribución numéricamente pequeña en relación al efecto puramente físico.

### 4.5.3 Precisión

No obstante el resultado dado por (4.39), se puede determinar una condición de precisión sobre el paso longitudinal de discretización. Para ello se impone que el término de difusión numérica en la dirección longitudinal sea mucho menor que la difusión física en la vertical, obteniéndose, de acuerdo a las escalas definidas en el Capítulo 2:

$$\frac{v_{\text{num}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{v_{\text{tz}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \approx \frac{U \Delta x}{6[v_{\text{tz}}] L^2} \frac{h^2}{6} = \frac{1}{6} \frac{\Delta x}{h} \alpha^2 Re \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta x \ll 6L \quad (4.40)$$

donde se utilizó que  $\alpha Re \approx 1$ . Como la condición (4.40) resulta trivial, ya que constituye un requerimiento elemental en la elección del paso longitudinal de discretización, la difusión artificial introducida resulta despreciable. De todos modos, se debe recalcar que el resultado anterior está basado en un análisis de escala global para todo el sistema, el cual podría sufrir modificaciones locales que se deben estudiar en detalle (ver 4.6.2).

#### 4.5.4 Efecto de la integración numérica

En los análisis de convergencia y estabilidad presentados anteriormente, los operadores han sido integrados en forma exacta. En el cálculo computacional, por su parte, se utiliza cuadratura de Gauss de 2x2 puntos. Con esta técnica se pueden integrar en forma exacta (más allá de errores de redondeo) todos esos operadores, a excepción del operador de advección longitudinal. Este último es de orden 4 en su expansión polinómica en la vertical (debido a la forma de las funciones de peso e interpolación que lo definen), por lo cual la cuadratura de Gauss de 2 puntos no es suficiente para integrarlo exactamente (Burden y Faires 1985).

La tabla 4.1 muestra la diferencia entre la integración exacta y la cuadratura utilizada, para los coeficientes numéricos asociados a la advección longitudinal en las ecuaciones algebraicas (4.23) a (4.27). Aunque las diferencias son significativas, se mantienen las propiedades de simetría entre los coeficientes obtenidos por cuadratura. Resulta sencillo probar que, gracias a esto, son válidas las mismas propiedades de consistencia y estabilidad estudiadas anteriormente, ya que las nuevas expansiones asociadas al operador advectivo longitudinal solo difieren de las obtenidas por integración exacta a partir de los términos de tercer orden. De esta forma solo se modifican los coeficientes que acompañan a los términos  $\partial^3 u / \partial x \partial z^2$  en las expresiones (4.28) a (4.32), que cambian de 1/40 en el nodo central y 1/20 en el nodo esquina (integración exacta) a 1/24 en ambos casos (cuadratura).

*Tabla 4.1 – Comparación de coeficientes numéricos del operador de advección longitudinal.*

|                         | Coeficientes       |                    |                    |                    |                    |
|-------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|                         | Nodo central       |                    | Nodo esquina       |                    |                    |
| Integración exacta      | $\pm \frac{1}{30}$ | $\pm \frac{4}{15}$ | $\pm \frac{1}{60}$ | $\pm \frac{1}{30}$ | $\pm \frac{2}{15}$ |
| Cuadratura de Gauss 2x2 | $\pm \frac{1}{18}$ | $\pm \frac{2}{9}$  | $\pm \frac{1}{36}$ | $\pm \frac{1}{18}$ | $\pm \frac{1}{9}$  |

## 4.6 DISCRETIZACIÓN PARA EL TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

### 4.6.1 Formulación débil y de elementos finitos

Las ecuaciones de transporte de sedimentos se discretizaron en forma análoga a lo presentado para el modelo hidrodinámico. Por simplicidad en la notación se omite el subíndice que identifica la fracción, presentándose aquí la discretización para la concentración de una fracción genérica de material,  $s$ , ya que la misma es formalmente idéntica para todas las fracciones. Considerando que la velocidad de caída de la fracción genérica es  $w_s$ , y definiendo

$$\mathcal{L}_s(u, w, s) \equiv (u + w_s \sin \theta) \frac{\partial s}{\partial x} + (w - w_s \cos \theta) \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{sz} \frac{\partial s}{\partial z} \right) \quad (4.41)$$

entonces, a partir de (3.35), (3.39) y (3.44), la formulación de residuos ponderados de la ecuación de transporte de la fracción genérica es

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W_s^{\Omega} (\mathcal{L}_s(u, w, s) - \psi_s + sq_{\sigma} - q_{\rho}(s_0 - s)) d\Omega + \int_{\Gamma_{\zeta}} \overline{W}_s^{\zeta} (v_{sz} \cos \varphi_{\zeta} \frac{\partial s}{\partial z} + c_1 s) d\Gamma_{\zeta} \\ + \int_{\Gamma_{bs}} \overline{W}_s^{bs} \left( v_{sz} \cos \varphi_{bs} \frac{\partial s}{\partial z} + \beta_s c_2 s + (1 - \beta_s) c_3 \right) d\Gamma_{bs} = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde  $W_s^{\Omega}$ ,  $\overline{W}_s^{\zeta}$  y  $\overline{W}_s^{bs}$  son las funciones de peso y

$$\begin{aligned} c_1 &= w_s \cos(\theta - \varphi_{\zeta}) \\ c_2 &= w_s \cos(\theta - \varphi_{bs})(1 - P_d) \\ c_3 &= w_s \cos(\theta - \varphi_{bs}) s_{eq} \\ \beta_s &= \begin{cases} 0 & \delta > 62 \mu\text{m} \\ 1 & \delta < 62 \mu\text{m} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.43)$$

A continuación se procede como con la ECMx, eligiendo en este caso  $\overline{W}_s^{\zeta} = W_s^{\Omega} \Big|_{\Gamma_{\zeta}}$  y  $\overline{W}_s^{bs} = W_s^{\Omega} \Big|_{\Gamma_{bs}}$ , y utilizando el teorema de Green en el término difusivo, obteniéndose

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W_s^{\Omega} \left( (u + w_s \sin \theta) \frac{\partial s}{\partial x} + (w - w_s \cos \theta) \frac{\partial s}{\partial z} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_s^{\Omega}}{\partial z} v_{sz} \frac{\partial s}{\partial z} d\Omega + \int_{\Gamma_{\zeta}} W_s^{\Omega} c_1 s d\Gamma_{\zeta} \\ + \int_{\Gamma_{bs}} W_s^{\Omega} \beta_s c_2 s d\Gamma_{bs} = - \int_{\Gamma_{bs}} W_s^{\Omega} (1 - \beta_s) c_3 d\Gamma_{bs} + \iint_{\Omega} W_s^{\Omega} (\psi_s - sq_{\sigma} + q_{\rho}(s_{0j} - s_j)) d\Omega \end{aligned} \quad (4.44)$$

puesto que  $\mathbf{n}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \cos \varphi_{\zeta}$  y  $\mathbf{n}_{bs} \cdot \mathbf{e}_z = -\cos \varphi_{bs}$ .

Ya en la forma discreta de elementos finitos, se utilizan las funciones de interpolación de la velocidad para interpolar los campos de concentración, lo que se considera conveniente debido a que las concentraciones de sedimentos pueden presentar fuertes gradientes en las inmediaciones del fondo:

$$s \approx \hat{s} = \mathbf{N} \mathbf{s}^e \quad (4.45)$$

siendo  $\hat{s}$  es la aproximación de la concentración de la fracción genérica y  $\mathbf{s}^e$  el vector que contiene sus valores nodales.

Además, se procede del mismo modo que con las velocidades, eligiendo

$$W_s^\Omega = N \quad (4.46)$$

Entonces, la discretización de la ecuación de transporte de sedimento genérico queda representada por el siguiente sistema algebraico de ecuaciones (lineales)

$$\left\{ C_{xji}^e + S_{xji}^e + C_{zji}^e + S_{zji}^e + D_{sji}^e + q_{\zeta ji}^e + q_{bji}^e \right\} s_i^e = Q_{sj}^e + Q_{\psi j}^e + Q_{0sj}^e + \left\{ Q_{\sigma vji}^e \right\} s_i^e \quad (4.47)$$

donde  $S_x^e$  y  $S_z^e$  son los operadores discretos, dentro del elemento  $e$ , debidos a la advección producida por la velocidad de caída en la dirección  $x$  y  $z$ , respectivamente,  $D_s^e$  es el operador de difusión de partículas,  $q_\zeta^e$ ,  $q_b^e$  y  $Q_s^e$  contienen las condiciones de borde en la superficie y el fondo,  $Q_{0s}^e$  contiene el término fuente,  $Q_\psi^e$  el término de reacción y  $Q_{\sigma v}^e$ , ya definido, corresponde al aporte lateral. Sus expresiones se presentan en el Anexo 7, resolviéndose numéricamente mediante cuadratura de Gauss de dos puntos en cada dirección. Para la obtención de las soluciones se procede en forma análoga a lo descrito en 4.3.3. Los resultados de esta sección suponen una concentración de sedimento lo suficientemente baja como para que el efecto sobre la velocidad de caída sea despreciable. Caso contrario, resulta  $w_s = w_s(s)$  y se debe plantear un esquema iterativo similar al de las ECM.

#### 4.6.2 Consistencia y error de discretización

Para analizar la consistencia y el error de truncamiento del método numérico se trabaja con la ecuación genérica de transporte de sedimento, bajo las condiciones simplificadas empleadas en 4.4. Es decir, se consideran elementos no deformados y de tamaño uniforme, velocidades de flujo ( $U, W$ ) constantes y comunes a ambos elementos de la figura 4.4, un coeficiente de difusividad constante,  $D$ , y se dejan de lado las condiciones de borde. Además, se considera que no existe aporte lateral y que no hay fuentes ni reacciones. Entonces, aplicando el siguiente cambio de variables en (4.21)

$$\begin{aligned} u &\rightarrow s \\ U &\rightarrow U' = U + w_s \sin \theta \\ W &\rightarrow W' = W - w_s \cos \theta \\ p &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

la forma reducida de (4.41) es

$$\mathcal{L}_s^{\text{red}}(s) \equiv U' \frac{\partial s}{\partial x} + W' \frac{\partial s}{\partial z} - D \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (4.49)$$

Con la notación utilizada en 4.4, el análisis de consistencia en este caso arroja:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_s^{\text{red}}(s)] + \varepsilon_{sk}^{j+1} &= \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U' \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2W' \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial z} - 2D \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial z^2} \right] - \\ &- \Delta z^2 \left[ \frac{U'}{40} \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial z^2} + \frac{W'}{36} \frac{\partial^3 s}{\partial z^3} \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

para los nodos centrales, y

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_s^{\text{red}}(s)] + \varepsilon_{sk}^{j+1} &= \frac{\Delta x}{6} \left[ 3U' \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2W' \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial z} - 2D \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial z^2} \right] + \\ &+ \Delta z^2 \left[ \frac{U'}{20} \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial z^2} + \frac{W'}{12} \frac{\partial^3 s}{\partial z^3} \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

para los nodos de las esquinas, estando ambos resultados con el campo de concentración desarrollado a orden 3 e indicándose al menor orden en cada paso de discretización.

Nuevamente, como la solución satisface el sistema reducido, los corchetes de los miembros izquierdos de (4.50) y (4.51) son idénticamente nulos, y los miembros derechos representan explícitamente los errores de discretización,  $\varepsilon_{sk}^j$ . De estas dos expresiones se deduce que el método es *consistente* y, análogamente a lo observado en 4.4, el error de discretización es de la forma  $\mathcal{O}(\Delta x, \Delta z^2)$ .

Además, si se utilizan funciones interpolantes continuas suficientemente diferenciables  $\hat{s}(x, z)$ , que coinciden en los nodos con la solución exacta del sistema discreto, y se trabaja como en 4.5.2, la ecuación modificada de transporte de sedimento es (Warming y Hyett 1974):

$$\mathcal{L}_s^{\text{red}}(\hat{s}) = \frac{U' \Delta x}{6} \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial x^2} \quad (4.52)$$

donde el desarrollo se hizo hasta el segundo orden de derivación y se eliminó la derivada cruzada por derivación de (4.50). El resultado (4.52) implica que el método numérico introduce una difusión numérica

$$v'_{\text{num}} = \frac{U' \Delta x}{6} \quad (4.53)$$

en el sentido de marcha, de forma similar a (4.38) para el caso de las ECM. Nuevamente el esquema es numéricamente estable en el sentido de que  $v'_{\text{num}} > 0$  (Hirt 1968).

Ya que  $\theta \ll 1$ , resulta  $U \approx U$  y (4.53) es formalmente equivalente a (4.38). Luego, el resultado (4.40) se puede generalizar al transporte de sedimento. Sin embargo, y de acuerdo a lo mencionado en 4.5.3, la condición elemental (4.40) se puede ver modificada si existen variaciones significativas del flujo en escalas longitudinales menores que  $L$  (definida en el Capítulo 2).

Por ejemplo, sobre el frente de crecimiento de un delta sumergido la pendiente del fondo cambia rápidamente respecto de la existente aguas arriba de ese punto, produciendo una expansión local de las líneas de corriente. Como dicho punto constituye la zona más activa del depósito, la concentración de sedimento cambia significativamente sobre una escala longitudinal,  $L_s$ , más pequeña que la global, es decir  $L_s < L$ . Entonces, la relación entre los términos de difusión numérica longitudinal y difusión física vertical es

$$\frac{v'_{\text{num}} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}}{v_{\text{tz}} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}} \approx \frac{U' \Delta x}{6 v_{\text{tz}}} \frac{h^2}{L_s^2} \approx \frac{1}{6} \frac{\Delta x}{h} \alpha'^2 Re \quad (4.54)$$

con  $\alpha' \equiv h/L_s$ . En la medida en que  $L_s < L$  y  $\Delta x$  sea suficientemente grande, el efecto de la difusión artificial se puede llegar a reflejar en las soluciones en la zona mencionada. Por ejemplo, la figura 4.5 muestra el proceso de convergencia en la formación de un delta sumergido, al disminuir el tamaño de los elementos. Cuanto mayor es el paso horizontal de discretización más tendido se muestra el depósito en la zona del frente.

## 4.7 OTROS ASPECTOS NUMÉRICOS

### 4.7.1 Superficie libre

La ecuación (2.52) retiene el carácter elíptico del problema original, asociado a la presión. En condiciones normales para el problema de flujo embalsado, (2.52) transmite información desde aguas abajo hacia aguas arriba, lo cual requiere un método de resolución numérico diferente al utilizado en las ecuaciones de Navier-Stokes parabolizadas.

Específicamente, dicha información da lugar a la forma de la superficie libre. En este caso se la modela a través de (2.67), la cual se resuelve mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 (Burden 1985). En general, resulta suficiente tomar como paso de cálculo el paso horizontal correspondiente a la red de elementos finitos (ver 4.7.2). Esto, además, evita transferir información entre mallas.

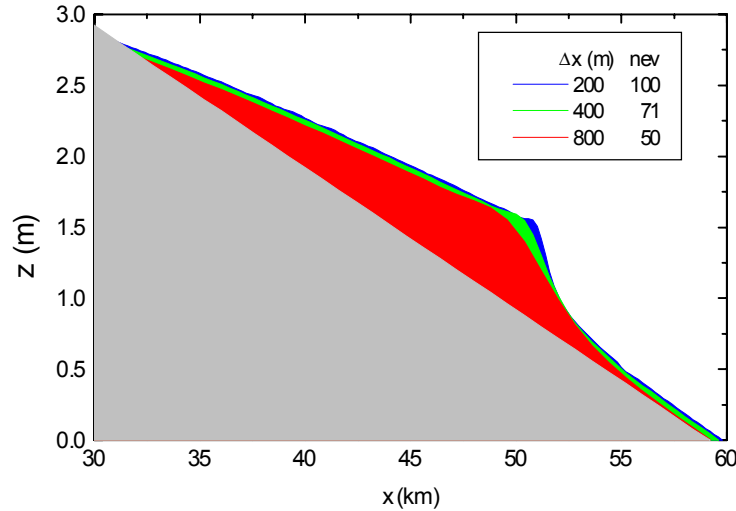


Figura 4.5 – Convergencia en la formación de un delta sumergido.

Datos:  $\theta=10^{-4}$ ,  $h(x=0,t)=3$  m,  $h(x=L=60\text{km},t)=3.65$  m,  $B(x=0)=B(x=30\text{km})=1$  km,  $B(x=L=60\text{km})=2$  km,  $U=0.82$  m/s; arena de  $1000 \mu\text{m}$  y  $\pi=0.6$ ; perfiles a  $t=20$  años.

#### 4.7.2 Red de elementos finitos

De acuerdo a lo señalado en 4.3.1, se utiliza una red estructurada de elementos finitos, con la distribución de elementos según la esquematización de la figura 4.1. La malla se adapta a la forma de la superficie libre y el fondo deformando su estructura vertical, pero manteniendo la propiedad de paralelismo entre las secciones de cálculo (lados verticales), de acuerdo al esquema de la figura 4.6.

La relación de aspecto de los elementos debe reflejar la gran diferencia entre las escalas de longitud horizontal (debida a la advección) y vertical (debida a la difusión). De hecho, en un intervalo de tiempo  $\tau$  la longitud de advección longitudinal es  $\lambda_x \approx U\tau$  mientras que la longitud de difusión vertical es  $\lambda_z \approx (\nu_{tz}\tau)^{1/2}$ . Eliminando el tiempo arbitrario  $\tau$ , la razón de longitudes es:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_z} \approx \left( \frac{U \lambda_x}{\nu_{tz}} \right)^{1/2} \equiv \text{Re}_x^{1/2} \quad (4.55)$$

donde el número de Reynolds horizontal es en general muy grande. Entonces, asociando  $\lambda_x$  y  $\lambda_z$  con los pasos horizontal ( $\Delta x$ ) y vertical ( $\Delta z$ ), respectivamente, una vez que  $\Delta x$  es fijado (basado en la escala de longitud horizontal) el orden de la relación de aspecto de los elementos finitos puede ser estimada a través de (4.55).

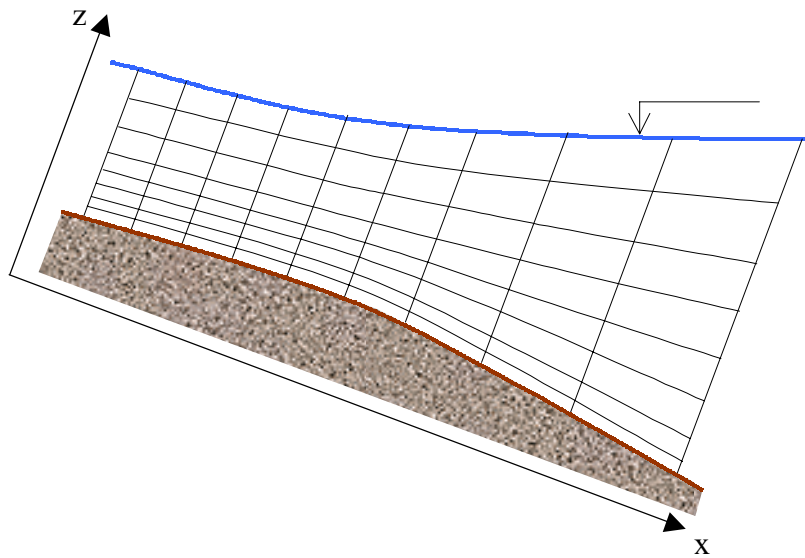


Figura 4.6 – Esquema de la red mostrando la distribución de elementos finitos.

Cuando el proceso de sedimentación comienza, la red se adapta a las sucesivas formas de la superficie libre y el fondo, regenerándose en cada paso de tiempo.

De hecho, la relación anterior se emplea para determinar una cota para la máxima altura de los elementos, de forma tal que una partícula advectada entre dos secciones de cálculo consecutivas pueda ser difundida entre la base y el tope del elemento. Luego, el paso vertical se elige inferior a esta cota.

Adicionalmente, la malla se construye permitiendo una densificación donde los gradientes de velocidad son importantes. Para ello se aplica la siguiente fórmula para la coordenada  $z$  del  $k$ -ésimo nodo:

$$z_k = \frac{1}{f_d} (\Delta^{(k-1)/2} - 1) + z_b \quad k = 1, \dots, \text{nnv} \quad (4.56)$$

con

$$\Delta = (1 + f_d (h + z_f - z_b)) \left( \frac{2}{\text{nnv} - 1} \right) \quad (4.57)$$

donde  $z_b$  se define de acuerdo a (2.74) (o, eventualmente, (2.75)), siendo  $\text{nnv}$  el número de nodos en la vertical y  $f_d$  el factor de densificación, con el cual se controla la distribución.

La estructura vertical de la malla está virtualmente dividida en dos sectores, ya que las condiciones de borde para los campos hidrodinámicos y de concentración no coinciden en el mismo punto del fondo. Las distintas posiciones dependen del tipo de condición de contorno

utilizada para la velocidad (que definen si se resuelve o no la subcapa interna), y del modelo empleado para estimar la concentración de equilibrio en el caso de transporte de arena.

La división implícita de la distribución de los elementos finitos en la vertical se produce en el fondo virtual de intercambio de partículas, y está esquematizada en la figura 4.7 para un caso genérico. Como  $z_{bs} \geq z_b$ , existe una zona intermedia (de espesor  $z_{bs} - z_b = \delta_{bs} - z_0$ ) donde solamente se calculan las variables hidrodinámicas.

La cantidad de elementos dentro de la capa virtual comprendida entre  $z_b$  y  $z_{bs}$  depende principalmente de la densificación requerida para determinar con precisión la tensión efectiva en el lecho (ver 4.7.3 a continuación).

Finalmente, una virtud adicional del esquema reside en que, debido a su carácter parabólico, no resulta necesario el intercambio de información entre las mallas de cálculo de dos pasos de tiempo consecutivos, lo cual evita un problema en sí mismo (Cebral y Lohner 1998).

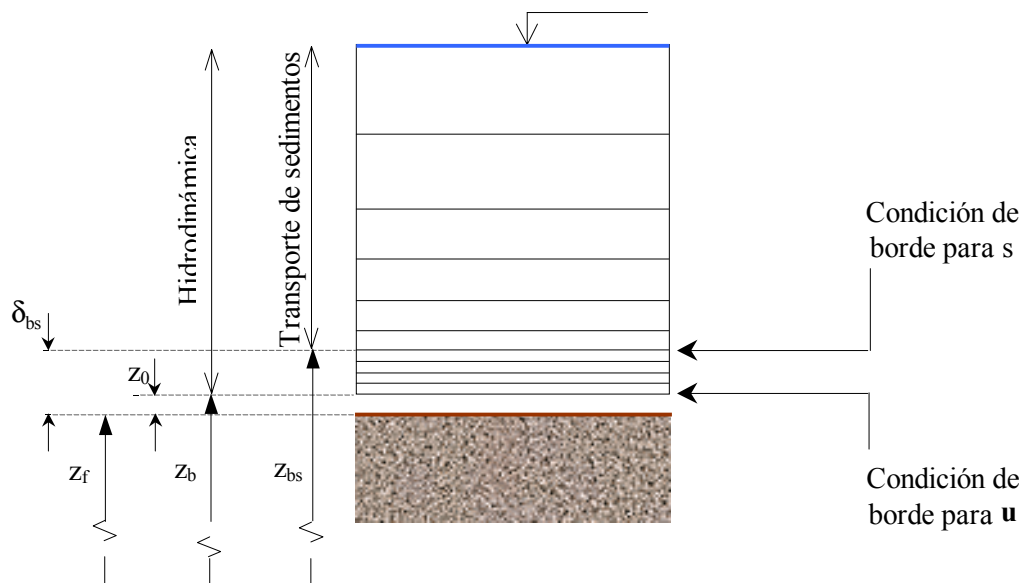


Figura 4.7 – Esquema de la división de la red para cálculo hidrodinámico y de transporte de sedimentos.

### 4.7.3 Tensión efectiva en el lecho

La distribución vertical de tensiones es, de acuerdo a (2.69),

$$\tau = \rho v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.58)$$

Utilizando (2.71) para la viscosidad de torbellino

$$v_{tz} = k|\mathbf{u}_*|(z - z_f) \left(1 - \frac{(z - z_f)}{h}\right) \quad (4.59)$$

y el perfil logarítmico de equilibrio de von Karman

$$\mathbf{u}^{eq} = \frac{\mathbf{u}_*^{eq}}{k} \ln \left( \frac{z - z_f}{z_0} \right) \quad (4.60)$$

donde  $\mathbf{u}_*^{eq}$  es la velocidad de corte de equilibrio local, la expresión (4.58) adopta la siguiente forma para la distribución de tensiones (de equilibrio local):

$$\tau^{eq} = -\rho|\mathbf{u}_*^{eq}|\mathbf{u}_*^{eq} \left(1 - \frac{(z - z_f)}{h}\right) \quad (4.61)$$

Por lo tanto, en condiciones de equilibrio local la tensión en el punto donde se anula la velocidad es:

$$\tau_b^{eq} \equiv -\rho|\tilde{\mathbf{u}}_*^{eq}|\tilde{\mathbf{u}}_*^{eq} = -\rho|\mathbf{u}_*^{eq}|\mathbf{u}_*^{eq} \left(1 - \frac{z_0}{h}\right) \quad (4.62)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}}_*^{eq}$  es la velocidad de corte de equilibrio “corregida”:

$$\tilde{\mathbf{u}}_*^{eq} \equiv \mathbf{u}_*^{eq} \left(1 - \frac{z_0}{h}\right)^{1/2} \quad (4.63)$$

definida así por consistencia con (2.72).

Fuera del equilibrio, en lugar de (4.62) se debe aplicar

$$\tau_b \equiv -\rho|\tilde{\mathbf{u}}_*|\tilde{\mathbf{u}}_* = -\rho v_{tz} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_b \quad (4.64)$$

donde  $v_{tz} = v_{tz}(\mathbf{u}_*, z)$ , y para determinar la tensión de corte en el fondo se utiliza la siguiente adaptación del método de Jin y Kranenburg (1993).

Si se acepta que entre  $z=z_b$  y  $z=z_2$  (definida de acuerdo a (4.56)) es válida la ley logarítmica (lo que sigue se puede generalizar sin inconvenientes para alguna variante en el perfil de velocidades), entonces

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_{*,0}}{k} \ln\left(\frac{z - z_f}{z_0}\right) \quad z_b \leq z \leq z_2 \quad (4.65)$$

donde  $\mathbf{u}_{*,0}$  es un parámetro relacionado con la distribución de velocidad cerca del fondo, y se verifica la condición de contorno  $\mathbf{u}(z_b) = 0$ . En particular, el gradiente de velocidad en el nodo inferior de la red ( $k=1$  en (4.56)) vale:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|_b = \frac{\mathbf{u}_{*,0}}{kz_0} \quad (4.66)$$

y la velocidad en el primer nodo de cálculo ( $k=2$  en (4.56)) es:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_{*,0}}{k} \ln\left(\frac{z_2 - z_f}{z_0}\right) \quad (4.67)$$

Eliminando  $\mathbf{u}_{*,0}$  entre (4.66) y (4.67) y utilizando (4.64) se puede determinar la velocidad de corte mediante

$$\left| \mathbf{u}_* \right| \mathbf{u}_* - \frac{v(\mathbf{u}_*, z_b)}{\left(1 - \frac{z_0}{h}\right) z_0 \ln\left(\frac{z_2 - z_f}{z_0}\right)} \mathbf{u}_2 = 0 \quad (4.68)$$

donde se usó en forma explícita que, por compatibilidad con el caso de equilibrio local,

$$\tilde{\mathbf{u}}_* \equiv \mathbf{u}_* \left(1 - \frac{z_0}{h}\right)^{1/2} \quad (4.69)$$

Obsérvese que (4.68) es válida independientemente del modelo de turbulencia utilizado para determinar la viscosidad de torbellino y, para el modelo particular utilizado en este trabajo, se reduce a:

$$\mathbf{u}_* = \frac{k}{\ln\left(\frac{z_2 - z_f}{z_0}\right)} \mathbf{u}_2 \quad (4.70)$$

En la práctica, el esquema de cálculo funciona del siguiente modo:

1. Se impone como condición de contorno  $\mathbf{u}(z_b) = \mathbf{u}(z_1) = 0$

2. Dada  $v_{tz} = v_{tz}(\mathbf{u}_*, z)$ , se resuelve el campo de velocidades y se obtiene el valor de  $\mathbf{u}_2$ , correspondiente a la velocidad del primer nodo incógnita que está ubicado en la red por encima del nodo del borde (donde se prescribe la velocidad nula)
3. A partir de (4.70) se determina  $\mathbf{u}_*$  y, con (4.64) y (4.69), la tensión de corte en el fondo.
4. Debido a la dependencia funcional de  $v_{tz} = v_{tz}(\mathbf{u}_*, z)$  con  $\mathbf{u}_*$  se debe realizar un proceso iterativo, esto es, se repiten los pasos anteriores hasta obtener la convergencia.

Como esta metodología implica resolver la capa límite hidrodinámica en el fondo, se requiere una fuerte densificación allí, de acuerdo a lo mencionado en 4.7.2. Para mostrar esta necesidad, se calculó un caso extremo donde la velocidad media de flujo es elevada ( $U=2.9$  m/s) y la rugosidad efectiva es muy pequeña ( $k_s=3 \cdot 10^{-6}$  m, correspondiente a una superficie plana metálica), de forma tal que la capa límite se desarrolla rápidamente en una zona muy cercana al fondo. Considerando una situación de equilibrio local, con pendiente  $\theta=10$  cm/km y profundidad  $h=5$  m, la figura 4.8 muestra los resultados obtenidos con un paso  $\Delta x=100$  m, 50 elementos finitos en la vertical y distintos factores de densificación.

Sólo se aprecian diferencias significativas globales en el caso (a) de la figura mencionada, donde no se representa correctamente el perfil de velocidades.

La figura anterior muestra la posibilidad de representar el perfil medio en la capa interna completa. Nótese que, para mejorar el resultado de (a), no se debieron agregar elementos finitos en la vertical, sino sólo redistribuirlos de manera de capturar los gradientes cerca del lecho. Esto implica que no se ha modificado el número de grados de libertad del sistema. Además, el proceso iterativo para obtener la velocidad de corte se puede incluirse en el de los términos advectivos, por lo cual no hay un aumento significativo del tiempo de cálculo.

Sin embargo, si la densificación creciente en la zona del fondo provoca una representación pobre cerca de la superficie libre, se debe aumentar el número de elementos.

#### 4.7.4 Paso de tiempo

Para determinar el paso de discretización temporal se tienen en cuenta tres escalas, asociadas a los siguientes mecanismos:

- ♦ Las excitaciones hidrológicas externas
- ♦ La operación del reservorio
- ♦ La evolución morfológica del lecho

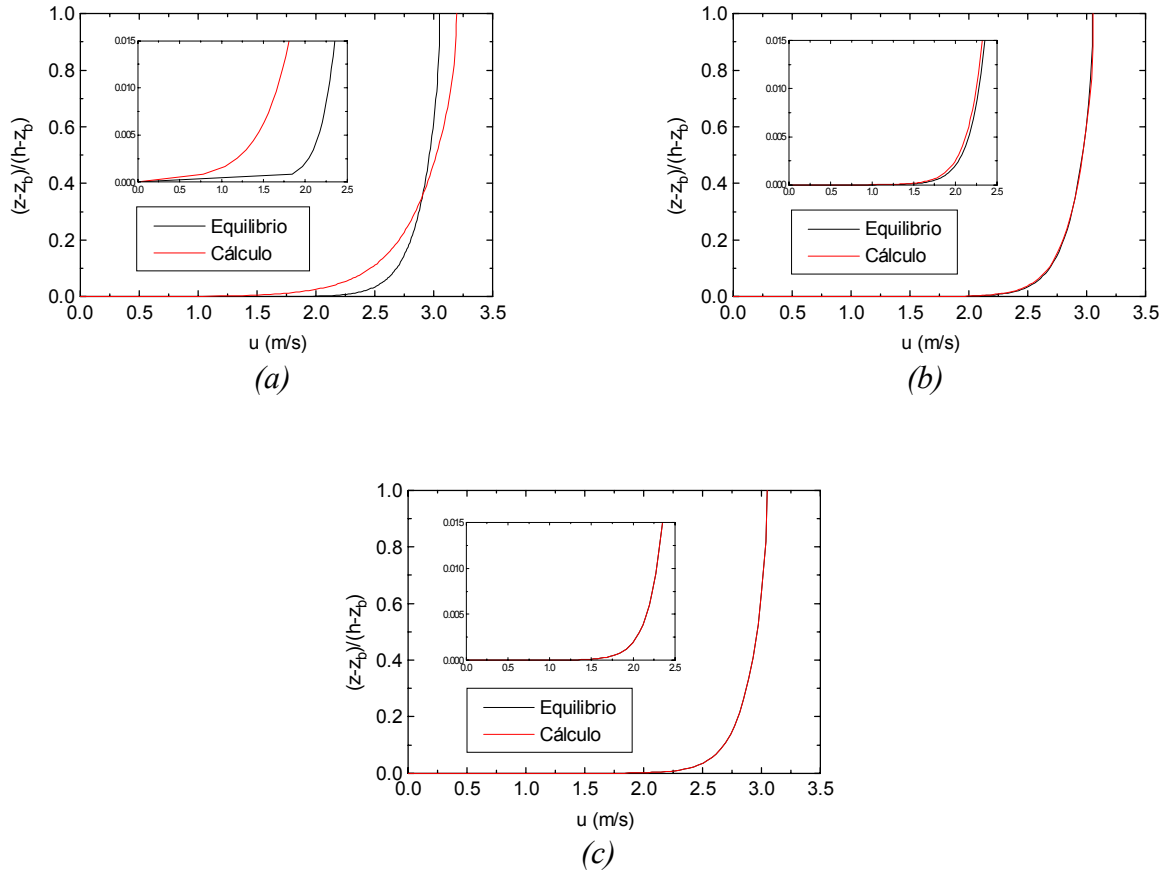


Figura 4.8 – Perfiles de velocidad obtenidos con la metodología de cálculo para la tensión de corte en el fondo. (a)  $f_d = 10$ , (b)  $f_d = 10^5$ , (c)  $f_d = 10^9$ . En los recuadros internos se muestra el detalle de los perfiles en las inmediaciones del fondo.

El paso de tiempo se elige de forma tal que la menor de ellas quede representada correctamente. Una vez determinado, durante ese lapso las condiciones hidrodinámicas se mantienen constantes, en concordancia con la aproximación cuasiestacionaria.

Para los primeros dos casos recién citados resulta suficiente dividir la escala de tiempo, conocida de antemano, en un número razonable de intervalos. El tercer caso, en cambio, depende de la propia solución del problema, ya que la velocidad de cambio de la altura del fondo no se conoce a priori. En general, en la literatura se encuentran condiciones como la siguiente para determinar el paso de tiempo,  $\Delta t$ , en función de los cambios locales del lecho:

$$\Delta t \quad \text{tq} \quad |\Delta z_f(x)| \cong \left| \frac{dz_f}{dt} \right| \Delta t \leq \alpha_{\text{tol}} h(x) \quad \forall \quad x \quad (4.71)$$

donde  $\Delta z_f$  es la variación en la coordenada  $z$  del fondo durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ ,  $dz_f/dt$  la tasa de erosión/sedimentación y  $0 < \alpha_{\text{tol}} < 1$  un coeficiente de tolerancia fijado a priori. Por

ejemplo, Olsen (1991) trabaja con  $\alpha_{tol}=0.1$ , es decir, considera que la hidrodinámica permanece inalterada hasta que las variaciones topográficas son del orden del 10% de la profundidad.

Si bien en este trabajo se utiliza la relación (4.71), se ha observado que la elección de  $\alpha_{tol}$  está relacionada con la estabilidad del lecho. Para mostrarlo se consideró el caso de un lecho estable, correspondiente a un canal de pendiente y sección uniformes, sometido a régimen permanente, al que se le aplicó una perturbación local en la entrada del modelo en el instante inicial, consistente en una duna artificial de forma triangular. La figura 4.9 muestra la perturbación utilizada, los datos de entrada y la evolución posterior del lecho si se utiliza  $\alpha_{tol}=0.1$ . Se observa que la perturbación crece y se desarrolla una onda de arena que viaja hacia aguas abajo. Como la concentración de arena a la entrada es baja (12 mg/l) y la perturbación inicial de pequeña amplitud (en comparación con la profundidad), la tasa de modificación del lecho resulta lo suficientemente pequeña como para que el primer paso de tiempo alcance los 5.4 años, valor para el cual se produce una modificación máxima del fondo equivalente al 10% de la profundidad.

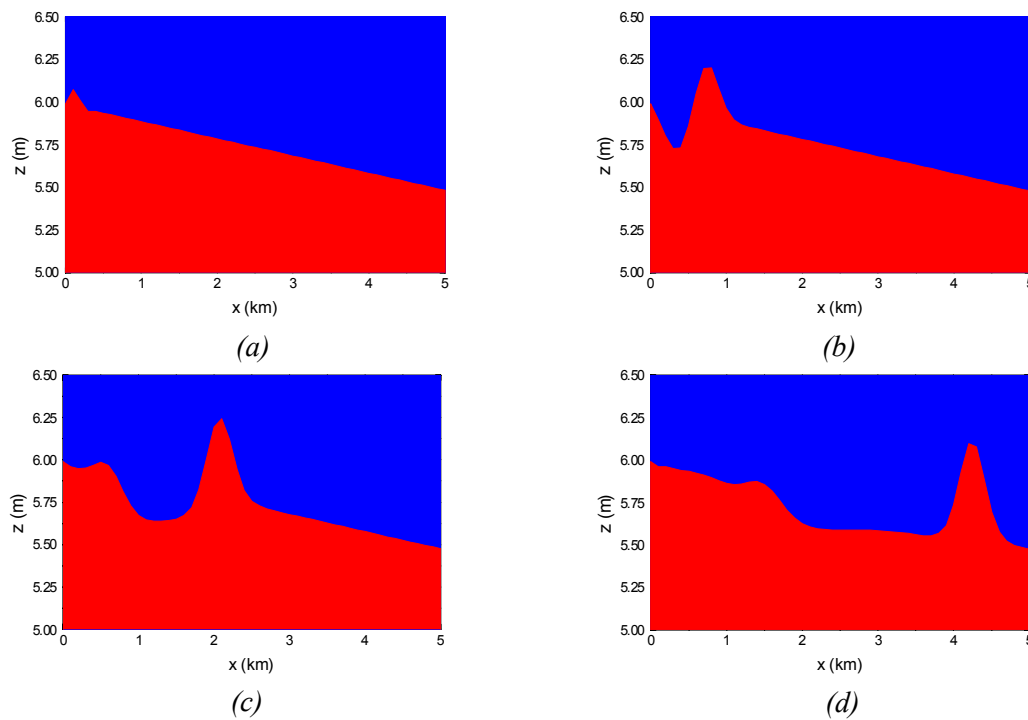


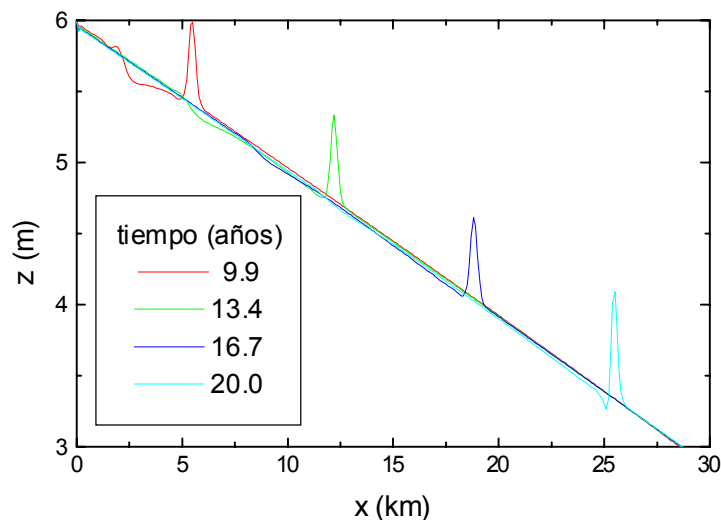
Figura 4.9 – Evolución de una perturbación artificial de 6 cm de altura y 200 m de extensión para  $t=0$  (a),  $t=7.11$  años (b),  $t=8.10$  años (c) y  $t=9.35$  años (d). Datos:  $\theta=10^{-4}$ ,  $h=3$  m,  $U=0.82$  m/s; arena de  $1000 \mu m$  y  $\pi=0.6$ ;  $\Delta x=100$  m,  $ne_v=50$ ,  $\alpha_{tol}=0.1$ .

El pulso inicial de la onda, que es lo único que sobrevive, tiende a alcanzar una forma de equilibrio que se desplaza a una celeridad uniforme, de acuerdo a lo mostrado en la figura 4.10. Su amplitud es de unos 60 cm, que podrían corresponder a una duna natural, pero su extensión es del orden de 1 km.

Como el lecho original es estable, la pequeña perturbación debería evolucionar de forma tal de disminuir su amplitud y desaparecer. Entonces, el comportamiento observado es artificial, y tiene su origen en la utilización de pasos de tiempo excesivamente grandes. Para comprobarlo basta repetir el ensayo anterior con valores de  $\alpha_{tol}$  inferiores, de acuerdo a lo presentado en la figura 4.11. Obsérvese que si  $\alpha_{tol}=0.05$  la perturbación aparece algo más retrasada pero con una amplitud mucho menor. En el caso  $\alpha_{tol}=0.01$  la misma ha desaparecido completamente.

La aparición de ondas artificiales de arena no se reduce a la implantación de perturbaciones, sino que también se puede producir durante la simulación de un caso real. Por ejemplo, la figura 4.12 muestra un caso utilizando las mismas condiciones que en los ensayos anteriores pero embalsando el río aguas abajo, de forma tal que aparezca un delta. Utilizando  $\alpha_{tol}=0.05$  se observa que en la cola se generan inestabilidades que luego se propagan sobre la superficie del delta.

De esta forma, y en base a distintos ensayos realizados, se determinó que el valor óptimo para el coeficiente de tolerancia es  $\alpha_{tol}=0.01$ , aunque en algunos casos valores algo superiores pueden ser utilizados.



*Figura 4.10 – Evolución de una perturbación en el caso de un paso temporal excesivo.*

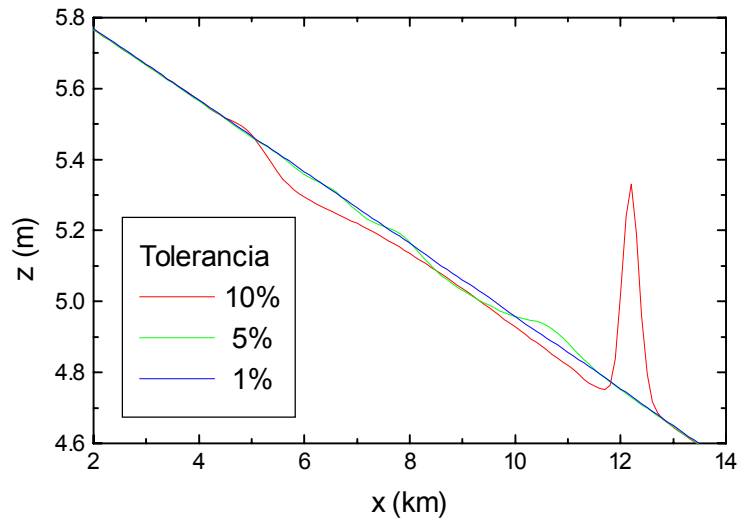


Figura 4.11 – Evolución de una perturbación para distintas tolerancias en la determinación del paso temporal. Se muestra la situación para  $t=13.4$  años.

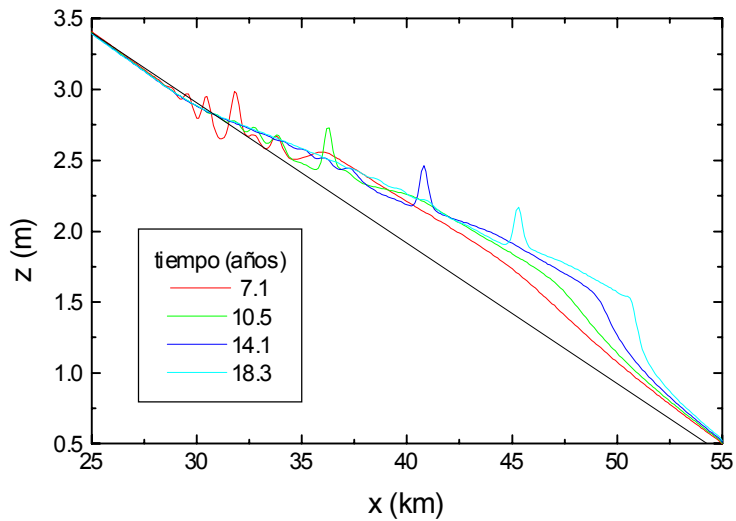


Figura 4.12 – Evolución del lecho de un reservorio con  $\alpha_{tol}=0.05$ .

#### 4.7.5 Conservación de la masa

Bajo las hipótesis de trabajo, y suponiendo por simplicidad que no existen aportes laterales de agua, el caudal es una constante de movimiento

$$Q \equiv Q(x) = \int_{z_0(x)}^{\zeta(x)} B u \, dz = \text{constante} \quad (4.72)$$

Sin embargo, durante el proceso iterativo descrito en 4.3.3 se observó que el esquema numérico produce soluciones intermedias  $^{(n)}u$  que no satisfacen (4.72), es decir,

$$^{(n)}Q \equiv ^{(n)}Q(x) = \int_{z_0(x)}^{\zeta(x)} B ^{(n)}u \, dz \neq Q \quad (4.73)$$

La diferencia obedece a una perturbación numérica (artificial),  $\delta u$ , que el esquema produce sobre el perfil verdadero de velocidades, de modo que

$$Q = \int_{z_0(x)}^{\zeta(x)} B (^{(n)}u + ^{(n)}\delta u) \, dz = ^{(n)}Q + \int_{z_0(x)}^{\zeta(x)} B ^{(n)}\delta u \, dz \quad (4.74)$$

Para compensar este efecto numérico y asegurar la conservación de la masa de agua, se define la siguiente corrección empírica de la velocidad:

$$^{(n)}\delta u = ^{(n)}u \left( \frac{Q - ^{(n)}Q}{^{(n)}Q} \right) \quad (4.75)$$

la cual se adiciona a  $^{(n)}u$  en cada iteración:

$$^{(n)}u \rightarrow ^{(n)}u + ^{(n)}\delta u \quad (4.76)$$

Esta técnica heurística produce no solo la conservación estricta del caudal, sino también aceleración de la convergencia dentro del proceso iterativo de punto fijo.

#### 4.7.6 Efectos de la rugosidad del fondo

De acuerdo a lo señalado en los Capítulos 3 y 4, el efecto de la rugosidad efectiva en el lecho sobre el perfil de velocidades se incorpora en el modelo hidrodinámico a través del cálculo de la altura  $z_b$ , donde se impone la condición de contorno en el fondo para la velocidad (ver 2.9.4).

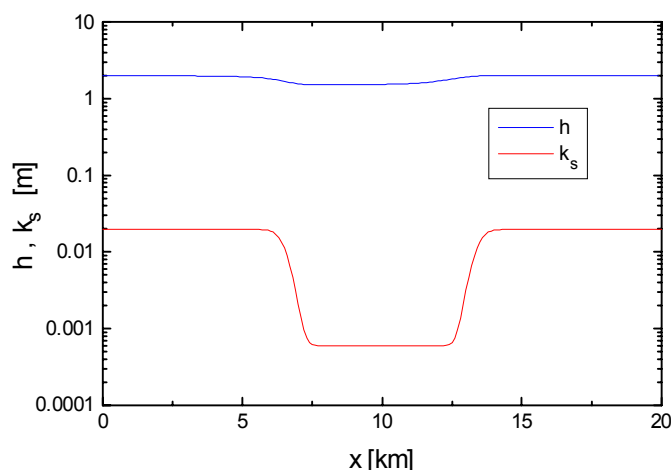
Para analizar la adaptación de la tensión de corte a cambios en la rugosidad, en función de que la tensión efectiva en el lecho es un grado de libertad del problema, se realizó el ensayo numérico que se presenta a continuación.

Se estudió el caso en que se resuelve la subcapa interna, utilizando (2.74), en un canal prismático de pendiente media (50 cm/km) y ancho (100 m) uniformes. Se consideraron condiciones de equilibrio local en la entrada del tramo de cálculo y una profundidad de 2 m a la salida.

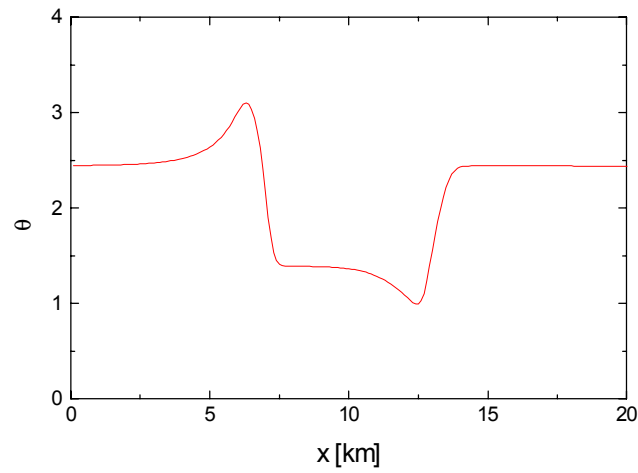
El lecho se lo consideró cubierto por arena fina ( $\delta=200 \mu\text{m}$ ), pero artificialmente se supuso que el primer y tercer tercio del tramo de estudio (de 20 km de longitud) estaban cubiertos por formas con altura media uniforme de 2 cm. La figura 4.13 presenta la rugosidad efectiva del lecho (con la transición entre las diferentes zonas definida suavemente) y el resultado del cálculo de la superficie libre.

La figura 4.14 muestra el cálculo de la tensión total adimensional. Se observa un régimen inicial de equilibrio que cambia abruptamente con la variación de la rugosidad. El aumento inicial local de tensión se debe al cambio en la superficie libre. Luego, cuando la profundidad del segundo tercio del tramo de estudio es aproximadamente constante, la tensión cae por debajo del valor inicial (la velocidad media del flujo se ha incrementado). El resultado se puede explicar fácilmente en forma teórica, a partir de considerar que el caudal es una constante de movimiento y que localmente los perfiles de velocidad en esta zona y en la entrada están en equilibrio.

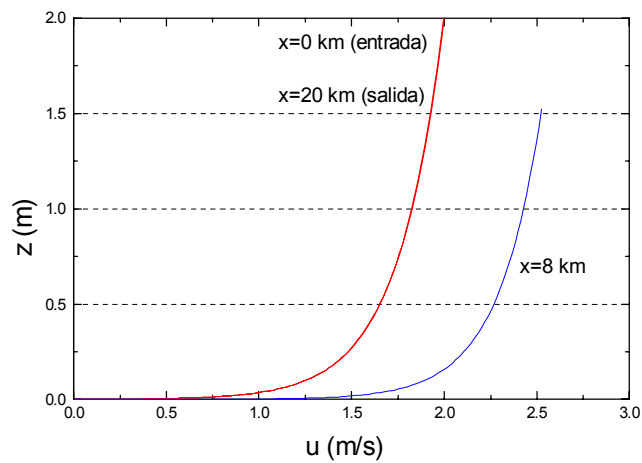
Se concluye que la tensión se adapta rápidamente a los cambios en la rugosidad. Resulta importante destacar que, al recuperarse (artificialmente) las condiciones de rugosidad de la entrada del modelo (en el tercer tercio del tramo de estudio), el modelo recupera exactamente el perfil de velocidad inicial (figura 4.15) y, por lo tanto, el valor de la tensión de equilibrio en la entrada (figura 4.14).



*Figura 4.13 – Rugosidad efectiva y profundidad para el ensayo numérico con rugosidad variable.*



*Figura 4.14 –Evolución de la tensión adimensional en el ensayo numérico con rugosidad variable.*



*Figura 4.15 – Perfiles verticales de velocidad en el ensayo numérico con rugosidad variable.*

## Capítulo 5

# VALIDACIÓN DEL MODELO

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Se realizó una validación global y una de detalle del modelo hidrosedimentológico planteado. La validación global consistió en comparar sus predicciones de sedimentación total con las provistas por los métodos empíricos.

Para la validación de detalle se requiere una base de datos que contenga relevamientos periódicos, incluyendo hidrograma, cota de embalse, caudal sólido, topografía, granulometría y propiedades físicas del sedimento. Como la evolución del lecho de un reservorio ocurre sobre escalas de tiempo del orden de los años a decenas de años, la existencia de bases de datos disponibles que contengan todas las variables mencionadas durante períodos extensos y continuos es sumamente reducida. Tal como se mencionó en el Capítulo 1, el caso informado públicamente con más detalle corresponde a la inspección del lago Mead realizada por Lara y Sanders (1970). En ese trabajo se pueden encontrar datos prácticamente continuos durante un período de unos 30 años. Una gran cantidad de muestras de fondo y enterradas han sido analizadas en detalle. Entonces, éste se eligió como caso de estudio.

Finalmente, se comparó la performance del presente modelo respecto del modelo unidimensional HEC-6, mencionado en el Capítulo 1 como el software de dominio público más conocido en el tema de transporte de sedimentos en lechos fluviales. A continuación se presentan las validaciones y comparaciones realizadas.

### 5.2 VALIDACIÓN GLOBAL

Como métodos empíricos de referencia se tomaron los de Brune y Churchill, materializados en curvas que surgen directamente de mediciones de campo (ver Capítulo 1). En ambos casos la sedimentación puede ser estimada en función de condiciones medias geométricas e hidráulicas.

La curva de eficiencia de atrape de Brune (figura 1.3) representa el porcentaje de sedimento entrante al reservorio que queda retenido en el mismo

$$\varepsilon_{\text{Brune}} = f_B\left(\frac{C}{\bar{Q}}\right) \quad (5.1)$$

y está dada en función de la relación entre la capacidad del reservorio,  $C$ , y el caudal medio anual entrante al mismo,  $\bar{Q}$ .

Por su parte, el método de Churchill presenta el porcentaje de sedimento entrante al reservorio que logra atravesarlo (figura 1.4)

$$100 - \varepsilon_{\text{Churchill}} = f_C\left(\frac{C}{qU}\right) \quad (5.2)$$

y en este caso viene dado en función del índice de sedimentación (el argumento de la función genérica  $f_C$  en (5.2)), obtenido de la capacidad del reservorio, el caudal medio diario entrante al mismo,  $q$ , y la velocidad media del flujo,  $U$ .

A los efectos de la validación se utilizaron las condiciones hidrosedimentológicas de un tramo del río Bermejo (Argentina) ubicado a la altura de la estación de aforo Puente Lavalle, a unos 260 km de la confluencia con el río Paraguay, entre las estaciones San Camilo y El Colorado (Brea et al. 1999). Los parámetros medios hidráulicos valen:

$$\begin{aligned} \theta &= 26 \text{ cm/km} \\ f &\equiv \frac{u_*}{U} = 0.11 \\ Fr &= 0.14 \end{aligned} \quad (5.3)$$

En la figura 5.1 se muestra una curva granulométrica representativa del material transportado por el río (Toniolo 1995). Se observa que sólo el material fino es relevante. De los aforos efectuados se concluye que la concentración media vertical es del orden de 8 000 mg/l (Toniolo 1995). Aunque este valor es superior al límite estimado en las hipótesis del Capítulo 1, para las simulaciones no se realizaron modificaciones sobre el coeficiente de difusión turbulenta (se reduciría en un 20 %) o la velocidad de caída de las partículas (se modificaría sólo en alrededor del 1 %).

Las simulaciones se realizaron en base a una geometría simplificada, consistente en un canal recto y prismático, de pendiente constante, que es embalsado y da lugar a un reservorio con la forma indicada en la figura 5.2. Variando la extensión del embalse y el ángulo de divergencia de sus márgenes,  $\beta$  (ver figura 5.2) se obtienen distintos reservorios, para cada uno de los cuales se determinó la fracción de sedimento que lograría atravesarlo inicialmente, es decir, antes que comience el proceso de sedimentación. La extensión máxima fue de 135 km, correspondiente a una profundidad de 25 m sobre la presa. La sección de entrada del emisario no se modificó, tomándose una profundidad de 6.03 m y un ancho uniforme de 208 m (valor

medio de los relevamientos). Como condiciones iniciales se utilizaron los perfiles de equilibrio local para las velocidades e hidrostático para la presión, mientras que la concentración de sedimento se consideró uniformemente distribuida en la vertical.

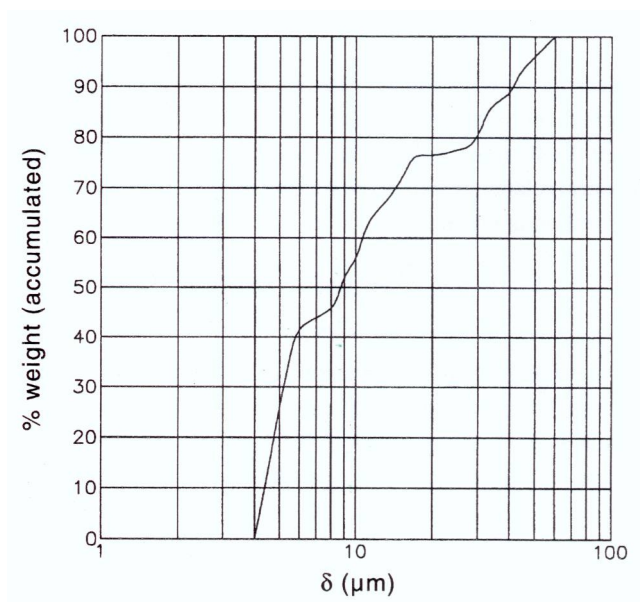


Figura 5.1 – Curva granulométrica representativa del material transportado por el río Bermejo.

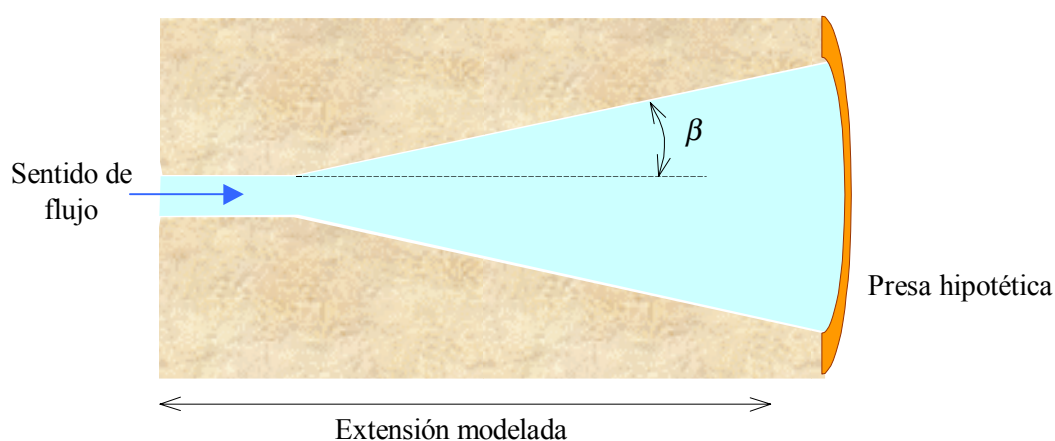


Figura 5.2 – Esquema de la geometría simplificada de un embalse utilizado para cuantificar la cantidad de sedimento pasante a través del mismo.

Se realizaron ensayos independientes para una serie de diámetros de partícula, dentro del rango de interés. La figura 5.3 presenta las curvas de Brune y los resultados del modelo para el caso  $\beta=4^\circ$  y diferentes longitudes del reservorio. Aunque algunos puntos caen dentro de la banda de resultados del método de Brune, se aprecian desviaciones significativas, especialmente para los granos más gruesos en el rango más alto de la relación capacidad-caudal entrante. Además, cuanto más grande es el tamaño de las partículas, más brusca resulta la transición entre un porcentaje bajo de atrape de sedimento y uno alto. Esto se debe a que la utilización de un valor fijo de la tensión de corte crítica de deposición de finos (en estos ensayos  $\tau_{dj}=0.07 \text{ N/m}^2$  para todas las fracciones) produce un cambio relativamente brusco entre condiciones de no deposición y sedimentación, y las partículas de mayor tamaño logran depositarse sobre escalas de longitud más cortas. En la medida en que se tengan en cuenta las variaciones temporales de las excitaciones del sistema, las curvas anteriores tenderán a suavizarse, como se infiere de los resultados de la validación de detalle (ver 5.3).

Ahora bien, las curvas empíricas en realidad representan situaciones asociadas a distribuciones extendidas de sedimento. Entonces, los cálculos fueron tomados como representativos de subrangos, y los resultados obtenidos se combinaron de acuerdo a su peso relativo dentro de la distribución (inferido de la figura 5.1) con el objeto de obtener la sedimentación neta. La figura 5.4 presenta los resultados combinados para tres ángulos de separación de márgenes distintos. Se observa una mejora apreciable del acuerdo con las curvas de Brune (asociada al peso relativamente bajo de las fracciones gruesas).

Se debe destacar que, empleando el modelo matemático, es posible establecer un orden dentro de la banda de resultados que surge de métodos como el de Brune. En efecto, la figura 5.4 muestra tres tendencias obtenidas a partir de la discriminación de los resultados del modelo según el ángulo de divergencia de las márgenes del reservorio.

Los mismos ensayos se contrastaron con el método de Churchill, y se presentan en las figuras 5.5 (partículas monodistribuidas) y 5.6 (pesado de acuerdo a la distribución de tamaños). De esta última se observa que los resultados caen alrededor de la curva de “sedimento fino”, lo cual resulta razonable en virtud de la distribución granulométrica utilizada. Para índices de sedimentación grandes el porcentaje de sedimento entrante que atraviesa el reservorio cae a cero, lo cual explica la tendencia de los resultados del modelo en esa zona de la figura 5.6. De este modo, se concluye que el acuerdo luce razonable.

Resulta interesante recalcar que, más allá de observarse un buen acuerdo con los métodos empíricos estudiados, cuando los resultados del modelo se presentan en esta forma integrada se pone de manifiesto cierta habilidad en discriminar tendencias dentro de, de otro modo, una nube dispersa de puntos.

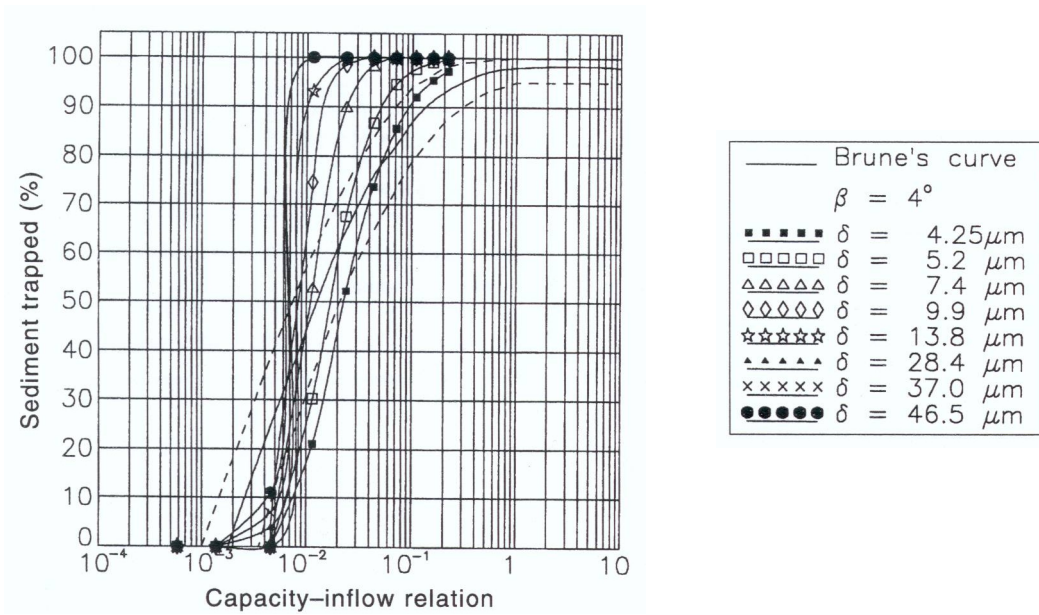


Figura 5.3 – Comparación entre la curva de Brune y los resultados para diferentes tamaños de partícula. Las líneas punteadas delimitan los datos de Brune para el caso de reservorios normalmente llenos.

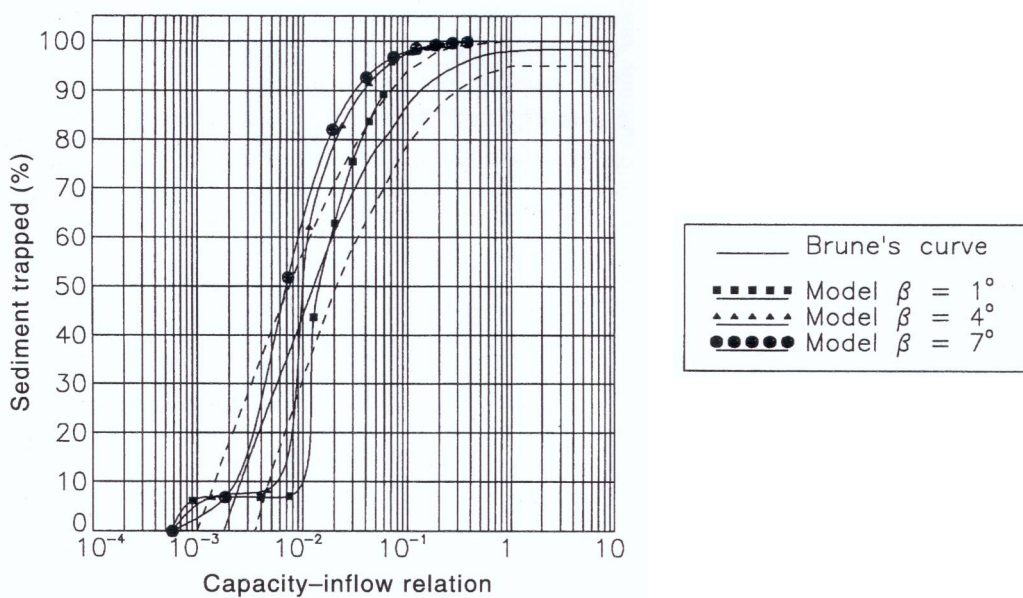


Figura 5.4 – Comparación entre la curva de Brune y los resultados para diferentes geometrías.

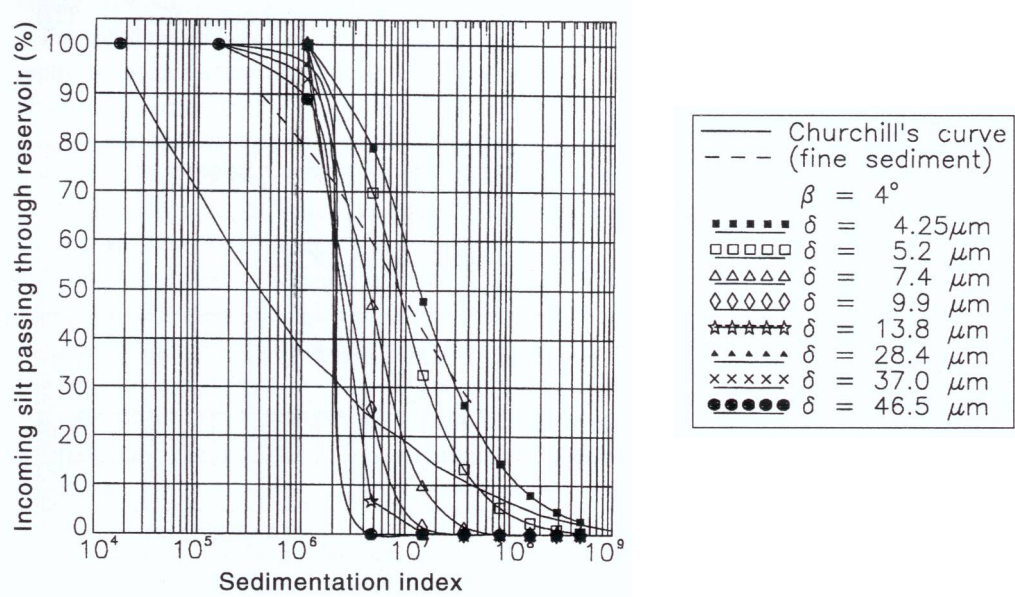


Figura 5.5 – Comparación entre las curvas de Churchill y los resultados para diferentes tamaños de partícula.

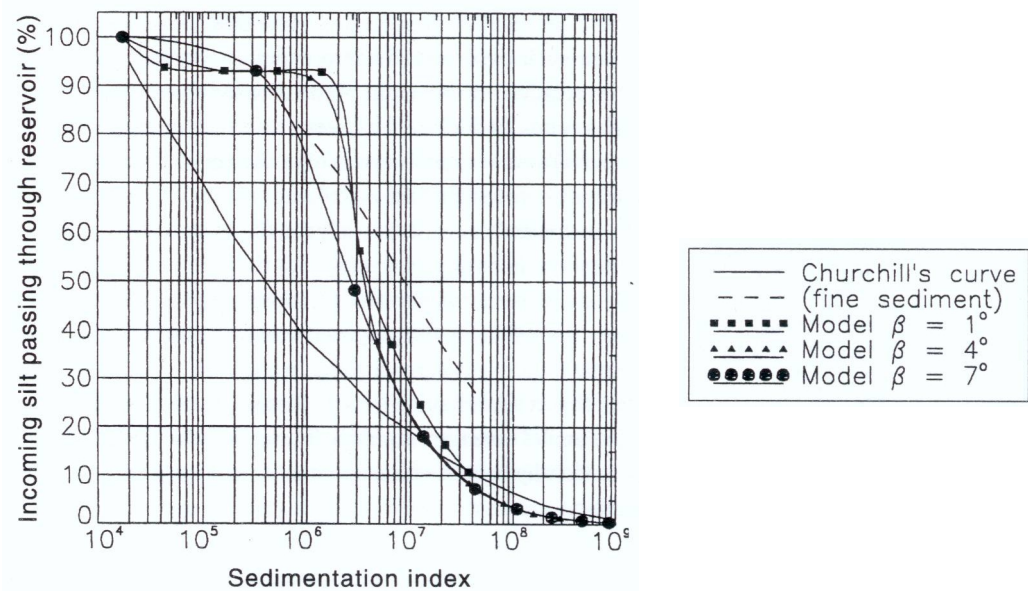


Figura 5.6 – Comparación entre las curvas de Churchill y los resultados para diferentes geometrías.

### **5.3 VALIDACIÓN DE DETALLE**

Ya se mencionó que la inspección del lago Mead de Lara y Sanders (1970) constituye, posiblemente, el más completo estudio de campo cuyo informe está disponible. Dicho informe es el resultado de varios años de análisis de los datos recogidos y reproduce una gran cantidad de características físicas y químicas del reservorio y sus sedimentos. Debido a su completitud, se lo ha adoptado como base de datos para validar el modelo desarrollado en este trabajo.

#### **5.3.1 Descripción general del lago Mead**

El lago Mead se encuentra en la frontera de los estados norteamericanos de Nevada y Arizona, de acuerdo a lo mostrado en la figura 5.7. Se trata de uno de los reservorios artificiales existentes sobre el río Colorado (figura 5.8), producto de la construcción de la presa Hoover en el año 1935 (ver figuras 5.8 y 5.9). El embalse se encuentra aguas abajo del parque nacional del Gran Cañón, y la presa se sitúa a unos 50 km al este de la ciudad de Las Vegas, sobre el Cañón Black (ver figura 5.8).

El río Colorado es el principal del sudoeste norteamericano, drenando una superficie de 620 000 km<sup>2</sup> a través de 7 estados, hasta desembocar en el Pacífico vía el golfo de California (figura 5.10).

En 1963 se cerró la presa del Cañón Glen, construida aguas arriba del Gran Cañón y a unos 600 km de la presa Hoover, dando lugar a la formación del lago Powell (ver figuras 5.8 y 5.9). Además de formar parte de un plan de manejo y regulación del río Colorado, uno de los objetivos principales de esta obra fue prevenir la colmatación del lago Mead. Entonces se llevó a cabo el relevamiento de 1963/64 sobre el lago Mead, para determinar la situación al momento del cierre de la nueva presa. Actualmente, la mayoría del material transportado por el río Colorado se deposita en el fondo del lago Powell.

El vaso del lago Mead es característico de un embalse de montaña. En la mayor parte de su recorrido está “encañonado” entre laderas de pendientes moderadas, según muestra la figura 5.11, identificándose fácilmente una dirección principal de escurrimiento.

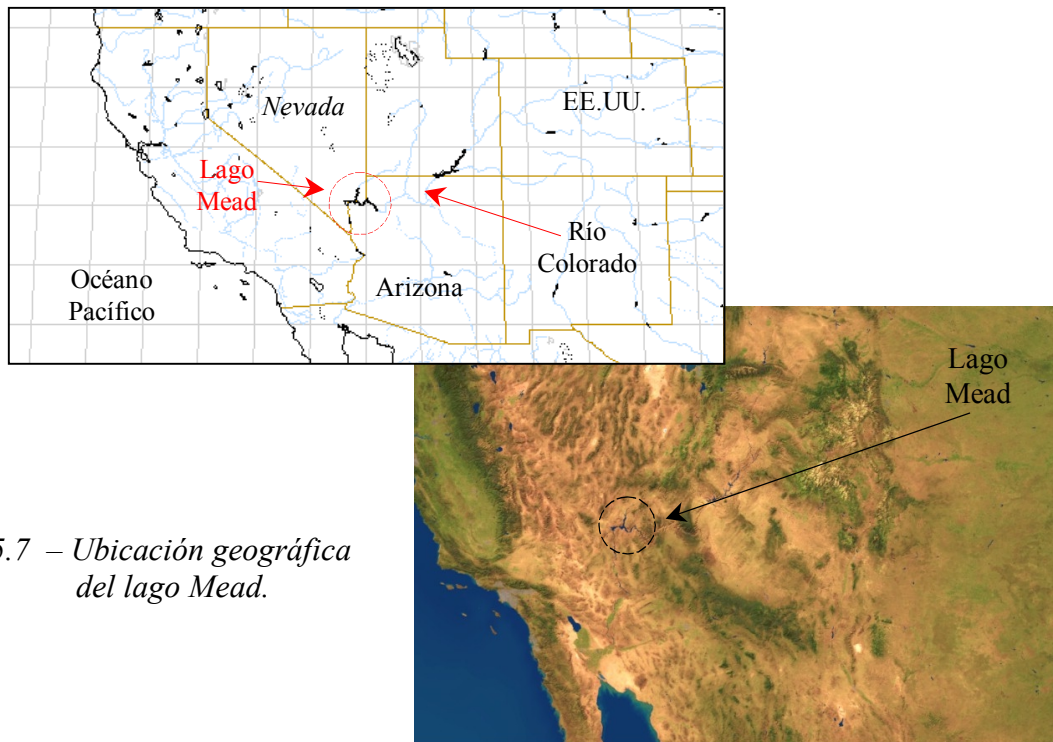


Figura 5.7 – Ubicación geográfica del lago Mead.

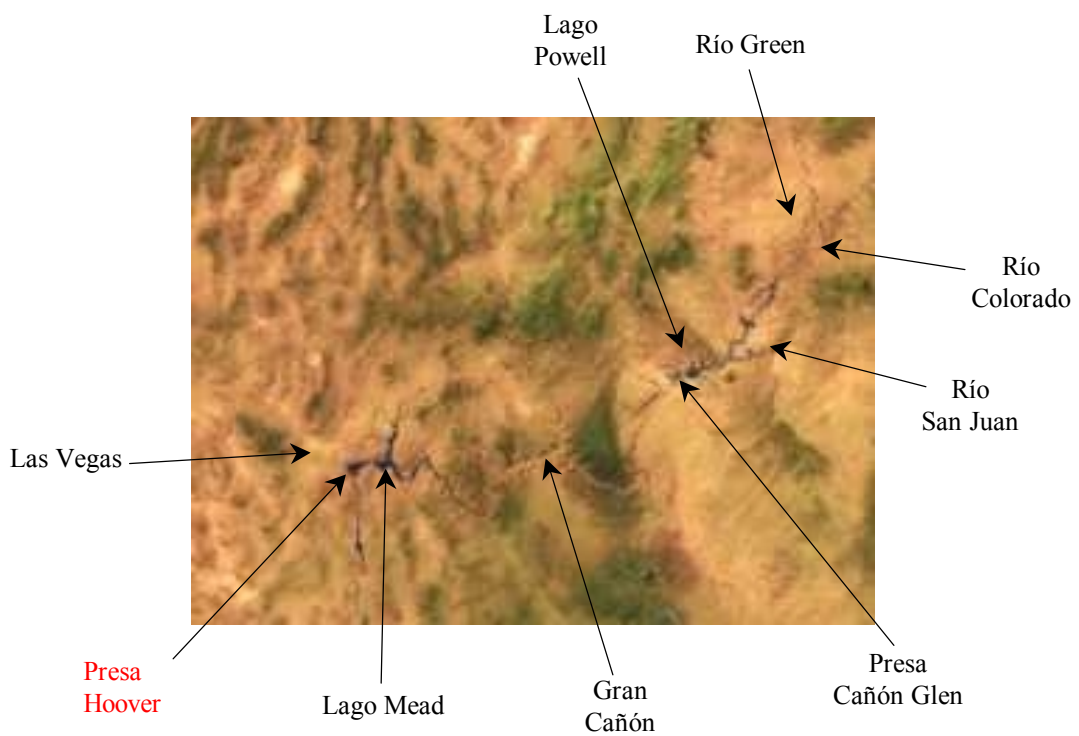
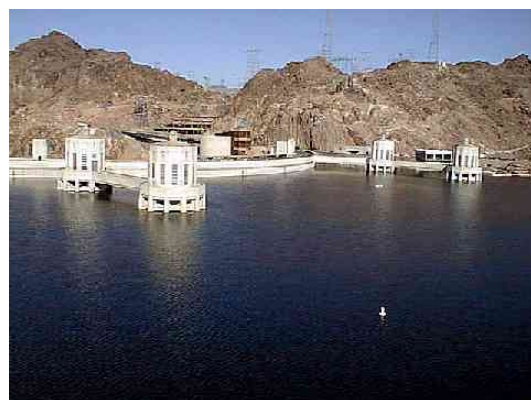
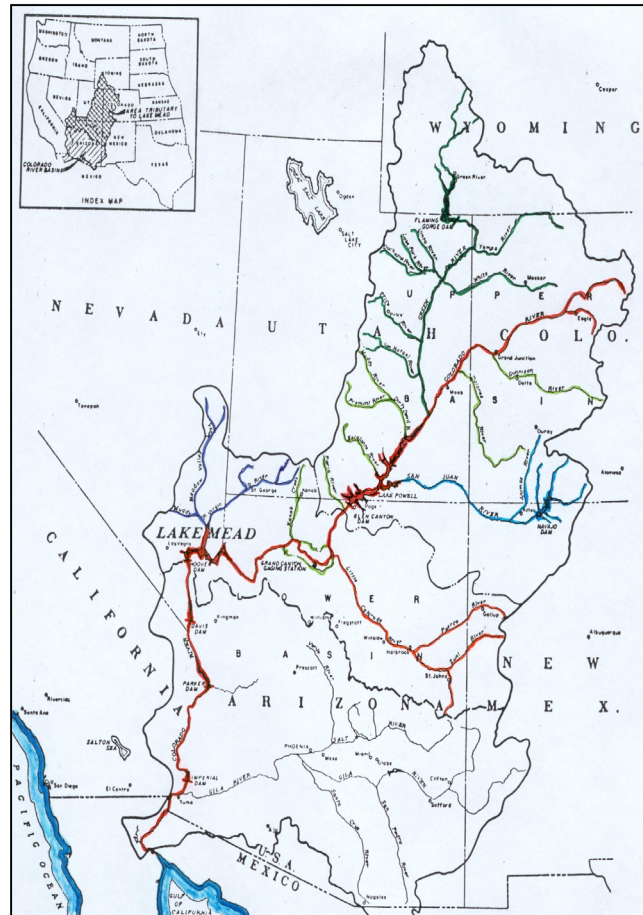


Figura 5.8 – Presas a lo largo del río Colorado.



*Figura 5.9 – Presa Hoover.  
Arriba: vista aérea de la presa sobre el cañón Black.  
Derecha: obras hidráulicas.*





*Figura 5.10 – Cuenca del río Colorado (EE.UU.).*



*Figura 5.11 – Topografía del lago Mead.*

### 5.3.2 Extensión del modelo y período simulado

El lago Mead está formado por dos brazos principales: el primero corresponde al valle del río Colorado (proveniente del estado de Arizona), mientras que el segundo, denominado brazo Overton, está formado por el embalse del río Virgin (que viene desde Nevada). La figura 5.12 muestra la forma del lago en su conjunto.

Si bien existen inspecciones batimétricas en ambos brazos, del Overton no se dispone de series históricas para las variables hidrológicas y sedimentológicas. Debido a esto es que se modeló el tramo de reservorio comprendido entre la boca del embalse (unos 3 km aguas arriba del cañón Bridge) y el encuentro de los dos brazos principales, según se muestra en la figura 5.12.

El tramo modelado tiene una longitud de 148 km, con un desnivel para la cota de fondo al año 1935 de 151.5 m. La pendiente media del tramo es de 1.02 m/km, mientras que en la boca del embalse alcanza a 1.89 m/km.

Para la evolución temporal se simuló el período comprendido entre el cierre de la presa, en 1935, y la inspección de 1963/4. La serie de datos cubre el período enero 1935 a diciembre 1964, es decir, 30 años.

### 5.3.3 Series temporales de datos

La base de datos cuenta con mediciones del caudal medio mensual a través del Gran Cañón. La figura 5.13 muestra los valores para el período 1935-1964. Se observa un ciclo anual con máximos en junio (entre 400 y 2.600 m<sup>3</sup>/s) y mínimos en diciembre/enero (menos de 100 m<sup>3</sup>/s). En la figura 5.14 se muestra un análisis de la serie de caudal, indicando que el 30% del tiempo el caudal es menor a 175 m<sup>3</sup>/s, y durante las dos terceras partes del tiempo es inferior a los 320 m<sup>3</sup>/s. El caudal supera los 1200 m<sup>3</sup>/s solamente el 10% del tiempo, y el valor medio para la serie completa es de 436 m<sup>3</sup>/s.

La figura 5.15 presenta el nivel de embalse para el período simulado. La serie muestra un transitorio del llenado del vaso de unos 3 ½ años, con una profundidad inicial en la presa de 50 m. Considerando la serie de 30 años, el rango de variación de nivel alcanza los 100 m. Para el período de régimen de operación del embalse (considerado desde enero de 1939) el nivel medio es de 354.3 msnm, oscilando entre los niveles 330.7 y 372.5msnm, es decir, una excursión máxima en todo el período de 41.8 m. La excursión anual del nivel de embalse oscila entre 10 y 20 m, aproximadamente.

La información hidrológica disponible incluye los caudales medios diarios máximo y mínimo para cada mes, el área del espejo de agua al final de cada mes, el volumen disponible al final de cada mes y la descarga media mensual de la presa Hoover.

También se informa la tasa media mensual de evaporación, con un promedio para el período 1952-1964 de  $33 \text{ m}^3/\text{s}$ . Los valores máximo y mínimo son de  $66$  y  $9 \text{ m}^3/\text{s}$ , respectivamente.

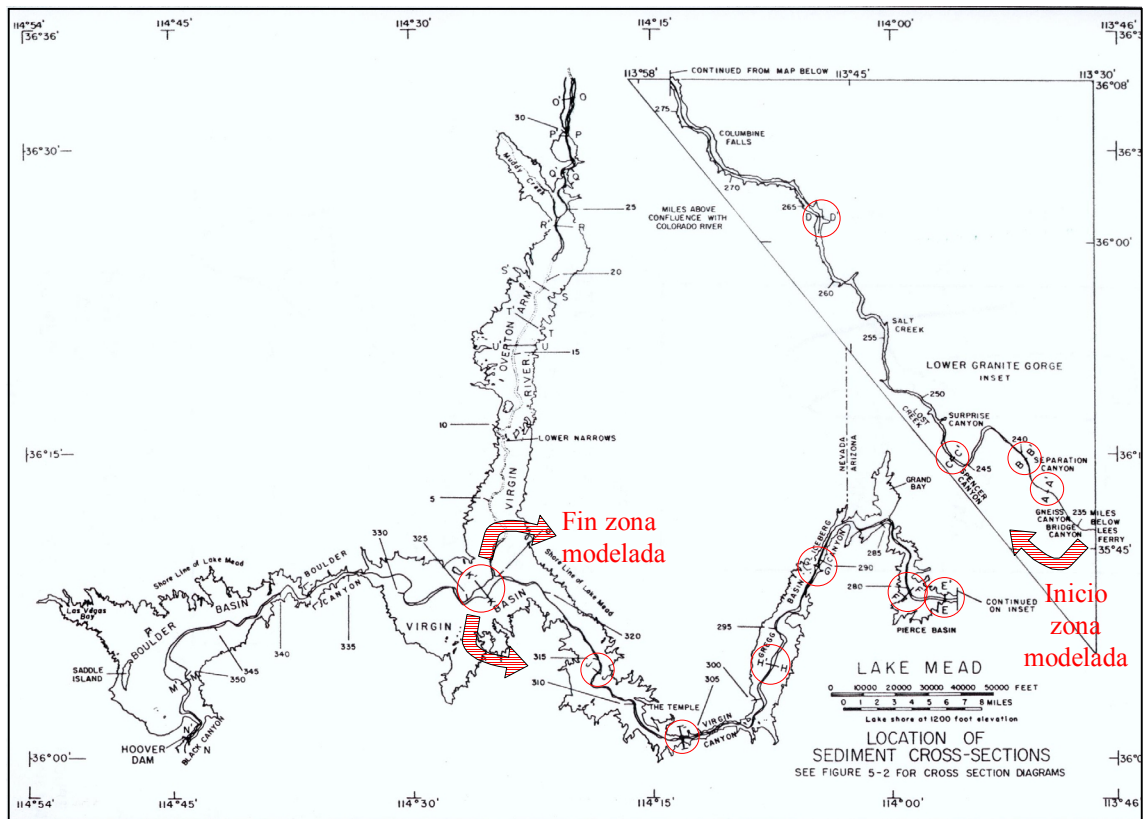


Figura 5.12 – Configuración del lago Mead. En círculos se muestra la ubicación de las secciones relevadas, y las flechas indican los límites del tramo modelado.

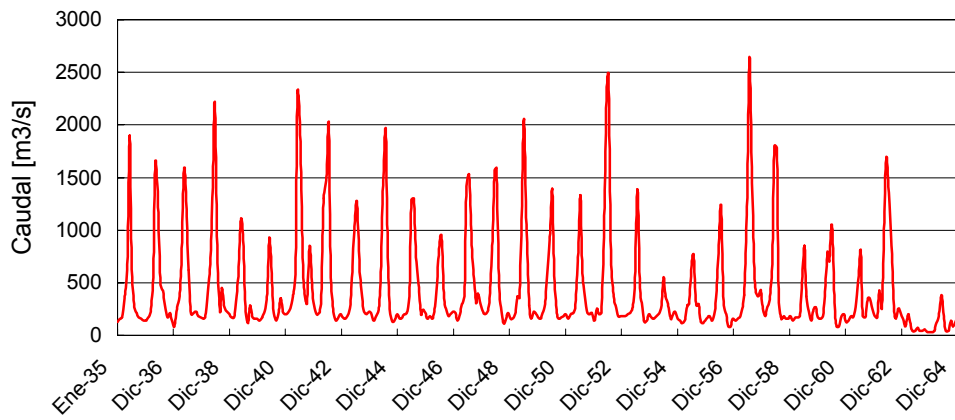


Figura 5.13 - Caudal medio mensual a través del Gran Cañón.

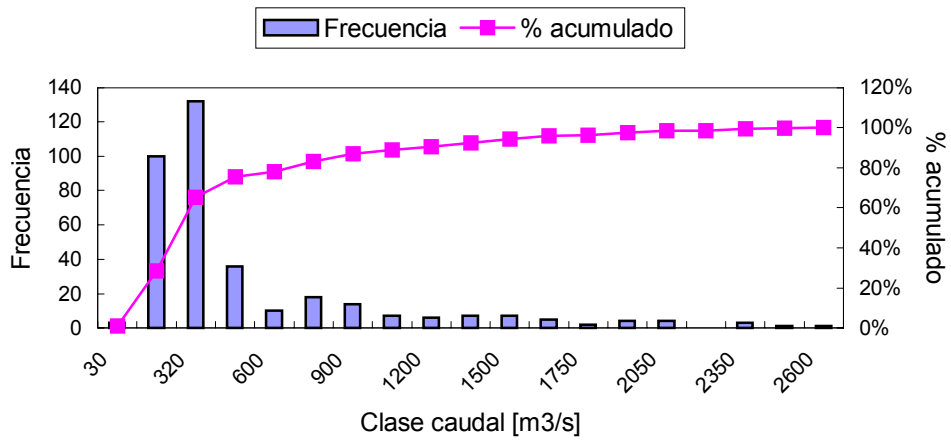


Figura 5.14 – Histograma para la serie de caudal medio mensual.

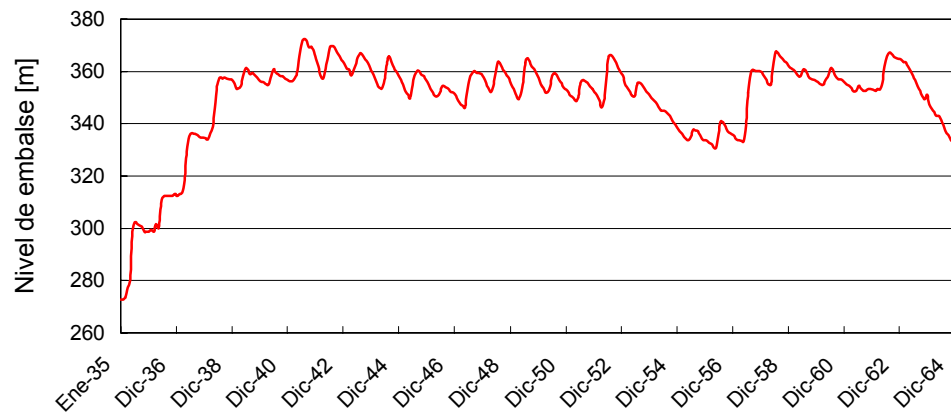


Figura 5.15 – Nivel de embalse en la presa Hoover.

Entre 1948 y 1949 se realizó una inspección topográfica del lago Mead, con el objeto de determinar la reducción en la capacidad del reservorio, debida al proceso de sedimentación. En esos momentos, el río podía transportar 500 000 toneladas diarias de sedimentos a través del Gran Cañón.

La figura 5.16 muestra la serie de caudal sólido suspendido registrada en la estación del Gran Cañón, unos 430 km aguas arriba de la presa Hoover, es decir, alrededor de 280 km aguas arriba de la sección de entrada del modelo. La carga está expresada en millones de toneladas al mes, indicando la enorme cantidad de sedimento transportado por el río Colorado. Durante el período comprendido entre noviembre de 1942 y septiembre de 1943 el caudal sólido no fue medido, razón por la cual se tomaron los valores del mismo periodo durante los años 1944 y 1945 como representativos.

Para la serie completa de 30 años, la cantidad total de sedimento pasando a través del Gran Cañón alcanza los 3171 millones de toneladas, con un promedio anual de 106 millones de toneladas (8.8 millones de toneladas mensuales). El máximo registrado alcanza los 95 millones de toneladas mensuales, con mínimos del orden de 250 000 toneladas al mes. En la figura 5.17 se muestra un histograma de la serie de caudal sólido.

El análisis de la serie indica que durante los primeros 15 años se transportaron las dos terceras partes de la carga total. Es decir, en la primera etapa el caudal sólido total duplicó al de la segunda mitad de la serie.

Lara y Sanders (1970) indican que otros tributarios menores contribuyen a la carga de sedimento que ingresa al lago Mead aguas abajo del Gran Cañón, aunque la cuenca de aporte no es demasiado significativa. Por ejemplo, su estimación de que el 10% de la carga suspendida no está medida es consistente con la tasa media anual de sedimentación en el lago. Es decir, las cargas representadas en la figura 5.16 más un 10% debido a la producción de sedimento en la subcuenca entre el Gran Cañón y el lago, son suficientes para explicar el volumen neto sedimentado (teniendo en cuenta que la eficiencia de atrape de sedimento del lago es de casi el 100%).

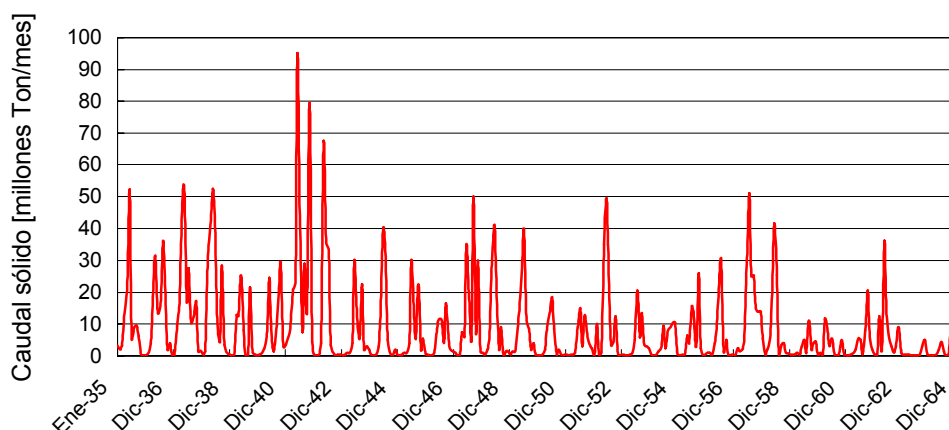


Figura 5.16 – Caudal sólido medio mensual.

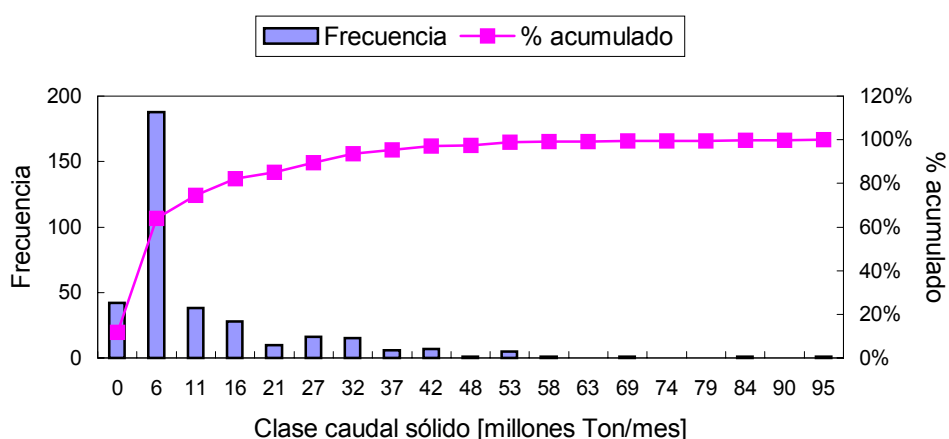


Figura 5.17 – Histograma para la serie de caudal sólido medio mensual.

### 5.3.4 Datos batimétricos

Al momento del cierre de la presa (1935), como así también durante las campañas de 1948/49 y 1963/64, se relevó el perfil longitudinal del río Colorado, desde unos 3 km aguas arriba del cañón Bridge, en Arizona, hasta la presa Hoover, en Nevada. La figura 5.18 muestra los resultados de las mediciones. Se observa la formación de un delta pronunciado, frecuentemente expuesto, con su frente avanzando desde el cuenco Pierce (1948/49) hasta la bahía Grand (1963/64). Aguas abajo del delta el depósito se continúa en forma suavemente descendente, formando un pie chato de deposición, de espesor aproximadamente constante, que llega hasta

la presa. La zona del delta está mayormente compuesta del material más grueso (limo grueso y arena), mientras que el pie del depósito está formado de limo fino y arcilla.

La información batimétrica se completa con una serie de secciones relevadas a lo largo del lago, cuya ubicación se indica en la figura 5.12. Las secciones fueron medidas en el año 1935 y durante los relevamientos de 1948/49 y 1963/64. Para el tramo del lago modelado se cuenta con una docena de secciones (A a K en la figura 5.12).

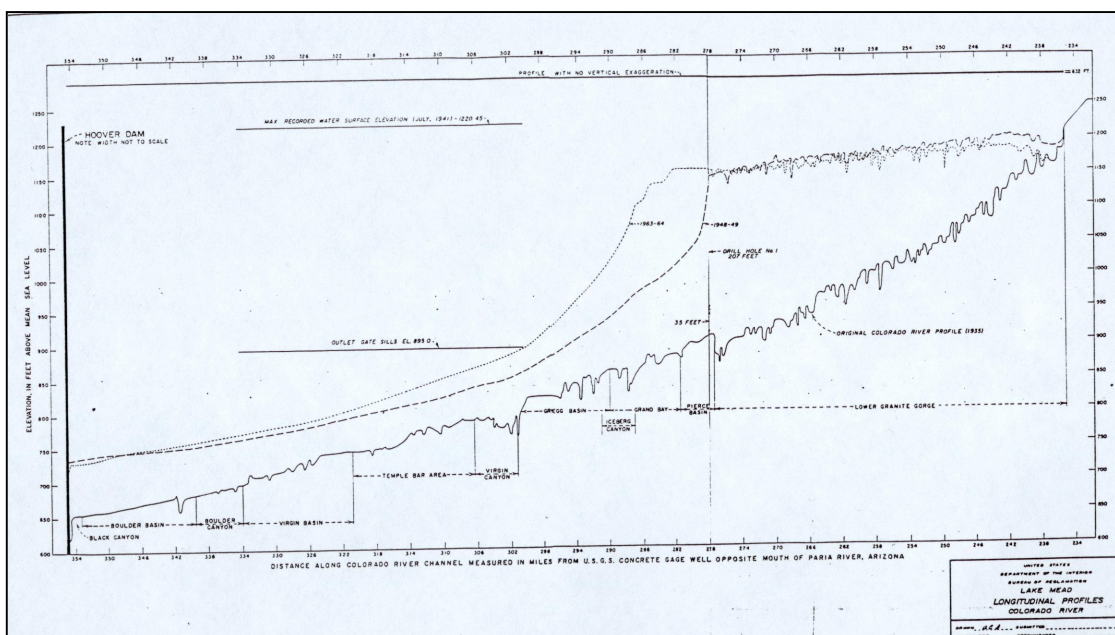


Figura 5.18 - Perfiles longitudinales del río Colorado en el lago Mead.

### 5.3.5 Datos sedimentológicos

Durante el relevamiento de 1963/64 se tomaron muestras de sedimento de fondo en una serie de posiciones a lo largo del embalse, las cuales se indican en la figura 5.19. De ellas, las indicadas con los números 1 a 8, y como *Drill Hole # 1*, están dentro del tramo modelado. El análisis de datos se llevó a cabo con estas muestras.

La composición mineralógica media de las muestras analizadas se presenta en la tabla 5.1. La proporción de materia orgánica en esas muestras varió entre 0 y 1.5%.

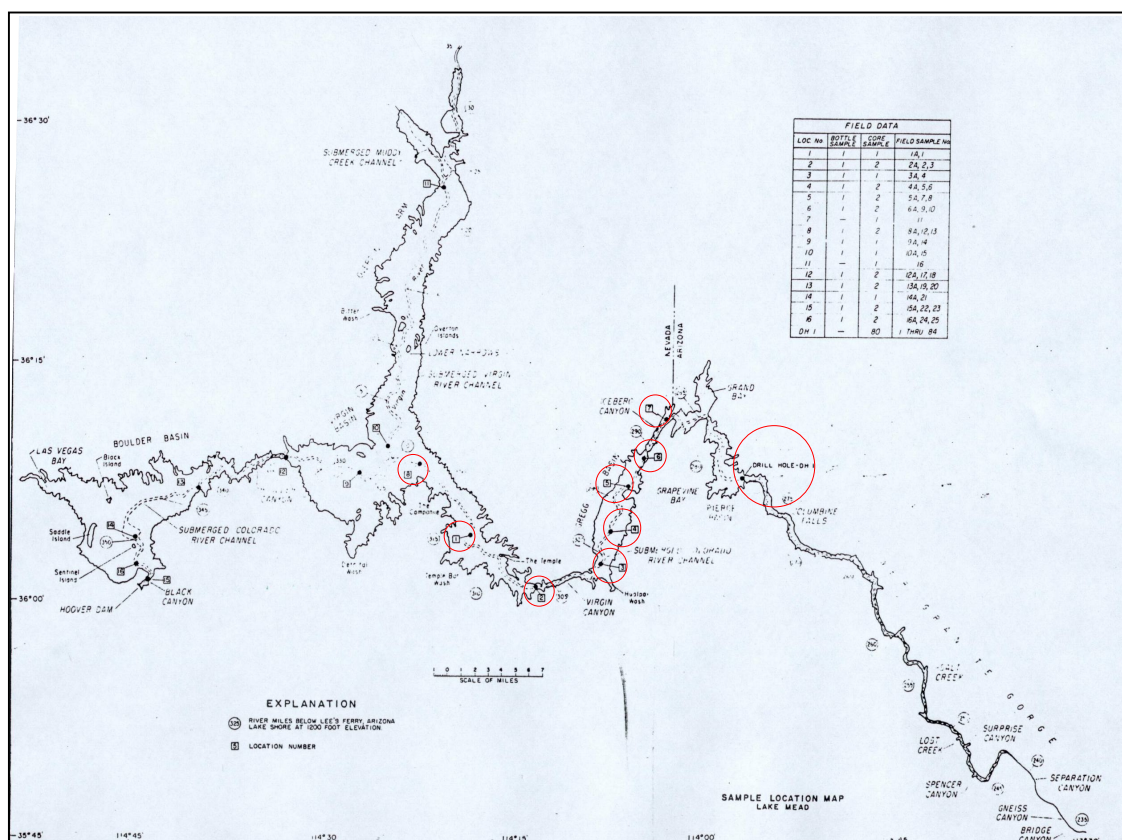


Figura 5.19 –Posiciones de obtención de muestras sedimentarias de fondo.

Tabla 5.1 - Composición mineralógica de los sedimentos depositados en el lago Mead.

| Material                       | Rango      |
|--------------------------------|------------|
| Cuarzo                         | 25 al 30 % |
| Feldespato                     | 3 al 5 %   |
| Calcita                        | 12 al 13 % |
| Dolomita                       | 6 al 10 %  |
| Caolinita                      | 5 al 8 %   |
| Arcilla (Ilita-Montmorilonita) | 30 al 40 % |

En esos lugares se tomaron muestras a poca profundidad. Como se mencionó anteriormente, desde la bahía Grand hasta la intersección con el brazo Overton los depósitos sedimentarios están compuestos esencialmente de limo fino y arcilla. Los diámetros medios registrados en

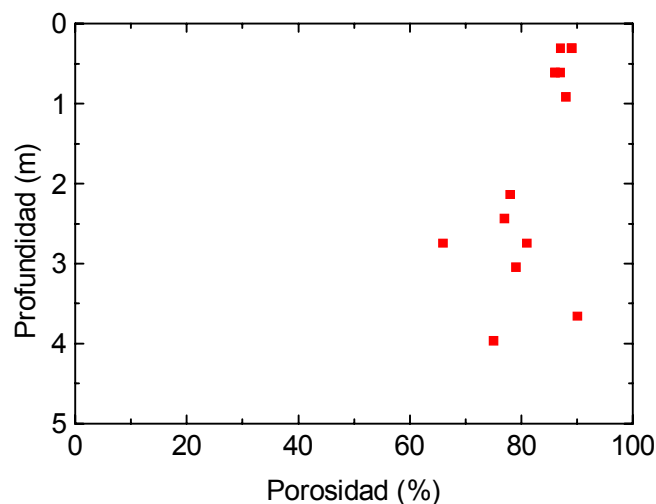
estas ocho posiciones van desde los 40  $\mu\text{m}$  a valores inferiores a 1  $\mu\text{m}$ , y la presencia de arena es casi imperceptible.

El análisis de las muestras obtenidas por Lara y Sanders (1970) indica que algunas propiedades físicas del sedimento depositado (contenido de humedad, peso seco específico, porosidad) presentan una estratificación en la vertical. En el informe mencionado se observan una serie de figuras indicando la presencia de una capa superficial, de alrededor de 1 m de profundidad, con propiedades diferentes a las de las capas más profundas, las cuales exhiben cierto grado de uniformidad.

La figura 5.20 presenta la porosidad media de una serie de muestras, en función de la profundidad. En la capa superficial, los valores varían entre 85 y 90%, mientras que por debajo caen dentro del rango 65 a 90%.

De acuerdo a lo informado por Lara y Sanders (1970) los estratos de sedimentos compuestos de limo y arcilla “...presentaban un inmenso estado de consolidación desde su deposición inicial...”, alcanzando “...un estado óptimo de consolidación donde las propiedades físicas permanecían estables independientemente de algún cambio apreciable en la sobrepresión...”. Del análisis de los autores surge que la consolidación se alcanza rápidamente: por ejemplo, los depósitos a 1 m de profundidad ya se presentan totalmente consolidados.

La estratificación por diámetros de partículas se presenta más variable. El patrón de estratificación informado por Lara y Sanders (1970) muestra espesores que van desde unos pocos centímetros a metros, presentando una recurrencia de capas de arcilla, limo y, eventualmente, arena. Se supone que tal variación refleja el carácter cambiante de los sedimentos entrantes, y los efectos de la variación del nivel del embalse.

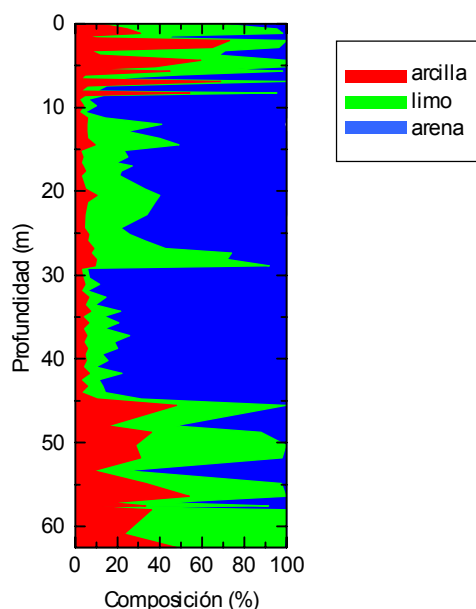


*Figura 5.20 – Porosidad media en función de la profundidad para muestras de fondo compuestas por sedimentos finos.*

Por otro lado, en la posición indicada como *drill hole # 1* en la figura 5.19 (progresiva 447 km), sobre el cuenco de Pierce, se realizó una perforación hasta unos 62.5 m de profundidad, colectándose y analizándose muestras en distintos niveles. La perforación se llevó a cabo en la posición aproximada del punto superior del frente del delta al año 1948. Desde el punto más profundo analizado hasta el cauce original al año 1935 restan unos 17 metros: esta porción quedó, entonces, sin relevar.

De entre los diversos resultados del análisis del material proveniente de la perforación, la figura 5.21 presenta la composición del lecho de acuerdo al tipo de grano, en función de la profundidad. Se observa que aparece un patrón de estratificación variable y que, en este caso, el contenido de arena es significativo. Esto último confirma que el lecho del delta está constituido primariamente de ese tipo de material.

La figura 5.22 indica que el contenido de humedad es aproximadamente uniforme en la profundidad (variando entre el 20 y el 40%) a excepción de una delgada capa superficial. La porosidad también presenta un patrón relativamente uniforme en la vertical, con valores entre el 40 y 55%, típicos de la arena (figura 5.23). Por su parte, la figura 5.24 muestra el diámetro medio de las partículas del fondo a distintas profundidades. Se observa que en la mayoría de los casos los valores caen dentro del rango de las arenas, con presencia de finos en la zona inferior de la perforación, y en la superficie del depósito.



*Figura 5.21 – Composición del lecho del delta por tipo de sedimento, en función de la profundidad. Perforación en posición “drill hole # 1”.*

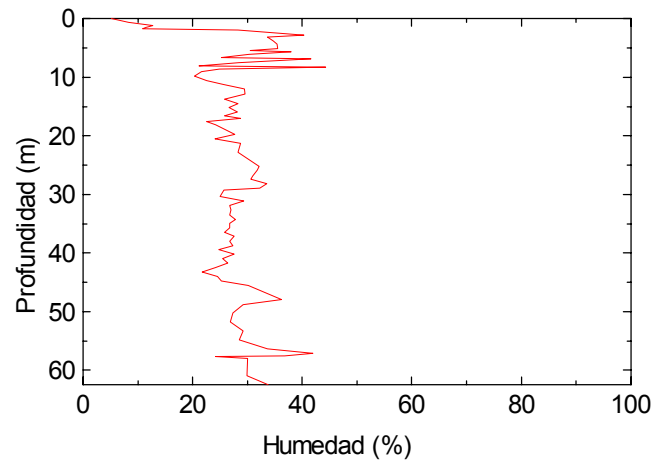


Figura 5.22 – Contenido de humedad en función de la profundidad.

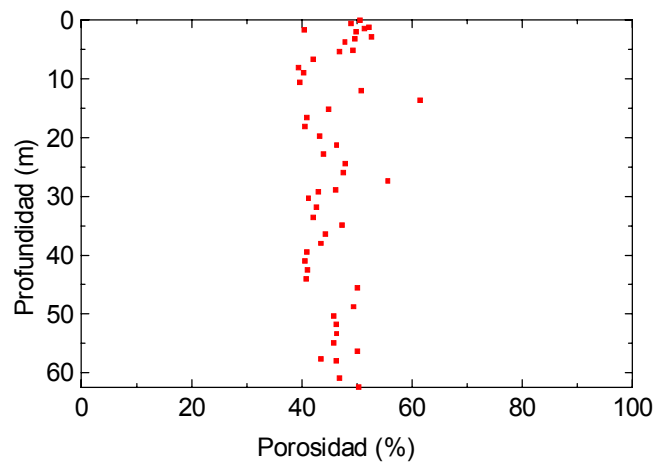


Figura 5.23 – Porosidad media en función de la profundidad.

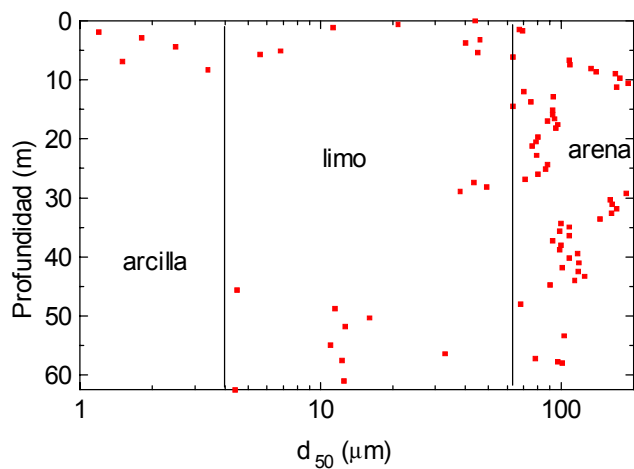


Figura 5.24 – Diámetro medio del sedimento en función de la profundidad.

Del análisis global de la información registrada en todo el lago Mead, Lara y Sanders (1970) concluyen que los depósitos están formados, en su conjunto, por un 60% de arcilla, un 28% de limo y un 12% de arena. Estos valores incluyen el aporte del río Virgin.

A partir de la información de los depósitos que surge de sus perforaciones (diámetro de sedimento y porosidad), y la geometría del cuenco del lago, se realizaron estimaciones propias de la composición de los depósitos. Teniendo en cuenta solamente los datos de la región modelada, se estimó una composición local con 30% de arcilla, 48% de limo y 22% de arena. El aumento relativo del porcentaje de arena se debe a que la zona modelada incluye el delta en su totalidad y este, a su vez, contiene la totalidad de la arena que ingresa al reservorio. Si el mismo análisis se aplica a todo el lago, resulta una composición de 53% de arcilla, 33% de limo y 14% de arena, compatible con los cálculos de Lara y Sanders. Estos valores se representan en la figura 5.25.

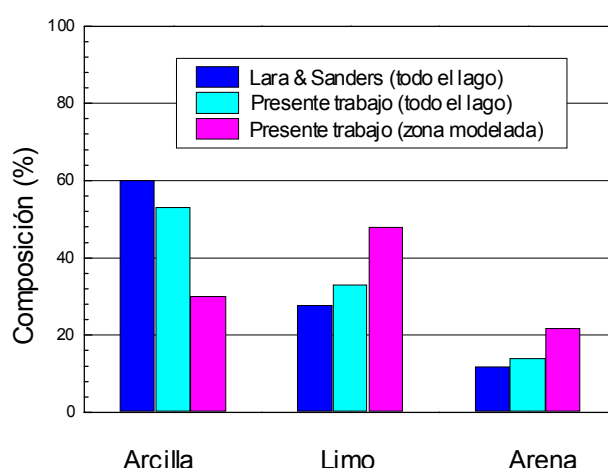


Figura 5.25 – Estimaciones de la composición global de los depósitos.

Respecto de las curvas granulométricas del material suspendido, en el informe de Lara y Sanders (1970) no se dan detalles. Los únicos datos que se han podido obtener corresponden a dos aforos aislados, en 1945, reportados por Howard (1953) y reproducidos en la figura 5.26. Se observan grandes diferencias, siendo que la curva del 16 de agosto indica que el 50% del material suspendido está constituido por arcilla, con un 5% de arena, mientras que para el 30 de mayo la situación es inversa, con un 75% de arena y sin arcilla.

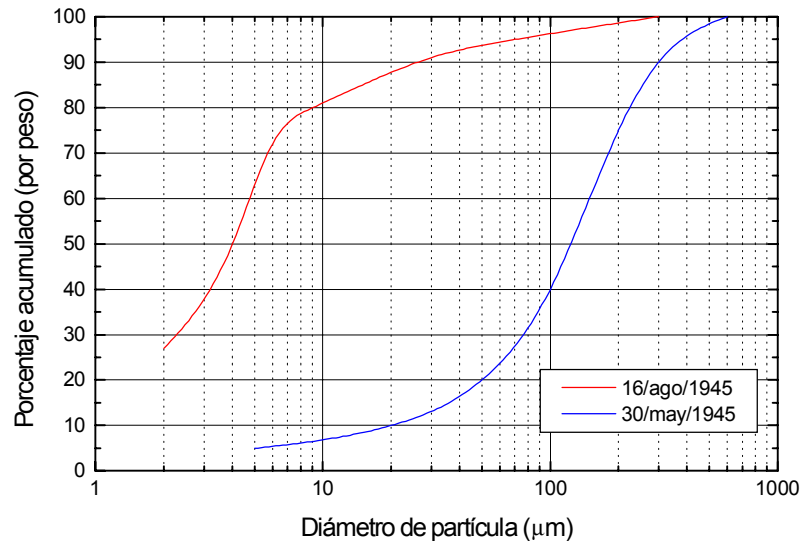


Figura 5.26 – Curvas granulométricas obtenidas en la estación de muestreo cercana al Gran Cañón.

### 5.3.6 Implementación del modelo

El paso de discretización horizontal varió entre los 100 m y los 700 m, mientras que el vertical desde fracciones de milímetro (en el fondo) hasta unos 4 m (en la superficie, a la salida de la zona modelada). Esto equivale a unos 500 elementos en la horizontal y 100 elementos en la vertical, respectivamente. El paso de tiempo fue de entre 1 y 10 días (con un total de alrededor de 2000 pasos de tiempo).

Como condiciones iniciales para la velocidad y la presión se utilizaron los perfiles verticales de equilibrio local. Estos corresponden a la distribución logarítmica de velocidad e hidrostática de presión, variando de acuerdo al caudal de ingreso, la altura local de agua y la composición del suelo en la sección de entrada (rugosidad). En el tramo del lago modelado se incluyó un segmento inicial de 10 km de longitud con pendiente y sección constantes, a los efectos de evitar erosión y/o sedimentación espuria en la entrada del modelo.

Las velocidades de corte críticas de deposición se tomaron como 0.6 cm/s para limo y 0.2 cm/s para arcilla. El 22% de la carga total, correspondiente a arena, se dividió en dos partes iguales con tamaños característicos de 80 y 200 micrones. Para el limo se utilizaron diámetros de partícula de 60 µm, 32 µm y 16 µm, y para la arcilla 2 µm.

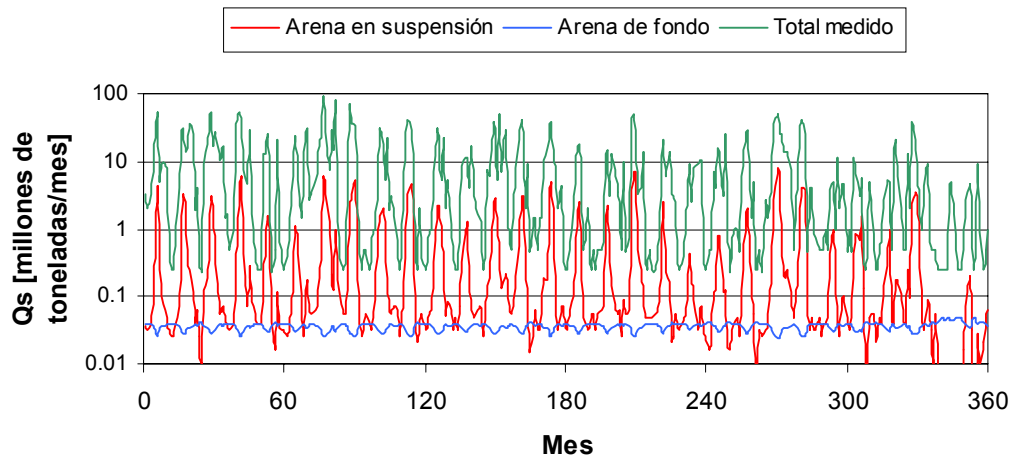
El perfil de concentración de sedimento en la sección de entrada se construyó considerando que las componentes de arena en suspensión estaban en estado de equilibrio local. De esta forma, para las condiciones hidrodinámicas correspondientes a un paso de tiempo particular, se calculó el perfil de concentraciones según las metodologías de Engelund-Fredsoe (1976) y van Rijn (1987).

Con la primera se obtuvieron cargas en suspensión fuera de rango: alrededor de 16 veces por encima de la carga total medida en el río durante los 30 años (que incluye la carga de lavado), es decir, sobreestimando el caudal sólido de arena en un factor de 70. Este resultado, asociado a la ubicación del fondo ficticio en este método, fue advertido en el Capítulo 3. Por tal motivo se descartó la utilización de esta metodología.

Para evitar el problema recién mencionado, la metodología de van Rijn indica que la mínima altura de referencia para estimar la concentración de equilibrio local no debe ser inferior al 1 % de la profundidad local. Hecha tal salvedad, se obtienen buenos resultados en la predicción del transporte de arena fina en el rango 100-500  $\mu\text{m}$  (van Rijn 1984b). En este caso, se extendió su aplicabilidad para la arena más fina ensayada (80  $\mu\text{m}$ ). Además, tal metodología ha sido exitosamente validada en casos de transporte de arena en ríos con altas velocidades medias (van Rijn et al. 1990, Voogt et al. 1991), similares al Colorado. Aplicándola a este caso de estudio, arrojó resultados relativamente satisfactorios, de acuerdo a lo mostrado en la figura 5.27. Se obtuvo una carga total de arena para el período simulado de 189 millones de toneladas. De acuerdo a los análisis de composición mencionados anteriormente, la carga entrante medida fue del orden de los 698 millones de toneladas para el mismo lapso. De este modo, las predicciones del método de van Rijn subestiman en un factor 3.7 las cargas medidas. Por ello, dicho factor fue aplicado como constante empírica multiplicativa en la fórmula de cálculo de la concentración de equilibrio en el fondo, de forma tal que la cantidad de arena que ingresa en la sección de entrada al modelo sea la misma que la global estimada para la zona modelada.

Cabe mencionar que las mediciones no discriminan la evolución temporal de las distintas fracciones dentro de la carga total, por lo cual se consideró que la diferencia entre la carga media mensual medida y la calculada para la arena es debida a la carga de lavado, con fracciones de cada componente proporcionales a los porcentajes de material fino determinados por análisis de las muestras de suelo (30% de arcilla y 48% de limo). Excepto en un mes, en el resto de los casos la carga de arena en suspensión determinada de esta forma no superó la carga media mensual medida, por lo que existió carga de lavado en forma casi permanente. Para dicho mes se tomó carga de lavado nula.

También se consideró que el transporte de fondo estaba en equilibrio local en la entrada del modelo. Utilizando la fórmula de Engelund y Fredsoe (1982) la carga de fondo calculada para el período simulado fue de solo 13 millones de toneladas, por lo que su aporte no fue tenido en cuenta para el balance entre caudales sólidos de entrada y medidos, ya que el mismo resultó poco significativo (ver figura 5.27).



*Figura 5.27 – Comparación entre el caudal sólido medido y las predicciones del transporte de arena en suspensión (metodología de van Rijn) y de fondo (metodología de Engelund-Fredsoe).*

Se utilizó una porosidad constante de 0.55 para la arena. Ya que, de acuerdo a lo analizado previamente, los depósitos a 1 m de profundidad se presentaban totalmente consolidados y sin cambio de propiedades por modificación de la sobrepresión, en la simulación se optó por tomar un valor de porosidad constante, del 80%, para los sedimentos finos (limo y arcilla). Esto equivale a considerar que la compactación se realiza instantáneamente, lo cual se traduce en una subestimación del volumen sedimentado. De todas formas, como la variación en la porosidad debida a la compactación del lecho aparece como poco significativa, se consideró que el efecto global sería de menor importancia.

En la simulación de este caso de estudio se tuvo en cuenta que, una vez que el delta comienza a desarrollarse, las variaciones del nivel de embalse producen que la parte superior del mismo quede expuesta durante parte del año. Por ejemplo, la figura 5.28 muestra la morfología del delta a la altura del cuenco de Pierce, en el año 1966 (Lara y Sanders 1970). Se observa un área relativamente plana, a través de la cual el río ha surcado un único canal, característico de los deltas de este tipo en época de aguas bajas (ver Capítulo 1). Para simular este fenómeno, el modelo fue adaptado para conducir el agua a través de una canalización en el tope del delta (con las características originales del río) toda vez que el nivel de embalse fuera inferior al nivel del ápex. Caso contrario, se supone que toda la superficie del delta queda sumergida.



*Figura 5.28 – Canalización del río Colorado sobre el delta expuesto del lago Mead, a la altura del cuenco de Pierce (14-jun-1966).*

Para tener idea del esfuerzo computacional, cabe mencionar que la presente corrida involucró un total de 6 fracciones de sedimento, además de los 100 elementos en la vertical, 500 elementos en la horizontal y 2000 pasos de tiempo ya mencionados,. De este modo, el número total de grados de libertad asciende a alrededor de  $1.7 \cdot 10^9$ . Tal corrida requiere unas 10 horas de CPU en una máquina PC PIII de 600MHz, con un promedio de 21  $\mu$ s por grado de libertad. Los requerimientos de RAM son mínimos.

### **5.3.7 Resultados del modelo**

La figura 5.29 presenta la evolución morfológica del depósito que se desarrolla en el lago Mead como consecuencia de la construcción de la presa Hoover.

El proceso de llenado del embalse conduce a la formación de distintos frentes de delta, los cuales se desarrollan sucesivamente hacia aguas arriba a medida que el embalse aumenta su capacidad. Así, luego de 5 años el lecho presenta un depósito extendido, de forma aproximadamente uniforme, donde no es posible distinguir un frente principal. Luego de 10 años del cierre de la presa, el nivel del embalse oscila dentro de la franja de operación normal, y se establece un depósito principal hacia la cabecera del reservorio y un depósito secundario al pie del anterior. El nivel del lecho en el depósito principal crece aceleradamente, incluso hacia aguas arriba del embalse. Esto es debido al alto aporte de material que se deposita sobre secciones de flujo relativamente pequeñas. De este modo el material más grueso, principalmente la arena, llena en forma rápida el vaso hidráulico. En esta etapa aparece un delta

que, aunque presenta una forma redondeada, permite distinguir un frente incipiente. El depósito secundario mantiene un aspecto suave y uniforme, creciendo su nivel a un ritmo mucho menor. Esto se debe a que en esa zona las secciones son mucho mayores que en la cabecera, y el aporte neto de material es menor, ya que el sedimento más grueso se deposita aguas arriba.

Transcurridos 15 años se ha consolidado un delta que presenta un tope y un frente bien definidos. Respecto de la situación cinco años antes, el crecimiento del depósito se dió especialmente en el frente del delta. El tope del delta tiende a estabilizarse con el tiempo, alrededor de la cota 355, y su frente avanza más lentamente. Cinco años más tarde el patrón de sedimentación es semejante, pero el frente ha avanzado hacia aguas abajo y el pie del delta aparece algo más desarrollado, debido a la deposición del material fino (limo y arcilla).

A los 25 y 30 años del comienzo del proceso de sedimentación en el lago, la morfología del depósito permanece cualitativamente inalterada, pero el frente continúa avanzando y el nivel en el pie del delta aumenta, aunque a un ritmo mucho menor que el inicial. Esto se debe a que, por un lado, el aporte de sedimento en este período disminuye y, por el otro, las secciones donde el material se deposita son mucho mayores que las que fueron ocupadas durante las primeras etapas de la evolución. En la última figura se observa una situación en la cual la fluctuación del nivel de embalse descubre el tope del delta. En ese caso la canalización que se desarrolla en el tope del delta permite que una fracción de la arena que entra al reservorio alcance el frente.

La figura 5.30 muestra el detalle anual de la predicción del modelo para la evolución del lecho del lago. En ella se aprecia el avance inicial de los depósitos hacia aguas arriba, durante el período de llenado del vaso hidráulico. Durante los primeros 10 años el depósito luce cambiante. Luego se establece un cierto estado de equilibrio dinámico, caracterizado por la estabilización del tope del delta, el avance progresivo del frente y el acumulamiento, en sucesivas capas, del material fino al pie del delta.

En la figura 5.31 se pueden observar distintos perfiles calculados de la componente horizontal de la velocidad, obtenidos en estaciones fijas en distintos instantes. Para el instante inicial, los perfiles tienen el aspecto habitual de la distribución vertical de velocidad en un flujo canalizado a superficie libre. Se aprecia que en la primer estación aguas abajo de la estación de ingreso (en  $x/L=0.2$ , siendo  $L$  la longitud del tramo de lago modelado) ocurre una contracción local del flujo, producto del aumento local de pendiente, que origina un incremento de las velocidades. Las dos estaciones siguientes presentan perfiles similares, con disminución de la velocidad media. En la estación  $x/L=0.8$  aparece una disminución brusca de velocidades, debido a que la corriente ha ingresado en la zona lacustre propiamente dicha.

Los perfiles al instante  $t=15$  años son similares, aunque se produce una disminución inicial de velocidad debido a que las pendientes del tope del delta son menores que la inicial, además de que existe un incremento del ancho local para los nuevos niveles de flujo. Para  $t=30$  años se aprecia un perfil diferente en la estación  $x/L=0.6$ , asociado a la zona donde el flujo canalizado

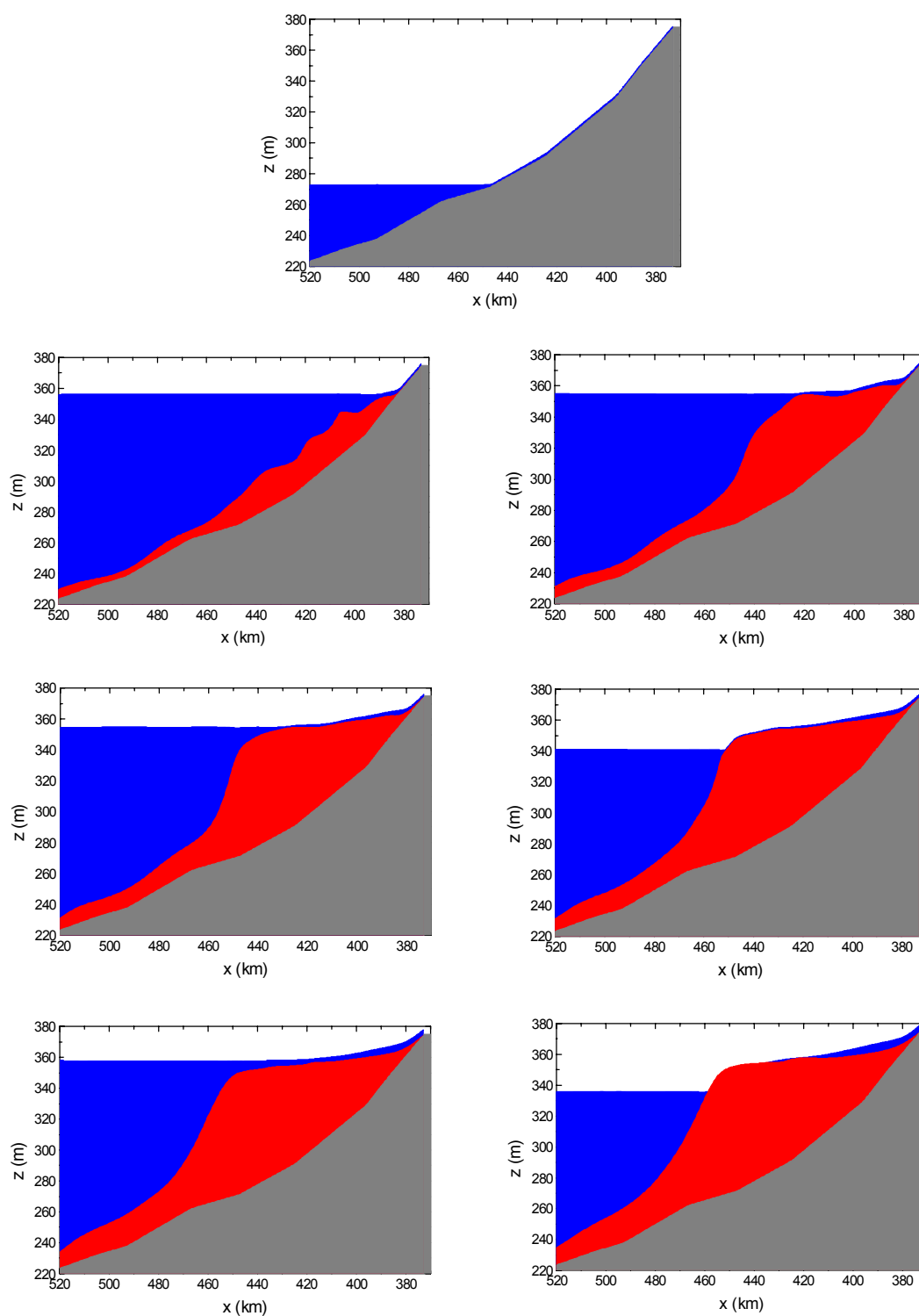
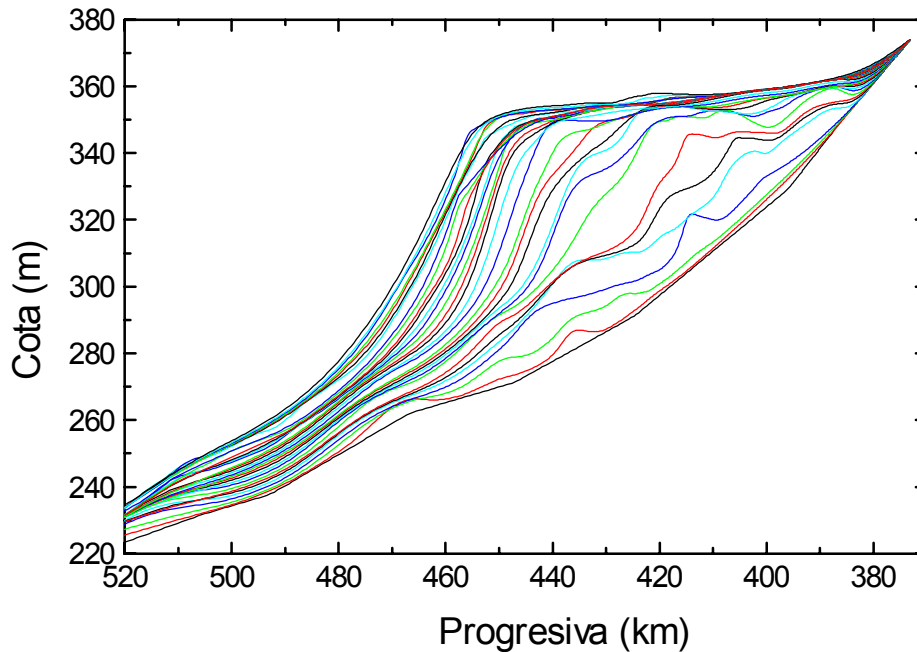


Figura 5.29 – Evolución morfológica de los depósitos en el lago Mead.  
 En orden lexicográfico: estado a enero 1935 (inicial),  
 y diciembre de los años 1939, 1944, 1949, 1954, 1959 y 1964.



*Figura 5.30 – Perfiles anuales del lecho del lago Mead entre 1935 y 1964 (modelo).*

a través del tope del delta penetra en el reservorio (ver figura 5.29). Dicho perfil presenta una aceleración del flujo en la superficie libre, mientras que hacia el fondo aparece una incipiente recirculación.

A título ilustrativo, la figura 5.32 muestra las distribuciones verticales de la componente vertical de la velocidad y la presión para  $t=15$  años. La velocidad resulta siempre positiva, con un módulo inferior a 1 cm/s. La presión luce siempre hidrostática para este instante.

En la figura 5.33 se presenta el resultado de la determinación de la velocidad de corte, nuevamente para los tres instantes de tiempo analizados aquí. Inicialmente se aprecian cambios bruscos, originados en las variaciones de la sección de flujo durante la etapa de llenado del reservorio. El proceso de sedimentación suaviza dichos cambios, de acuerdo a los resultados para tiempo posteriores.

Con el objeto de analizar el apartamiento de los perfiles de velocidad de las condiciones de equilibrio local, se realizó la figura 5.34, que presenta la relación entre las velocidades de corte calculada y de equilibrio local. En la zona de flujo correspondiente al régimen esencialmente fluvial, las desviaciones observadas en estos instantes particulares no superan el 10 % respecto del valor de equilibrio. En las zonas de transición y régimen lacustre las desviaciones son mayores, alcanzando apartamientos de casi el 50 %. Se deduce, por lo tanto, que los perfiles de velocidad analizados anteriormente se encuentran, en general, fuera del equilibrio local.

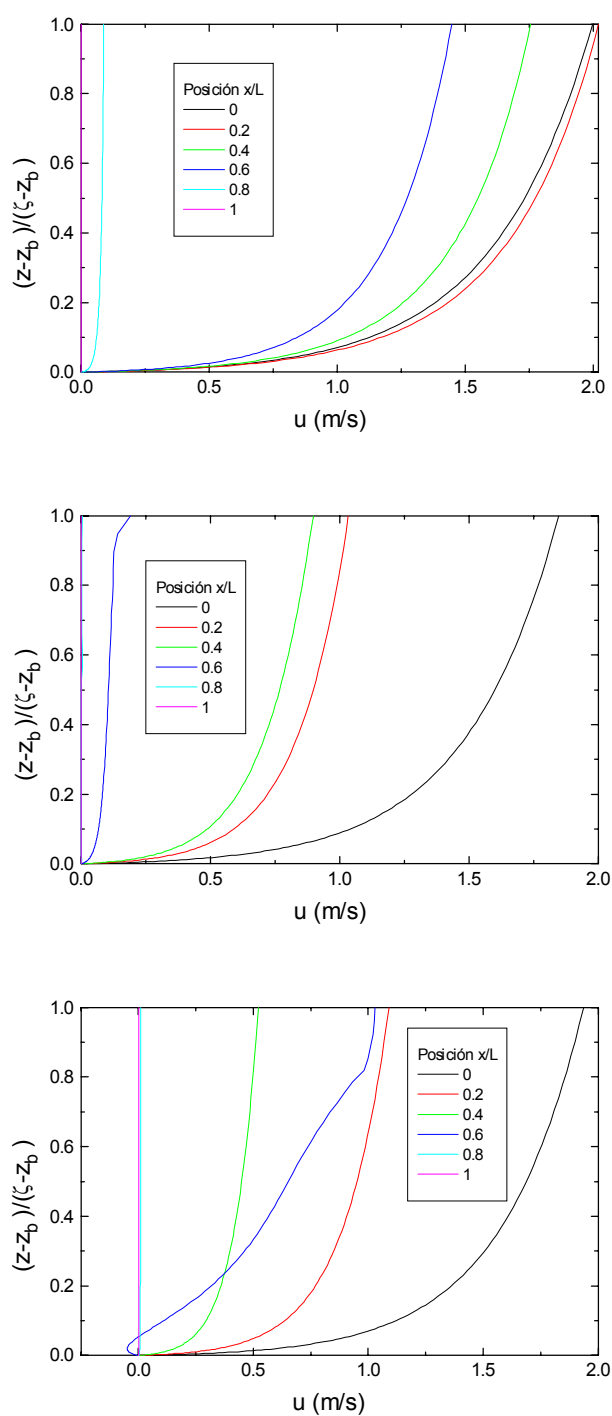


Figura 5.31 – Perfiles de la componente horizontal de la velocidad. para  $t=0$  años (arriba),  $t=15$  años (centro) y  $t=30$  años (abajo).

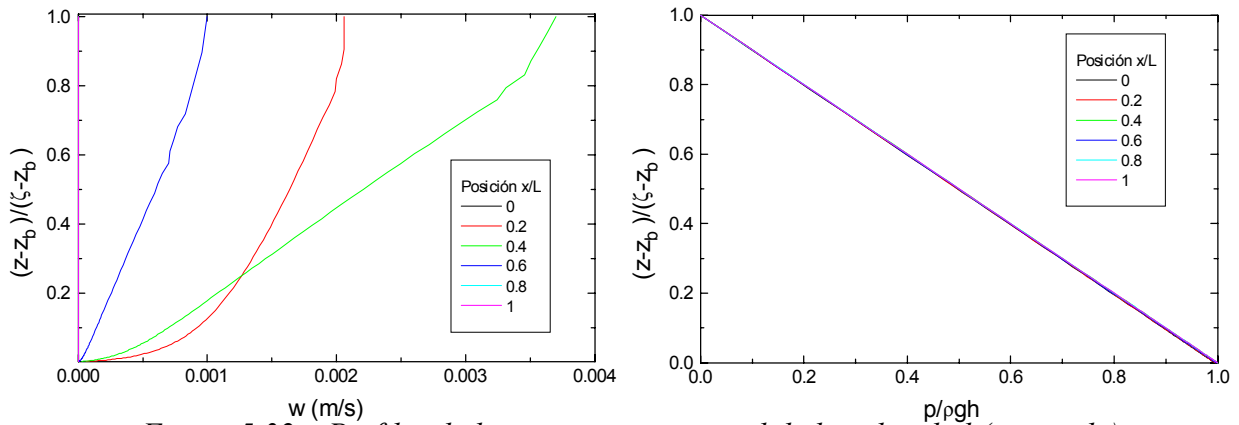


Figura 5.32 – Perfiles de la componente vertical de la velocidad (izquierda) y la presión (derecha) para  $t=15$  años.

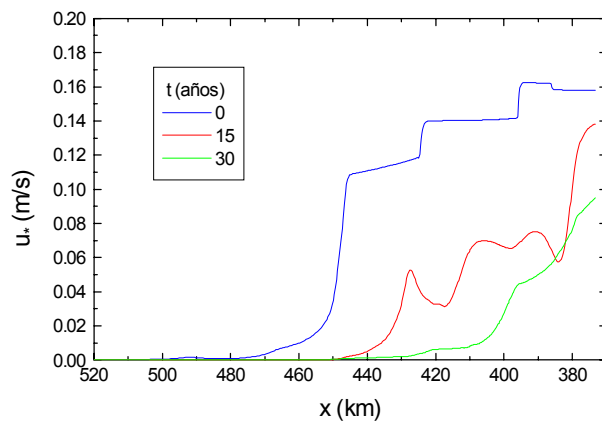


Figura 5.33 – Distribución longitudinal de la velocidad de corte para distintos instantes.

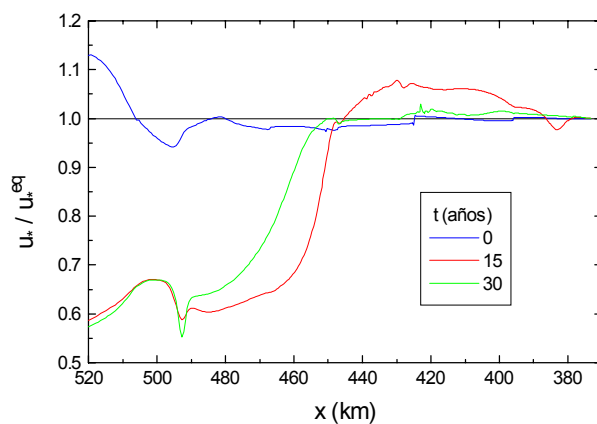


Figura 5.34 – Relación entre las velocidades de corte calculada y de equilibrio local.

En la figura 5.35 se presentan algunos resultados correspondientes a las distribuciones verticales de concentración total de sedimentos. En  $t=0$  años el perfil inicial está compuesto básicamente por material fino, con una contribución de arena del orden del 10 %. Esto se pone de manifiesto al observar los sucesivos perfiles, que indican que el material más grueso se deposita gradualmente, tendiéndose a producir un perfil vertical uniforme debido al material fino. Las concentraciones calculadas superan los 10 g/l, debido al alto contenido de carga de lavado. El perfil en  $x/L=1$  es nulo, indicando una tasa de atrape inicial del 100 %.

Para  $t=15$  años la situación es inversa, ya que el perfil a la entrada del modelo está casi totalmente compuesto de arena. En este caso la concentración media es inferior a los 1000 mg/l, con una componente de carga de lavado del orden de los 20 mg/l (en  $x/L=0.6$ ). Para el último instante presentado la situación resulta intermedia, con aporte de material fino y grueso del mismo orden de magnitud.

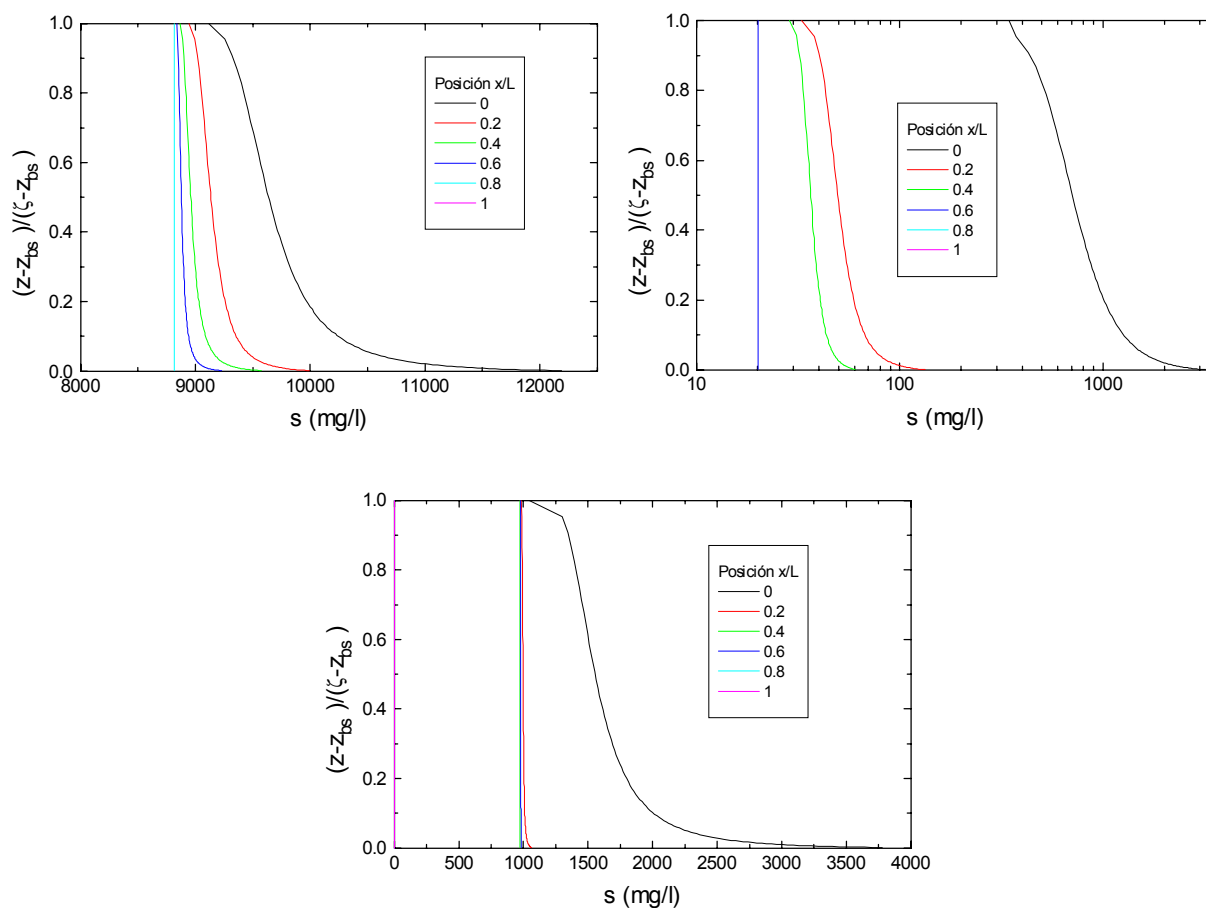


Figura 5.35 – Perfiles verticales de concentración en diferentes estaciones para  $t=0$  años (arriba izq.),  $t=15$  años (arriba der.) y  $t=30$  años (abajo).

En las figuras 5.36 y 5.37 se presentan las comparaciones entre los perfiles relevados a los 15 y 30 años del cierre de la presa y los perfiles calculados, respectivamente. Se observa un muy buen acuerdo en el tope y el frente del delta, donde la cuantificación de niveles medios y pendientes arroja los resultados de la tabla 5.2. El modelo predice los parámetros del tope del delta con muy buena precisión. La pendiente del frente queda subestimada (en alrededor del 50 % del valor medido) a los 15 años, pero la predicción a 30 años es satisfactoria (error del orden del 3 %). El acuerdo global a los 30 años de comenzado el proceso de sedimentación luce excelente.

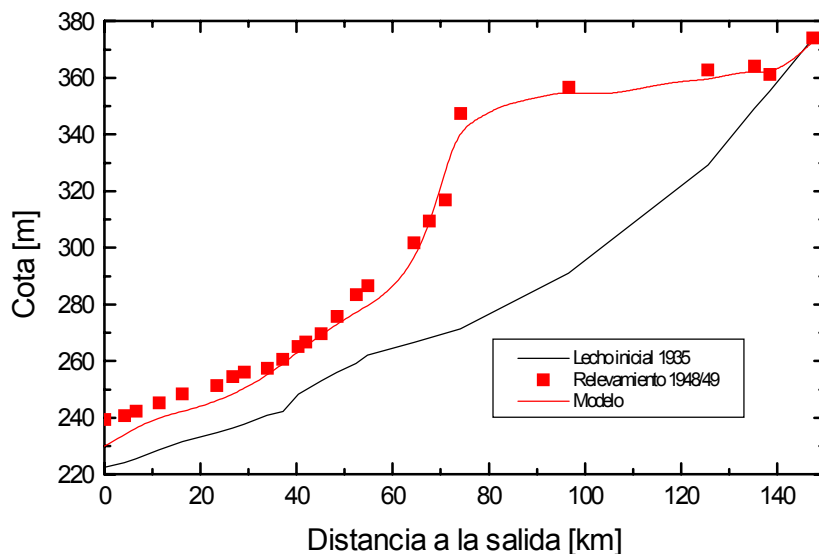


Figura 5.36 – Comparación entre los perfiles relevados y los calculados a los 15 años.

En el primer tramo del pie del delta el acuerdo es satisfactorio, pero se observan diferencias significativas a medida que se avanza hacia aguas abajo. El origen de las mismas podría deberse a que el transporte y deposición de material fino en la zona está influenciado por la formación de corrientes de turbidez, que dan lugar a la formación de un fondo de lodo más o menos uniforme.

Tales corrientes pueden aparecer durante las épocas de crecida en regiones áridas. En esos lugares, y especialmente durante la primer crecida del año, el hidrograma crece abruptamente, y la concentración de sedimento puede aumentar en forma rápida, ya que la erosión superficial causada por la escorrentía es especialmente fuerte. Cuando el flujo barroso penetra en la región de aguas claras del lago, su mayor densidad produce que tienda a sumergirse, avanzando con entidad propia sobre el fondo del reservorio. Como en estas regiones el hidrograma crece y cae en cortos períodos de tiempo, las corrientes de densidad son impermanentes, en general con duraciones de hasta algunos días (Jiahua 1986). Por ejemplo, en el reservorio Guanting (China) se han detectado corrientes de turbidez formadas por partículas de entre 2 y 30  $\mu\text{m}$ , con duraciones de entre 2 y 7 días y concentraciones de alrededor de 50 g/l (Jiahua 1986).

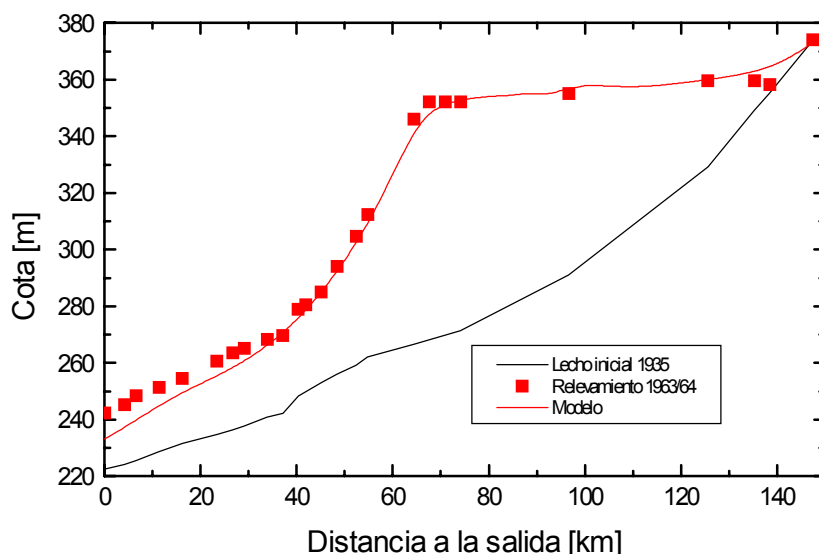


Figura 5.37 – Comparación entre los perfiles relevados y los calculados a los 30 años.

Tabla 5.2 – Análisis cuantitativo de los perfiles medidos y calculados.

| Zona             | Parámetro        | 15 años |           | 30 años |           |
|------------------|------------------|---------|-----------|---------|-----------|
|                  |                  | medido  | calculado | medido  | calculado |
| Tope del delta   | Pendiente (m/km) | 0.23    | 0.24      | 0.15    | 0.15      |
|                  | Cota media (m)   | 358     | 356       | 355     | 356       |
| Frente del delta | Pendiente (m/km) | 7.6     | 3.9       | 3.5     | 3.4       |
| Pie del delta    | Pendiente (m/km) | 0.56    | 0.78      | 0.76    | 1.0       |

En el lago Mead también se observaron este tipo de corrientes, especialmente durante el período de llenado de la presa. Hacia 1935 se detectaron 4 eventos, de duración media de 10 días, con corrientes compuestas de arcilla a concentraciones del orden de 20 g/l (Jiahua 1986). El fenómeno ha sido observado en otras oportunidades y se han reportado algunos eventos medidos (Howard 1953). Entre 1937 y 1946 funcionó un comité creado ad-hoc para cuantificar tales corrientes, y los resultados obtenidos alcanzaron unos 12 eventos medidos durante todo el período.

Las corrientes de turbidez que se pudieron desarrollar en el lago Mead estaban constituidas por material fino (básicamente arcilla) transportado en altas concentraciones. De acuerdo a las series de datos disponibles, tales situaciones pudieron tener lugar durante períodos cortos de tiempo. De todas formas, el crecimiento del delta en sí mismo, compuesto del material más grueso, está ligado al proceso de transporte en suspensión sin estratificación. De acuerdo a lo observado hasta aquí, la influencia de las eventuales corrientes de densidad sobre el mismo debió ser baja.

A partir del relevamiento de los años 1948/49 se determinó que en el depósito se podían distinguir dos regiones, una formada por arena y limo grueso, y la otra por limo fino y arcilla (Howard 1953). La figura 5.38 muestra la interfase determinada por Gould (Howard 1953) y la composición del depósito según los cálculos, observándose un buen acuerdo entre ambas, sobre todo teniendo en cuenta el carácter difuso de este tipo de límites.

El modelo muestra que durante los primeros años se generó una deposición en retroceso del material más grueso (básicamente la arena), debido a la formación de sucesivos frentes temporarios durante la etapa de llenado del embalse. Una vez que los niveles se establecen alrededor de los valores típicos de oscilación, el tope del delta aumenta su nivel a expensas del depósito de gruesos, mientras que el pie del delta evoluciona en forma similar pero alimentándose del material fino. Luego se alcanza un cierto estado de equilibrio en el tope del delta, y esta estructura crece a través de su frente. La parte superior del mismo se alimenta del material grueso, parte del cual está compuesto de arena que llega hasta ese lugar a través de la canalización desarrollada en el tope. La zona del pie del delta jamás es alcanzada por material grueso.

En definitiva, al cabo de 30 años de evolución del sistema se pueden distinguir tres zonas según la composición del depósito. La primera corresponde a la boca del delta, y tiene una extensión de unos 50 km desde la sección de entrada al modelo. En ella el material depositado es grueso. La segunda zona llega hasta alrededor de 60 km aguas debajo de la anterior. A partir del lecho inicial (1935) presenta una capa inferior de sedimento grueso, seguida de una capa intermedia de finos y culminando en un estrato superior también compuesto del material más grueso. Finalmente, la tercer zona comprende el tramo modelado restante, y está exclusivamente compuesta de limo fino y arcilla.

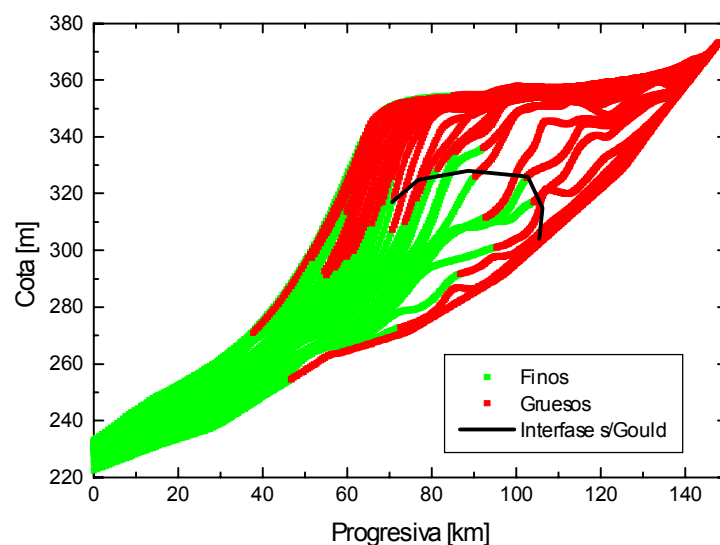


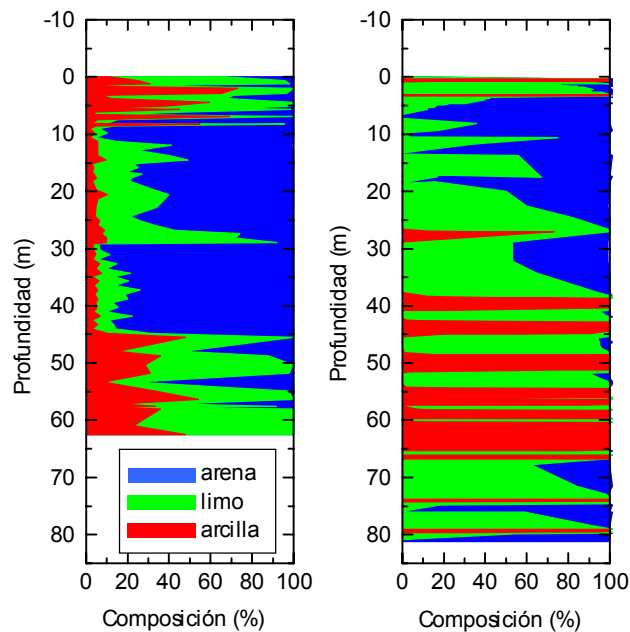
Figura 5.38 – División de los depósitos en zonas compuestas por material fino ( $\delta < 16\mu m$ ) y grueso ( $\delta > 16\mu m$ ).

Finalmente, en la figura 5.39 se realiza una comparación entre los resultados medidos y calculados para la perforación de 60 m de profundidad llevada a cabo en la progresiva 447 km. Más allá de que se trata de una sola muestra, se aprecia una correspondencia razonable en la composición del suelo a través de la identificación de estratos constituidos por material grueso y fino.

La muestra presenta una capa superficial de unos 8 m de espesor, compuesta de arcilla y limo. Por debajo aparece una capa de alrededor de 35 m de espesor constituida esencialmente por arena. Por debajo de la anterior se observa un estrato de material fino, donde la arcilla puede alcanzar el 40 % de la composición. En casi toda la muestra se observan simultáneamente arcilla, limo y arena.

La composición calculada indica una capa superficial, con finos, de sólo 4 m de espesor. Se continúa en un estrato de unos 35 m de profundidad, conformado por arena y limo, observándose una única incisión de arcilla. Los casi 30 m siguientes están formados por capas sucesivas de arcilla y limo, con muy poco aporte de arena. La capa inferior del depósito aparece formada por lenguas alternadas de los tres tipos de material.

Obsérvese que los resultados no muestran estratos compuestos simultáneamente por arena y arcilla, como ocurría en el caso medido. Esto se debe a que el modelo de transporte de sedimentos implícitamente no contempla situaciones en las cuales se depositen todos los tipos de partícula al mismo tiempo. Por ejemplo, en las condiciones de inicio de la deposición de la arcilla, la arena ya no puede ser transportada en suspensión. Inclusive, al haber tomado valores diferenciales para las velocidades críticas de deposición de limo y arcilla, prácticamente no se observan estratos donde ambas clases estén presentes simultáneamente. Por otro lado, los valores informados en la perforación para un nivel fijo deben ser tomados con cautela puesto que, en realidad, son representativos de un estrato de un metro de profundidad, en términos medios. De este modo, la aparición simultánea de todos los tipos de diámetros de partícula para tales niveles fijos en la muestra relevada queda ligada a la promediación que surge de la mezcla producida en cada tramo de muestra.



*Figura 5.39 – Comparación de la composición del suelo por tamaño de partículas entre las mediciones (izquierda) y los cálculos (derecha)*

## 5.4 COMPARACIÓN CON EL MODELO *HEC-6*

### 5.4.1 Características del modelo

Probablemente, el modelo de dominio público más conocido y utilizado para cuantificar la sedimentación en reservorios es el *HEC-6*. Aunque los primeros antecedentes datan de fines de los años sesenta, la primera versión pública fue emitida en 1977. El modelo fue desarrollado por Thomas en el Centro de Ingeniería Hidrológica del Cuerpo de Ingenieros del Ejército de EE.UU (Thomas y Prasuhn 1977, *HEC-6 User's Manual* 1991). Aquí se lo utilizó para comparar su performance con la del modelo presentado, aplicándolo al cálculo de la sedimentación en el lago Mead.

El modelo *HEC-6*, desarrollado con el objeto de estudiar erosión y sedimentación en ríos y reservorios, es unidimensional pero permite analizar redes de canales. Está diseñado para simular cambios en perfiles fluviales sobre períodos de tiempo prolongados (aunque puede aplicarse a eventos de crecidas individuales).

El registro de flujo entrante es dividido en una secuencia de flujos estacionarios de amplitud y duración variables.

Para una dada geometría del cauce o del reservorio, definida por secciones transversales separadas por una cierta distancia y especificadas por coordenadas, el programa calcula los parámetros hidráulicos en cada sección a partir de una rutina de curva de remanso. Estos parámetros son los de equilibrio local (velocidad media, pendiente de energía, profundidad, etc.).

Se debe proveer la carga de sedimento en la sección aguas arriba, para cada fracción granulométrica, como una función del caudal de entrada. Para arena, la carga de sedimento en el resto de las secciones se computa a partir de la elección de alguna fórmula de transporte (doce preestablecidas propuestas por diversos autores, pudiéndose trabajar también con ecuaciones especificadas por el usuario), con correcciones por la disponibilidad de material en el lecho, la carga de lavado y el acorazamiento.

Las fracciones finas (limo y arcilla) se transportan sin deposición mientras el esfuerzo de corte en el lecho es superior a cierto valor considerado crítico. Una vez que dicho esfuerzo cae debajo del valor crítico, la deposición se calcula como un decaimiento exponencial en función de la velocidad media del flujo y la velocidad de caída de las partículas (Gee 1993). Para ello se utiliza el método de Krone (1962). Aunque, por defecto, el modelo no contempla la erosión de finos, es posible calcularla. En este caso se emplea el método de Ariathurai (1976), que constituye una adaptación del método de Partheniades (1965).

Los cambios del fondo se determinan usando una solución en diferencias finitas centradas (formulación explícita) de la ecuación de continuidad del sedimento.

El modelo considera que el proceso de erosión se tiene sobre un ancho efectivo especificado, mientras que la deposición puede tener lugar en toda la porción del cauce en contacto con agua.

El programa está escrito en FORTRAN estándar, con lo cual tiene la ventaja de ser apto de una computadora a otra. También se dispone de material de soporte bien documentado.

#### **5.4.2 Implementación del modelo**

La implementación y operación del modelo HEC-6 para este problema fue llevada a cabo por Spalletti (Tarela y Spalletti 2000). Del mismo modo que en 5.3, se trabajó sobre el brazo principal del lago Mead, definiéndose una modelación en una sola rama.

Para disminuir las posibles inestabilidades del modelo provocadas por considerar distancias entre secciones demasiado grandes, se interpolaron para cada tramo entre perfiles transversales relevados unas 20 secciones, que permitieron tener los parámetros hidráulicos en puntos intermedios.

Se consideró un tramo adicional de río de varios kilómetros aguas arriba de la cabecera del embalse, con el fin de evaluar la fórmula de transporte más adecuada. Con ella debe obtenerse

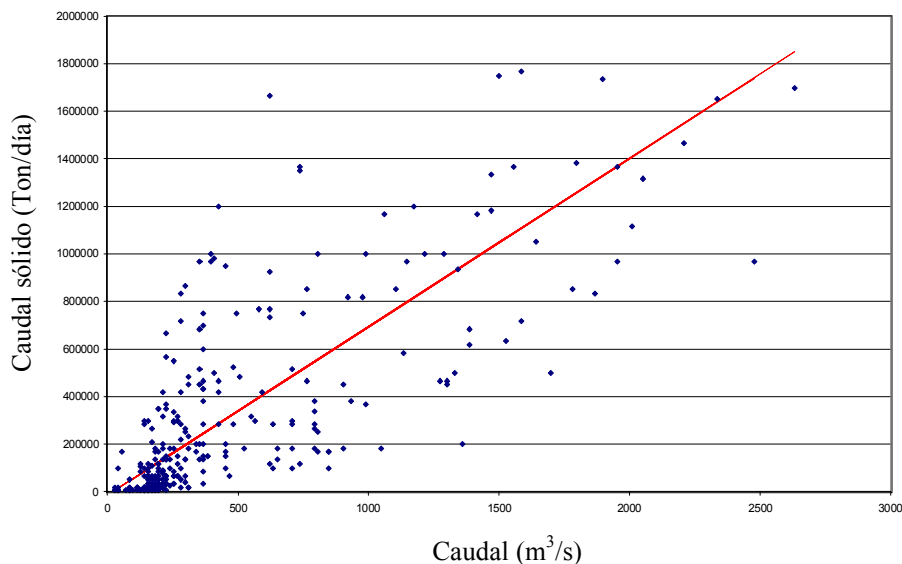
un perfil medio tendiente al equilibrio en el tramo de río no afectado por el remanso impuesto por el lago, que corresponde a la configuración real del lecho. De esta manera, no son afectados en forma notoria los volúmenes de material que ingresan al embalse, debido a errores en la estimación del comportamiento morfológico del tramo de cauce localizado aguas arriba.

En cada una de las secciones se deben ingresar los datos correspondientes a las granulometrías. En este caso se adoptó la misma distribución en todo el tramo estudiado, y un lecho inicial de arena.

Tras analizar las distintas metodologías de evaluación del transporte disponibles en el *HEC-6*, se optó por una combinación de las fórmulas de Toffaleti (1969) y de Meyer-Peter y Muller (1948), con las cuales se registraron los mejores resultados.

Se deben ingresar al modelo las series temporales correspondientes al hidrograma (en la entrada) y al nivel de embalse (en la restitución). El material sólido en suspensión que accede al tramo en estudio no puede ser expresado en el modelo como una variable temporal independiente, debiéndose evaluar a través de una ley de variación en función del caudal líquido.

En general, los pares de valores caudal líquido-caudal sólido correspondientes a los datos de campo presentan dispersiones importantes, tal como puede apreciarse en la figura 5.40 para el lago Mead. En ella también se muestra la ley adoptada para relacionar dichas cantidades.



*Figura 5.40 - Relación entre caudal líquido y caudal sólido para los datos del lago Mead. La línea roja indica la relación utilizada en el ingreso del modelo.*

Respecto de la granulometría del material sólido suspendido, en el modelo *HEC-6* puede definirse una distribución variable en función del caudal sólido, pero no en función del tiempo. En el presente estudio, se adoptó una distribución con 30% de arcilla, 48% de limo y 22% de arena.

La porosidad de los depósitos en el embalse y su variación en el tiempo es evaluada por el software para la arcilla, el limo y la arena en forma independiente. Para ello, considerando la siguiente relación para el peso específico de los depósitos:

$$\gamma_s = (1 - \pi)\gamma \quad (5.4)$$

donde  $\gamma \cong 2.65\gamma_{\text{agua}}$ , el programa evalúa la consolidación del material sedimentado en función de las condiciones iniciales ( $\gamma_{si}$ ), el tiempo ( $t$ ) y un coeficiente de compactación ( $C_c$ ) de acuerdo a la relación:

$$\gamma_s = \gamma_{si} + C_c \log_{10}(t) \quad (5.5)$$

Si se analiza el caso de la arcilla, el software por defecto considera una porosidad inicial de 0.82 y 0.53 una vez que el material ha sido compactado. De acuerdo a los datos básicos para el problema bajo estudio, se modificaron los valores anteriores adoptando 0.9 y 0.8 respectivamente para los estados inicial y final.

Para el limo el modelo considera una porosidad variable entre 0.61 y 0.5 durante el período de consolidación de los depósitos, pero en la simulación del lago Mead estos valores fueron de 0.8 y 0.7, de acuerdo con los datos disponibles.

Para la arena se consideró una porosidad de 0.45, sin que se produzca una variación temporal del parámetro (ausencia de consolidación).

Finalmente, luego de analizar los resultados de la simulación para distintos pasos de tiempo, se adoptó para las corridas definitivas un intervalo de discretización de 1 día, ya que fue el máximo valor para el que no se apreciaron inestabilidades.

### 5.4.3 Resultados del modelo y comparación

La figura 5.41 presenta la predicción del modelo *HEC-6* para la evolución anual del lecho del lago. Durante los primeros años, coincidentes con el llenado de la presa, los depósitos se registran en zonas intermedias del vaso, con una distribución más o menos extendida, aunque siempre con valores más altos en el tramo de aguas arriba. A continuación se desarrolla el delta en la cabecera del embalse, manteniendo la pendiente del tope aproximadamente constante. Así, esta parte del depósito crece en sucesivas capas, mientras que el frente lo hace progresivamente hacia aguas abajo. El pie del delta es una estructura reducida.

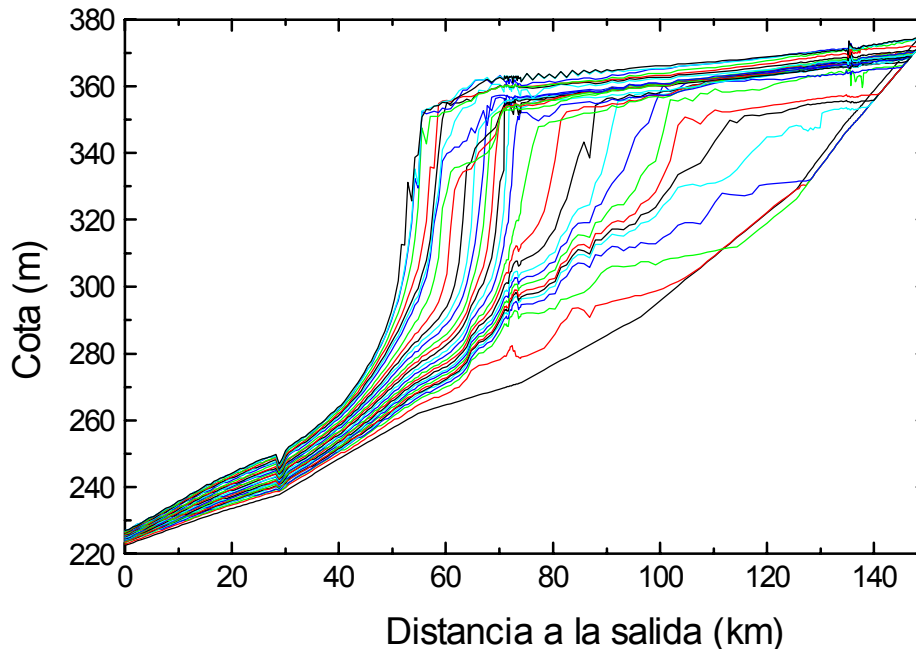


Figura 5.41 - Perfiles anuales del lecho del lago Mead (modelo HEC-6).

La figura 5.42 muestra la comparación de los perfiles longitudinales del lecho del lago Mead calculados y medidos, para los primeros 15 años. Ambos modelos predicen una forma y extensión del delta similar al relevado. Respecto de los datos de campo, el modelo desarrollado en este trabajo subestima el nivel del delta, mientras que el modelo *HEC-6* lo sobreestima. Lo mismo ocurre con la posición del frente del delta. El presente modelo produce perfiles más suaves, mientras que el *HEC-6* muestra un cambio brusco en el frente. Al pie del delta ambos modelos subestiman el nivel del depósito, pero esta tendencia se nota mucho más marcada con el modelo *HEC-6* hacia aguas abajo.

La tabla 5.3 presenta un análisis cuantitativo de la performance de ambos modelos para el período indicado. En general, el modelo desarrollado en este trabajo presenta diferencias menores respecto de los valores medidos.

En la figura 5.43 se observa la comparación a 30 años. En este caso el modelo aquí desarrollado alcanza un excelente acuerdo con el perfil relevado, mientras que el modelo *HEC-6* sobreestima el nivel del delta y la ubicación de su frente, a la vez que subestima el depósito al pie del delta. Las diferencias cuantitativas son mucho menores para el modelo 2D que para el modelo 1D, de acuerdo a lo observado en la tabla 5.4.

Nótese que ambos modelos fallan en la zona del depósito aguas abajo del pie del delta, donde se supone que la evolución morfológica está influenciada por la aparición de corrientes de turbidez que transportan material fino hacia la presa. Ninguno de los dos modelos tiene en cuenta este fenómeno.

El tiempo de CPU utilizado para simular el período completo de 30 años fue de 1 hora para el modelo *HEC-6* y 10 horas para el modelo bidimensional.

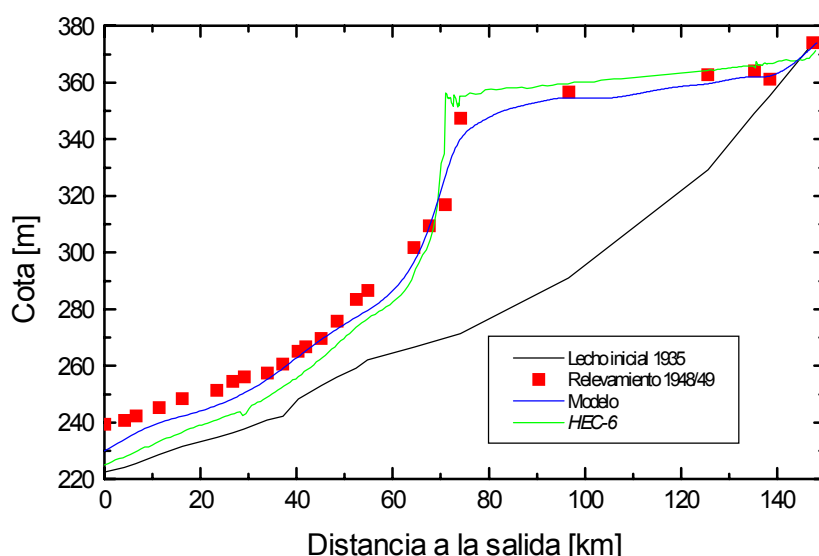


Figura 5.42 – Comparación de perfiles longitudinales para 15 años.

Tabla 5.3 – Comparación cuantitativa de los perfiles medidos y calculados a los 15 años.

| Zona             | Parámetro        | Medido | Presente trabajo | error  | HEC-6 | error  |
|------------------|------------------|--------|------------------|--------|-------|--------|
| Tope del delta   | Pendiente (m/km) | 0.23   | 0.24             | +4 %   | 0.17  | -26 %  |
|                  | Cota media (m)   | 358    | 356              | -2 m   | 361   | +3 m   |
| Frente del delta | Pendiente (m/km) | 7.6    | 3.9              | -49 %  | 22.0  | +189 % |
| Apex             | Progresiva (km)  | 74     | 78               | -4 km  | 71    | +3 km  |
|                  | Altura (m)       | 347.5  | 346              | -1.5 m | 355   | +7.5 m |
| Pie del delta    | Pendiente (m/km) | 0.56   | 0.78             | +39 %  | 0.72  | +29 %  |

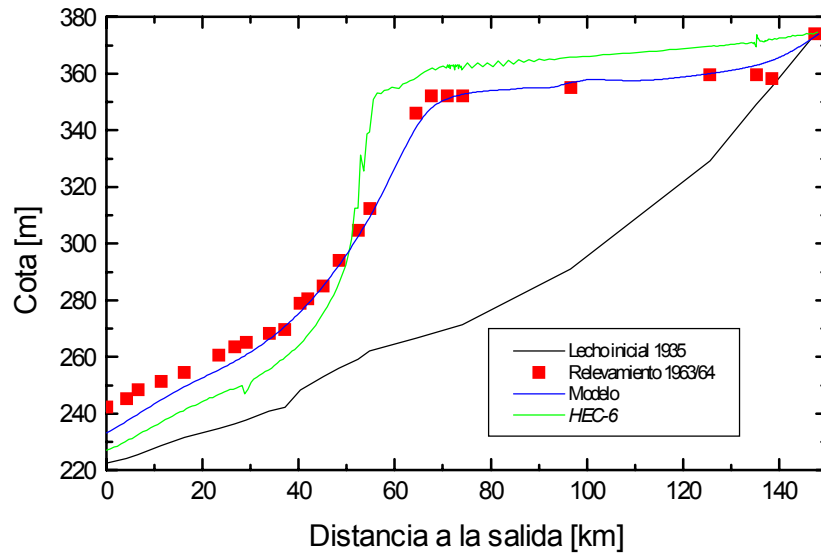


Figura 5.43 – Comparación de perfiles longitudinales para 30 años.

Tabla 5.4 – Comparación cuantitativa de los perfiles medidos y calculados a los 30 años.

| Zona             | Parámetro        | Medido | Presente trabajo | error | HEC-6 | error  |
|------------------|------------------|--------|------------------|-------|-------|--------|
| Tope del delta   | Pendiente (m/km) | 0.15   | 0.15             | 0     | 0.14  | -7 %   |
|                  | Cota media (m)   | 355    | 356              | -2 m  | 365   | +10 m  |
| Frente del delta | Pendiente (m/km) | 3.5    | 3.4              | -3 %  | 9.9   | +183 % |
| Apex             | Progresiva (km)  | 68     | 70               | -2 km | 56    | +12 km |
|                  | Altura (m)       | 352    | 351              | -1 m  | 353   | +1 m   |
| Pie del delta    | Pendiente (m/km) | 0.76   | 1.0              | +33 % | 0.91  | + 20 % |

En la figura que se presenta a continuación, se indica la división de los depósitos en zonas compuestas por material fino y grueso (división entre materiales a  $16 \mu\text{m}$ ). En ella también se ha volcado la interfase determinada por Gould a partir de los relevamientos de 1948/49 (Howard 1953). El modelo bidimensional arroja un mejor acuerdo respecto del unidimensional, mostrando una estratificación que, en un sentido medio, respeta las tendencias de la interfase de Gould. La misma se ve sobrepasada en uno y otro sentido por lenguas de material de distinta clase. El modelo HEC-6, en cambio, predice una zona de material fino mucho más delgada, y que incluso abarca regiones próximas a la entrada del modelo. Sin embargo, en este último caso se aprecia superposición de materiales finos y gruesos en la parte central del delta.

En el caso del modelo unidimensional, se solapan estratos de material fino y grueso justamente en la zona de la interfase, quedando una delgada capa intermedia con material preponderantemente fino. El modelo bidimensional, en cambio, presenta un cambio más brusco entre los dos tipos de suelo, también alrededor de la interfase, sin observarse zonas de solape considerables.

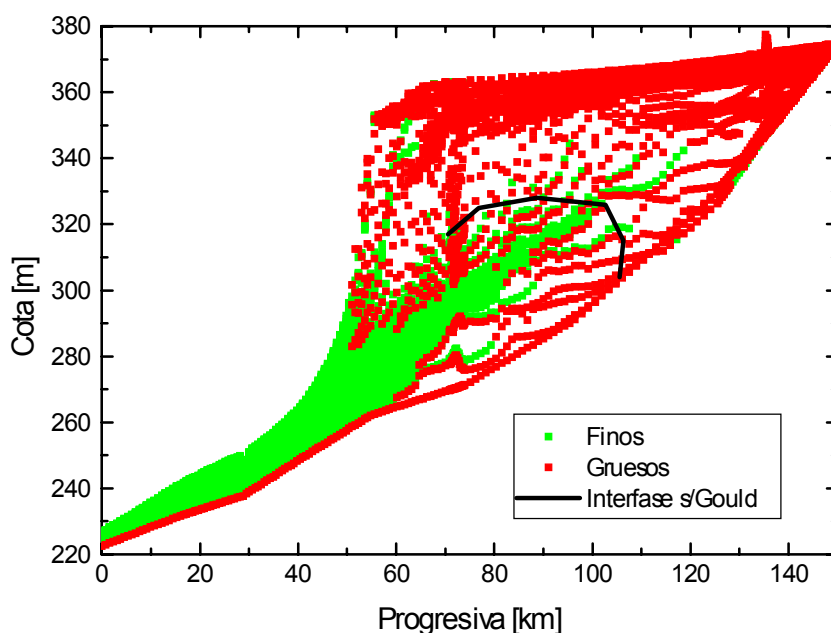


Figura 5.44 – División de los depósitos en zonas compuestas por material fino ( $\delta < 16\mu\text{m}$ ) y grueso ( $\delta > 16\mu\text{m}$ ).

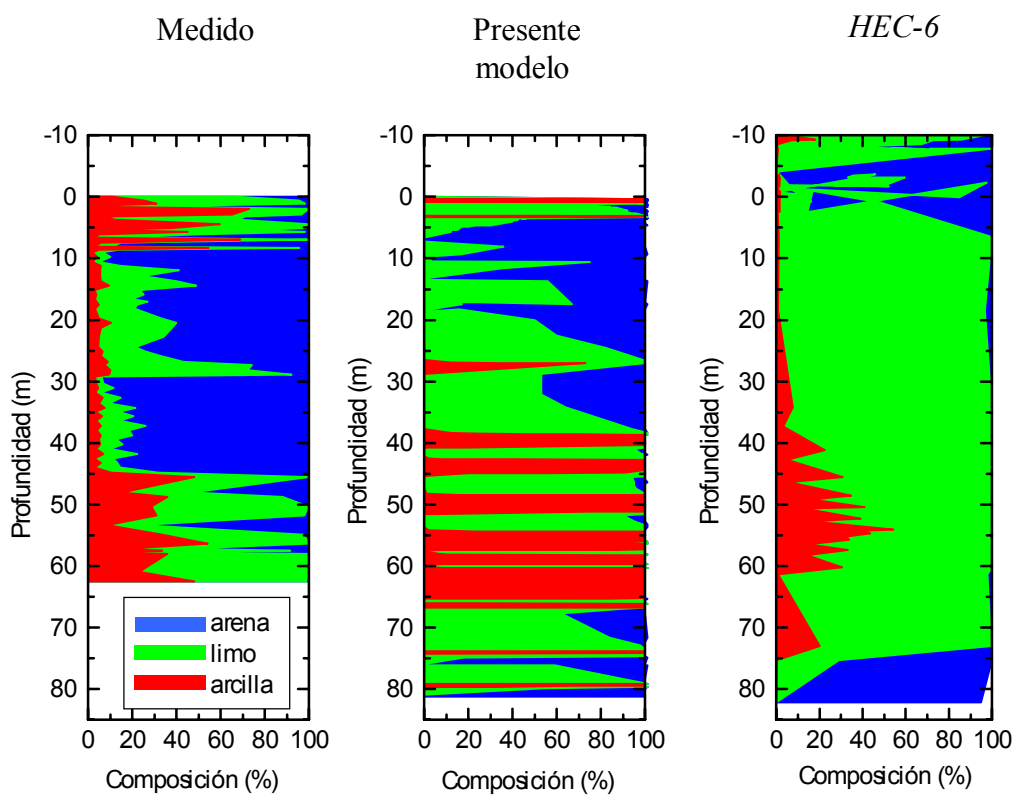
Finalmente, en la figura 5.45 se muestra la estratificación medida y calculada en la perforación “drill hole #1”.

Según se mencionó anteriormente, el modelo desarrollado en este trabajo presenta resultados de la estratificación con tendencia hacia las capas de material de una misma clase, con ausencia de zonas donde puedan hallarse arena y arcilla simultáneamente. En el caso medido estos estratos están más presentes, y el modelo *HEC-6* presenta algunas capas con esta característica.

El modelo *HEC-6* muestra una capa superficial de unos 15 metros de profundidad, compuesta por arena y limo. A continuación aparece una zona de limo de unos 35 metros de espesor, seguida por una capa de 30 metros donde se alternan limo y arcilla. La cantidad y distribución de arcilla es muy similar a la de la muestra en una zona de 15 metros de profundidad. Luego el

depósito se completa con una capa profunda de unos 10 metros de espesor y material grueso (arena).

Sin embargo, las divisiones en una zona superficial de material fino, una intermedia de material grueso, y otra inferior de fino están bastante bien representadas por el modelo bidimensional, mientras que el unidimensional presenta casi toda la profundidad abarcada por limo, con arena en las zonas superficiales y más profundas.



*Figura 5.45 – Comparación de la estratificación en la posición de la perforación de Lara y Sanders (1970).*

# Capítulo 6

## CONCLUSIONES

### 6.1 PRINCIPALES CONCLUSIONES

Las siguientes son las principales conclusiones que surgen del trabajo presentado:

- i. El modelo planteado para la simulación de la sedimentación en un embalse, de tipo bidimensional en la vertical (2D-V), ha mostrado, para la situación de validación, *un acuerdo altamente satisfactorio entre sus predicciones y los datos de mediciones disponibles*, tanto en lo que se refiere a la evolución morfológica del lecho como a la composición granulométrica de los depósitos.
- ii. Las *principales ventajas* del modelo 2D-V planteado respecto de un clásico modelo unidimensional (1D) son:
  - El modelo 2D-V reproduce más fielmente la *forma de los depósitos*, en especial el frente del delta.
  - El modelo 2D-V predice una *distribución de tamaños de partícula de los depósitos* mucho más satisfactoria que la obtenida con el modelo 1D.
- iii. La *principal desventaja* del modelo 2D-V respecto del 1D es que el *tiempo de procesamiento* del primero es del orden de 10 veces superior al del segundo, para el mismo problema.
- iv. El *nuevo elemento finito de 6 nodos* mostró una buena performance numérica en lo relativo a sus características de estabilidad y precisión.

### 6.2 APORTES ORIGINALES DE LA TESIS

En la tesis se han incorporado aportes originales del autor tanto en la formulación e implementación del modelo como en lo que hace a su resolución numérica, a saber:

- a) De acuerdo a lo consultado en la literatura especializada a nivel mundial, *es la primer aplicación de un modelo 2D-V para simular el proceso de sedimentación en un reservorio.*

- b) Además de haber incorporado el estado del arte del conocimiento en la formulación e implementación de un modelo predictivo, se han introducido una serie de *mejoras* en algunos de sus aspectos:
- Se ha formulado una metodología para que la *tensión de corte efectiva contra el lecho sea un grado de libertad del sistema*, evitando hipótesis restrictivas del tipo de “equilibrio local”.
  - Se ha derivado una *relación entre la altura efectiva de rugosidad y el coeficiente de rugosidad*, totalmente compatible con el modelo hidrodinámico, que, incorporando como parámetro a la profundidad local, provee mejores resultados que las tradicionales relaciones de Strikler y Williamson.
  - Se han planteado *predictores simples y efectivos* de identificación de formas de fondo y de distribución de tamaños de partícula del lecho durante su evolución.
- c) Desde el punto de vista de la resolución numérica del problema, se ha desarrollado una metodología novedosa para este tipo de flujos, presentándose *un nuevo elemento finito de 6 nodos*, especialmente adaptado a la formulación parabólica de las ecuaciones de movimiento. Si bien este elemento no es útil para problemas más generales (por ejemplo los elípticos, para los cuales no satisface la condición inf-sup) *mostró una buena performance en su aplicación a estos sistemas, caracterizados por la existencia de escalas espaciales disímiles*.

### 6.3 APORTES SECUNDARIOS

Además de los aportes fundamentales de la tesis, explicados en la sección anterior, se han desarrollado una serie de contribuciones secundarias, que se describen a continuación:

- I. La justificación del modelo matemático planteado se llevó a cabo a través de un análisis de escalas riguroso y detallado, que ha permitido expresar en relaciones cuantitativas las hipótesis simplificadoras, además de establecer claramente los alcances de la formulación en cuanto a procesos representados.
- II. La ausencia de necesidad de una calibración específica determinante muestra el nivel de universalidad del modelo.
- III. Al estar formulado desde primeros principios, el modelo presenta la suficiente versatilidad como para permitir incorporar fácilmente los avances científicos en este campo. Por ejemplo, aquellos provenientes de mejoras y/o generalizaciones de las funciones que predicen el intercambio de partículas entre el lecho propiamente dicho y los modos de transporte de fondo y en suspensión, tanto para material granular como cohesivo.
- IV. El nuevo elemento finito explota la forma parabólica de las ecuaciones de movimiento, conduciendo a un proceso de marcha que reduce el tiempo de cálculo y los requerimientos de memoria. Además, evita el intercambio de información entre mallas de elementos finitos correspondientes a sucesivos pasos de tiempo, lo que también es un ahorro de tiempo de procesamiento.

- V. Si bien la metodología de cálculo de la tensión de corte efectiva contra el fondo es iterativa, queda incluida dentro del proceso iterativo general para tratar los términos (advectivos) no lineales, de modo que no requiere un esfuerzo computacional extra.

#### 6.4 EXTENSIONES DEL TRABAJO

- En su estado actual de desarrollo, el modelo presentado admite simular el proceso de transporte de contaminantes adsorbidos a los sedimentos cohesivos. Este problema es de importancia en el campo de la ingeniería ambiental, debido al incremento de la carga de nutrientes a que se ven sometidos lagos y reservorios por las vertidos antrópicos. Además de producirse el conocido fenómeno de eutroficación de las aguas, tiene lugar el enterramiento de nutrientes y contaminantes tóxicos. El origen del problema está asociado al proceso de adsorción, y se produce durante la sedimentación de las partículas cohesivas. De este modo, las capas sedimentadas constituyen una potencial fuente de contaminación, no sólo por el proceso de desorción, sino por las eventuales erosiones mecánicas del lecho (dragado o “flushing” del reservorio) que devuelven a la columna de agua en tiempos cortos (días a semanas) una carga contaminante depositada, en general, durante tiempo largos (meses a años).

En la simulación de este fenómeno ya se han obtenido resultados satisfactorios (Tarela y Menéndez 1999b, 1999c). Nótese que la distribución vertical de un contaminante disuelto se puede representar con una ecuación de transporte de sedimento simplemente utilizando que  $w_{sj}=0$ , y modelando adecuadamente el término de reacción.

- El presente modelo podría generalizarse para problemas de transporte de sedimento caracterizados por una dirección principal de movimiento, pero donde el detalle en la dirección transversal debe ser tenido en cuenta. Si no existen recirculaciones significativas ni en el fondo ni en las márgenes, aún se puede plantear una formulación parabólica 3D a resolver con un esquema de marcha, donde las incógnitas hidrodinámicas y sedimentológicas están contenidas en el plano perpendicular a la dirección principal de flujo. Durante el proceso de marcha se resuelven sucesivos problemas elípticos en el plano mencionado, por lo que la generalización natural del elemento finito plano de 6 nodos sería un tetraedro de 18 nodos, con interpolación mixta en las caras de base (9 nodos) y cálculo (9 nodos) e interpolación lineal de velocidades y presión en el sentido de marcha.
- El modelo sedimentológico se podría complementar, para el caso de transporte de material cohesivo, con un modelo que represente el modo de transporte como corriente de turbidez. Este fenómeno podría tener lugar, por ejemplo, en los embalses proyectados para el aprovechamiento del río Bermejo (Argentina). Existe en la literatura una serie de modelos simples para cuantificar el fenómeno, que podrían implementarse sin mayores inconvenientes. Sin embargo, una extensión del trabajo más adecuada en esta dirección, se conseguiría a través de una formulación que represente la estructura interna de la corriente de turbidez. El primer inconveniente a sortear, desde el punto de vista de la herramienta computacional desarrollada aquí, es que este fenómeno es netamente impermanente, no pudiéndose aplicar, en general, la aproximación cuasiestacionaria.

## REFERENCIAS

1. Adams, E.W. and Rodi, W., *Modeling flow and mixing in sedimentation tanks*, Journal of Hydraulic Engineering **116**, No. 7 (1990)
2. Andrade Silva, J., *Sedimentación en embalses: una herramienta de planificación*, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil (1996).
3. Ariathurai, R. and Krone, R.B., *Finite element model for cohesive sediment transport*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, **102** No. HY3, pp. 323-338 (1976)
4. Arunajatesan, S., Sinha, N. and Menon, S., *Towards hybrid LES-RANS computations of cavity flowfields*, 38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reno (2000)
5. Babuska, I., *Error bounds for finite element methods*, Num. Math. **16**, pp. 322-333 (1971)
6. Babuska, I., *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Num. Math. **20**, pp. 179-192 (1973)
7. Bagnold, R.A., *Experiments on a gravity-free dispersion of large solids spheres in a Newtonian fluid under shear*, Proc. Royal Society London (A) **225**, 49 (1954)
8. Basson, G.R., *Hydraulic measures to deal with reservoir sedimentation: flood flushing, sluicing and density current venting*, 3rd International Conference on River Floods Hydraulics, Stellenbosh (1997)
9. Basson, G.R. and Tsehlo, T.C., *Mohale reservoir sedimentation*, 3rd International Conference on River Floods Hydraulics, Stellenbosh (1997)
10. Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1967)
11. Bateman, A., López, R., Gómez, M. Y Dolz, J., *Metodologías para el ajuste y estimación de la resistencia hidráulica al flujo en lamina libre*, XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Santiago de Chile (1994)
12. Batura, D.G., *Ladysmith flood control scheme sedimentation of the Qedusizi reservoir*, 3rd International Conference on River Floods Hydraulics, Stellenbosh (1997)
13. Borland, W.M. and Miller, C.R., *Distribution of sediments in large reservoirs*, Proc. ASCE **84**, HY2 (1958)

- 
14. Borland, W.M., *Reservoir Sedimentation*, In: River Mechanics, vol. II chapter 29, H.W. Shen (Ed.), Fort Collins (1971)
  15. Borthwick, A.G.L. and Akponasa, G.A., *Reservoir flow prediction by contravariant shallow water equations*, Journal of Hydraulic Engineering **123**, No. 5, pp. 432-439 (1997)
  16. Bradshaw, P. (Ed.), *Turbulence*, Springer-Verlag (1978)
  17. Brea, J.D., Busquets, M.S. y Spalletti, P.D., *Generación y transporte de sedimentos en la alta cuenca del río Bermejo. Impacto en la Hidrovía, Delta del Paraná y Río de la Plata*, Informe INA-LHA-177-04-99 (1999)
  18. Brezzi, F., *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising for lagrangian multipliers*, RAIRO (Rev. Franc. Auto. Inf. Rech. Oper.), 8-R2 pp. 129-151 (1974)
  19. Brooks, A. and Hughes, T.J.R., *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **32**, pp. 199-259 (1982)
  20. Brown, C.B., *Discussion of "sediment in reservoirs", by B.J. Witzig*, Transactions ASCE vol. **109** (1944)
  21. Brune, G.H., *Trap efficiency of reservoirs*, American Geophysical Union Transactions, vol. **34** No 3 pp. 407-418 (1953)
  22. Burden, R.L. and Faires, J.D., *Numerical Analysis*, PWS, Boston (1985)
  23. Casonati, M. and Gallerano, F., *A finite difference self-adaptive mesh solution of flow in a sedimentation tank*, International Journal for Numerical in Fluids **10** (1990)
  24. Cebal, J.R. and Lohner R., *Load transfer for viscous fluid-structure interaction*, Computational Mechanics, New Trends and Applications, S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (Eds.), Barcelona (1998)
  25. Chao, P.C. and Ahmad, S., *A mathematical model for resevoir sedimentation planning*, International Water Power & Dam Construction **37**, No. 1, pp. 45-52 (1985)
  26. Chang, H.H., Harrison, L.L., Lee, W. and Tu, S., *Numerical modeling for sediment-pass-through reservoirs*, Journal of Hydraulic Engineering **122**, No. 7, pp. 381-388 (1996)
  27. Chen, Y.H., *Overview of modeling sediment in reservoirs*, In: Notes on Sediment Management in Reservoirs, Water Resouces Publications, LLC, Highlands Ranch (1993)
  28. Chen, Y.H., *Development of a quasi-nonequilibrium reservoir sedimentation model, RESSED*, Second Seminar on Stream Sedimentation Models, Sedimentation Subcommittee, Interagency Advisory Committe on Water Data, Denver (1988)
  29. Cheng, K.J., *Bottom-boundary condition for non-equilibrium transport of sediment*, Journal of Geophysical Research **89**, No. C5 (1984)
-

30. Cheng, N.S., *Effects of concentration on settling velocity of sediment particles*, Journal of Hydraulic Engineering **123**, No. 8, pp. 728-731 (1997)
31. Cholley, J.P. and Cunge, J.A., *Simulation of unsteady flow in alluvial streams*, Applied Mathematical Modelling, vol. 4 (1980)
32. Churchill, M.A., *Discussion of "Analysis and use of reservoir sedimentation data" by L.C. Gottschalk*, Federal Inter-Agency Sedimentation Conference, Denver 1947, Proc. pp. 139-140 (1948)
33. Codina, R., *Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **156**, pp. 185-210 (1997)
34. Cristofano, E.A., *Area increment method for distributing sediment in a reservoir*, U.S. Bureau of Reclamation, Albuquerque (1953)
35. Croad, R.N., *A comparison of numerical schemes used in river morphology problems*, Proceedings 9<sup>th</sup> Australian Fluid Mechanics Conference, University of Auckland, New Zealand (1986)
36. Crotonino, A. and Holz, K.P., *Numerical moveable-bed models for practical engineering*, Applied Mathematical Modeling **8**, No. 1 (1984)
37. Deardorff, J.W., *A numerical study of three dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers*, Journal of Fluid Mechanics **41**, part 2, pp. 453-480 (1970)
38. De Sampaio, P.A.B., *A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **31**, pp. 1135-1149 (1991)
39. Einstein, H.A., *Final report spawning grounds*, University of California, Hydr. Eng. Lab. (1965)
40. Engelund, F. and Fredsoe, J., *A sediment transport model for straight alluvial channels*, Nordic Hydrology **7**, pp. 293-306 (1976)
41. Engelund, F. and Fredsoe, J., *Hydraulic theory of alluvial rivers*, Institute of Hydrodynamics and Hydraulics, Technical University of Denmark, Lyngby (1982)
42. Engelund, F. and Hansen, E., *A monograph of sediment transport in alluvial streams*, Danish Technical Press, Copenhagen (1972)
43. Espinosa Jiménez, C. y Jégat, H.J., *Valoración del impacto de la sedimentación en el embalse sobre la generación hidroeléctrica*, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil (1996).
44. Fan, S. and Springer, F.E., *Major sedimentation issues at the Federal Energy Regulatory Commission*, Notes on Sediment Management in Reservoirs, Water Resources Publications, LLC, Highlands Ranch (1993)
45. Fan, S., *An interagency overview of selected sedimentation models*, In: Notes on Sediment Management in Reservoirs, Water Resources Publications, LLC, Highlands Ranch (1993)

- 
46. Farias, H.D. y Mattar, M.T., *Procesos de deposición de sedimentos en embalses extensos. Análisis de un caso particular*, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil (1996).
  47. Fischer, H.B., *Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 5, Annual Reviews Inc., Palo Alto (1973)
  48. Fortin, M., *Old and new finite elements for incompressible flows*, Int. J. Numer. Methods in Fluids **1**, pp. 347-364 (1981)
  49. Fowler, L.C., *Determination of location and rate of growth of delta formation*, U.S. Army Corps of Engineers, Missouri River Division, Sediment memorandum No.6, Omaha (1957)
  50. Fredsoe, J., *Curso latinoamericano de mecánica fluvial*, Organizado por el Laboratorio de Hidráulica Aplicada del INCyTH (1985)
  51. Galappatti, R., *A depth-integrated model for suspended sediment transport*, Communications in Hydraulics, Delf University of Technology, Report No. 83-7 (1983)
  52. Gee, D.M., *HEC-6: Reservoir sediment control applications*, in Notes on sediment management in reservoirs: National and International perspectives, Water Resources Publications, LLC, Highlands Ranch (1993)
  53. Gill, M.N., *Analysis of reservoir sedimentation*, Water Power & Dam Construction **30**, No. 12, pp. 29-31 (1978)
  54. Graf, W.H., *The hydraulics of reservoir sedimentation*, Water Power & Dam Construction **35**, No. 4, pp. 45-52 (1983a)
  55. Graf, W.H., *The behaviour of silt-laden current*, Water Power & Dam Construction **35**, No. 9, pp. 33-38 (1983b)
  56. Graf, W.H., *Storage losses in reservoirs*, Water Power & Dam Construction **36**, No. 4, pp. 37-40 (1984)
  57. Gray, W.G. (Ed.), *Physics-Based Modeling of Lakes, Reservoirs, and Impoundments*, Report ASCE, New York (1986)
  58. Gresho, P.M. and Lee, R.L., *Don't suppress the wiggles – They're telling you something !*, Computers & Fluids **9**, pp. 223-253 (1981)
  59. Guy, H.P., Simons, D.B. and Richardson, E.V., *Summary of Alluvial Channel Data from Flume Experiments, 1956-1961*, U.S. Geological Survey, Professional Paper 462-I (1966)
  60. Han, Q. and He, M., *A mathematical model for reservoir sedimentation and fluvial processes*, Int. Journal of Sediment Res., IRTCES, vol. **5** No 2, pp. 43-84 (1990)
  61. Harrison, A.J.M. and Owen, M.W., *Siltation of fine sediments in estuaries*, XIV Congress of the IAHR, Paris (1971)
-

62. Heinrich, J.C., Hayakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C. and Mitchell, A.R., *An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **11**, pp. 131-143 (1977)
63. Heinrich, J.C., *On quadratic elements in finite element solutions of steady-state convection-diffusion equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **15**, pp. 1041-1052 (1980)
64. HEC-6, *Scour and Deposition in Rivers and Reservoirs*, U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center (1993)
65. Henderson, F.M., *Open channel flow*, Mac Millan Pub. Co, New York (1966)
66. Herrmann, H.J., *Physics of granular media*, Proceedings First International Conference on Complex Systems in Computational Physics, Buenos Aires (1993)
67. Hirsch, C., *Numerical computations of internal and external flow*, Vol. 1: *Fundamentals of numerical discretization*, J. Wiley & Sons, New York (1988)
68. Hirsch, C., *Numerical computations of internal and external flow*, Vol. 2: *Computational methods for inviscid and viscous flow*, J. Wiley & Sons, New York (1989)
69. Hirt, C.W., *Heuristic stability theory for finite-difference equations*, Journal of Computational Physics **2**, pp. 339-355 (1968)
70. Holly, F.M. and Rahuel, J.L., *New numerical/physical framework for mobile-bed modelling. Part I*, Journal of Hydraulic Research **28**, No. 4, pp. 401-416 (1990a)
71. Holly, F.M. and Rahuel, J.L., *New numerical/physical framework for mobile-bed modelling. Part II: Test applications*, Journal of Hydraulic Research **28**, No. 5, pp. 545-564 (1990b)
72. Hotchkiss, R. and Parker, G., *Reservoir sediment sluicing – Laboratory study*, In: Abt, S. (ed.) *Hydraulic Engineering*, pp. 1073-1078 (1988)
73. Hotchkiss, R. and Parker, G., *Laboratory modelling of reservoir sedimentation and sluicing: scale considerations*, International Conference Physical Modelling of Transport and Suspensión, ASCE, pp. 14B-25-14B-30 (1990)
74. Howard, C.S., *Density currents in Lake Mead*, Proceedings Minnesota International Hydraulic Convention, pp. 355-368 (1953)
75. Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Brooks, A., *Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation*, Journal of Computational Physics **30**, pp. 1-60 (1979a)
76. Hughes, T.J.R., and Brooks, A., *A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*, in: T.J.R. Hughes, ed., *FEM for Convection Dominated Flows*, ASME, New York, (1979b)
77. Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M., *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babulka-Brezzi condition: A stable*

- 
- Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **59**, pp. 85-99 (1986a)
78. Hughes, T.J.R., Mallet, M. and Mizukami, A., *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **54**, pp. 341-355 (1986b)
79. Hughes, T.J.R. and Franca, L.P., *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **65**, pp. 85-96 (1987)
80. Hughes, T.J.R., *Multiscale phenomena: Greens functions, Subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **127**, pp. 387-401 (1995)
81. Idelsohn, S., Nigro, N., Storti, M. And Buscaglia, G., *(SU+C)PG: A Petrov-Galerkin formulation for advection-reaction-diffusion problems*, Int. Rept. N° 1-12/94, INTEC (1994)
82. Israeli, M. and Lin, A., *Iterative numerical solutions and boundary conditions for the parabolized Navier-Stokes equations*, Computers & Fluids **13**, No. 4, pp. 397-409 (1985)
83. Jackson, C.P. and Cliffe, K.A., *Mixed interpolations in primitive variable finite element formulations for incompressible flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **17**, pp. 1659-1681 (1981)
84. Jiahua, F., *Turbid density currents in reservoirs*, Water International **11**, pp. 107-116 (1986)
85. Jin, X. and Kranenburg, C., *Quasi-3D Numerical Modeling of Shallow-Water Circulation*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. **119**, No. 4, pp. 458-472 (1993)
86. Johnson, B.H., *A review of numerical reservoir hydrodynamic modeling*, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Hydraulics Laboratory, Technical Report E-81-2 (1981)
87. Jorgensen, S.E. and Vollenweider, R.A., *Problemas de lagos y reservorios*, Directrices para la gestión de lagos, vol 1, Comité Internacional de Ambientes Lacustres, PNUMA, Jorgensen and Vollenweider (Eds.), pp. 27-32 (1989)
88. Karam filho, J. and Loula, A.F.D., *On stable equal-order finite element formulations for incompressible flow problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **34**, pp. 655-665 (1992)
89. Karpic, S.R. and Raithby, G.D., *Laterally averaged hydrodynamic model for Reservoir predictions*, Journal of Hydraulic Engineering **116**, No. 6, pp. 783-798 (1990)
90. Kelly, D.W., Nakazawa, S., Zienkiewicz, O.C. and Heinrich, J.C., *A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **15**, pp. 1705-1711 (1980)
91. Kerssens, P.J.M. and van der Zwaard, J.J., *Hydraulic and morphological impacts of dam construction*, Delft Hydraulics Laboratory, Publication No 238, Delft (1980)
-

92. King, I.P., *Strategies for finite element modeling of three-dimensional hydrodynamic systems*, Advances in Water Resources, June (1985)
93. Krone, R.B., *Flume studies of the transport of sediment in estuarial shoaling proceses*, Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley (1962)
94. Lara, J.M. and Sanders, J.I., *The 1963-64 Lake Mead Study*, U.S. Bureau of Reclamation, report REC-OCE-70-21, Denver and Boulder city (1970)
95. Larock, B., Chun, W.K.C. and Schamber, D.R., *Computation of sedimentation basin behaviour*, Water Resources **17**, No. 8 (1983)
96. Le Normant, C., Peltier, E. and Teisson, C., *Three dimensional modelling of suspended sediment transport in the Loire estuary*, Proceedings of HYDRA 2000, Thomas Telford (Ed.), vol. 4, pp. 122-127, London (1995)
97. Lin, B., Falconer, R., *Numerical modelling of three-dimensional suspended sediment for estuarine and coastal waters*, Journal of Hydraulic Research **34**, No. 4, pp. 435-456 (1996)
98. Lopez, J.L., *Mathematical modeling of sediment deposition in reservoirs*, Ph.D. Dissertation, Civil Engineering Dept., Colorado State University, Fort Collins (1978)
99. Marshall, G., *Solución numérica de ecuaciones diferenciales, Tomo 2: Ecuaciones en derivadas parciales*, Editorial Reverté, Buenos Aires (1985)
100. Maza Alvarez, J.A. y García Flores, M., *Manual de Hidráulica Fluvial, Capítulo 10: Transporte de Sedimentos*, Comisión Nacional del Agua, México (1995)
101. McCarthy, T.A., Wang, S.Y., Su, T.Y. and Hu, K.K., *Multi-shape function finite element model for three-dimensional flow simulation*, Third International Symposium on River Sedimentation, Jackson (1986)
102. McQuirk, J.J. and Rodi, W., *A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open-channel flow*, Journal of Fluid Mechanics **86**, pp.761-781 (1978)
103. Mendiondo, E.M., *Hidrosedimentología de "filtros verdes": necesidades actuales, diseño y propuestas interdisciplinarias*, Taller regional sobre tópicos básicos y aplicados de la hidráulica fluvial, Santa Fe (1998)
104. Meyer-Peter, E. and Müller, R., *Formulas for bed-load transport*, Report on Second Meeting of International Association for Hydraulic Research, pp. 39-64, Stockholm (1948)
105. Menéndez, A.N. and Ramaprian, B.R., *Wall functions for unsteady turbulent boundary layers*, Proceedings Fourth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows, Swansea (1985)
106. Menéndez, A.N., Bombardelli, F.A. y Tarela, P.A., *Estudio de la afectación del régimen de sedimentación y del transporte de contaminantes y temperatura en el proyecto de profundización del puerto de Buenos Aires*, Informe INA-LHA-01-162-97 (1997a)
107. Menéndez, A.N., Castellano, R. y Tarela, P.A., *Estudio del impacto de obras de dragado y relleno en el puerto de Buenos Aires*, Informe INA-LHA 01-157-97 (1997b)

- 
108. Menéndez, A.N., *Sedimentologic modeling selection based on study scale*, Journal of Hydraulic Engineering **123**, No. 10, pp. 922-925 (1997c)
  109. Menéndez, A.N. and Castellano, R., *Simulation of sedimentation in an estuary due to an artificial island*, 4<sup>th</sup> International Conference HydroInformatics 2000, Cedar Rapids (2000)
  110. Miyanaga, Y., Tanaka, M. and Hino, M., *Termal stratification: their prediction and control*, In: Water quality and its control, IAHR Hydraulic structures design manual, M. Hino (Ed.), Róterdam (1994)
  111. Modica, C., Foti, E., Coco, G., Campisano, A. and Franza, F., *A methodology for the evaluation of long period reservoir sedimentation: an application for two sicilian reservoirs*, 3<sup>rd</sup> International Conference on River Floods Hydraulics, Stellenbosc (1997)
  112. Murakami, K., Tsuruya, H. and Irie, I., *A three-dimensional model of sediment transport with considerations of fluid mud*, Proceedings of HYDRA 2000, Thomas Telford (Ed.), vol. 4, pp. 128-133, London (1995)
  113. Nicholson, J. and O'Connor, B.A., *Cohesive sediment transport model*, Journal of Hydraulic Engineering **112**, No. 7, pp. 621-640 (1986)
  114. Olsen, N.R.B., *A three-dimensional numerical model for simulation of sediment movements in waterintakes*, Dissertation for the Dr. Ing. Degree, University of Trondheim, IVB-rapport B-2-1991-5 (1991)
  115. Olsen, N.R.B., *Two-dimensional numerical nodelling of flushing processes in water reservoirs*, Journal of Hydraulic Research **37**, No. 1, pp. 3-16 (1999)
  116. Olsen, N.R.B. and Kjellesvig, H.M., *Three-dimensional numerical nodelling of bed changes in a sand trap*, Journal of Hydraulic Research **37**, No. 2, pp. 189-198 (1999)
  117. Oñate, E., *On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Publication CIMNE N° 81, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona (1996)
  118. Partheniades, E., *A study of erosion and deposition of cohesive soils in salt water*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley (1962)
  119. Partheniades, E., *A summary of the present knowledge of the behavior of fine sediments in estuaries*, MIT Hydrodynamics Laboratory, Technical Note 8 (1964)
  120. Partheniades, E., *Erosion and deposition of cohesive soils*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, **91** pp. 755-771 (1965)
  121. Partheniades, E., *Estuarine Sediment Dynamics and Shoaling Processes*, Handbook of Coastal and Ocean Engineering, J.B. Herbich (Ed.) (1988)
  122. Pelletier, D., Fortin, A. And Camarero, R., *Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible? (Or how simple flows can cause headaches!)*, Int. J. of Numerical Methods in Fluids **9**, pp. 99-112 (1989)
-

123. Pujol, A. y Menéndez, A.N., *Análisis unidimensional de escurrimiento en canales*, EUDEBA, Buenos Aires (1987)
124. Raudkivi, A.J., *Loose Boundary Hydraulics*, Pergamon Press, Oxford (1976)
125. Rice, J. and Schnipke, R., *An equal order velocity pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **58**, pp. 135-149 (1986)
126. Rodi, W., *Turbulence models and their application in hydraulics – A state of the art review*, Institut für Hydromechanik, University of Karlsruhe, Karlsruhe (1980)
127. Rouse, H., *Engineering Hydraulics*, J. Wiley and Sons (1950)
128. Sani, R.L., Gresho, P.M., Lee, R.I. and Griffiths, D.F., *The cause and cure (?) of the spurious pressures generated by certain finite element method solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: part 1*, *Int. J. of Numerical Methods in Fluids* **1**, pp. 17-43 (1981a)
129. Sani, R.L., Gresho, P.M., Lee, R.I., Griffiths, D.F. and Engelman, N., *The cause and cure (?) of the spurious pressures generated by certain finite element method solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: part 2*, *Int. J. of Numerical Methods in Fluids* **1**, pp. 171-204 (1981b)
130. Scartascini, G. y Dalla Salda, H.L., *Método usado por Agua y Energías Eléctrica Sociedad del Estado (República Argentina) para determinar el proceso de la colmatación de embalses*, XIV Congreso Internacional de Grandes Presas, Río de Janeiro 1982, publicado en Revista Unica No. 30 (1982)
131. Schalchli, U., *Reservoir sedimentation and flushing in a hydraulic model*, In: *Topics in Hydraulic Modelling*, Proceedings 22<sup>nd</sup> IAHR Congress, Lausanne, Switzerland, pp. 240-245 (1987)
132. Schoklitsch, A., *Legamos y acarreos*, Acta cuyana de ingeniería, volumen III, Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, San Juan (1961)
133. Shakir, A.S., *Sedimentation problems in Tarbela dam in Pakistan*, Proceedings of HYDRA 2000, Thomas Telford (Ed.), vol. 4, pp. 272-277, London (1995)
134. Shen, H.W., *River Mechanics*, vol II, H.W. Shen (Ed.), Colorado (1971)
135. Shimizu, Y., Yamaguchi, H. and Itakura, T., *Three dimensional computation of flow and bed deformation*, *Journal of Hydraulic Engineering* **116**, No. 9 (1990)
136. Simons, D.B. and Senturk, F., *Sediment transport technology*, Water Resources Publications, Fort Collins (1977)
137. Sloff, C.J., *Reservoir sedimentation: a literature survey*, Communications on hydraulic and geotechnical engineering Report No 91-2, Delf University of Technology, Delft (1991)
138. Sloff, C.J., *Sedimentation in reservoirs*, Communications on hydraulic and geotechnical engineering Report No 97-1, Delf University of Technology, Delft (1997)

- 
139. Soo, S.L., *Fluid dynamics of multiphase systems*, Blaisdell Pub. Co. (1967)
  140. Soulaïmani, A., Fortin, M., Ouellet, Y., Dhatt, G. and Bertrand, F., *Simple continuous pressure elements for two- and three-dimensional incompressible flows*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **62**, pp. 47-69 (1987)
  141. Storti, M., Nigro, N. and Idelsohn, S., *A general algorithm for compressible and incompressible flow. Stability analysis and explicit time integration*, *Int. Journal for Numerical Methods in Heat and Fluid Flow* **7**, pp. 50-77 (1996)
  142. Sumer, B.M., Kosakiewicz, A., Fredsoe, J. and Deigaard, R., *Velocity and concentration profiles in sheet-flow layer of movable bed*, *Journal of Hydraulic Engineering* **122**, No. 10, pp. 549-558 (1996)
  143. Tarela, P.A., *Simulación numérica de la evolución del perfil de corrientes en flujos a superficie libre*, Informe INCyTH-LHA-115-01-92 (1992a)
  144. Tarela, P.A. y Menéndez, A.N., *Un modelo hidrodinámico para flujo estratificado a superficie libre*, *Mecánica Computacional* vol. XIII, M. Vénere (Ed.), Bariloche (1992b)
  145. Tarela, P.A., *Un modelo para la evolución de la distribución vertical de contaminantes*, Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (1993)
  146. Tarela, P.A., *Modelación matemática del fenómeno de sedimentación en embalses*, Informe final Beca de Iniciación, CONICET e informe INCyTH LHA-115-07-95 (1995)
  147. Tarela, P.A., Informe final Beca de Perfeccionamiento, CONICET (1997)
  148. Tarela, P.A., Menéndez, A.N., Bombardelli F.A. y Vilela, C.P.X., *Modelación hidrosedimentológica en tomas de agua afectadas por un régimen de marea*, *Mecánica Computacional* vol. XVIII, E. Dari, C. Padra y R. Saliba (Eds.), Bariloche (1997)
  149. Tarela, P.A. and Menéndez, A.N., *Hydrosedimentologic model to predict reservoir sedimentation*, *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (Eds.), Barcelona (1998a)
  150. Tarela, P.A., Menéndez, A.N., Bombardelli F.A. y Jaime P., *Metodología bidimensional para la predicción de la evolución de lechos fluviales*, XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Oaxaca, México (1998b).
  151. Tarela, P.A. and Menéndez, A.N., *A model to predict reservoir sedimentation*, *Lakes & Reservoirs: Research and Management* **4**, pp. 121-133 (1999a)
  152. Tarela, P.A. and Menéndez, A.N., *The fate of contaminants sorbed in fine grained sediment into a reservoir*, 8th. International Conference on the Conservation and Management of Lakes, Copenhagen (1999b)
  153. Tarela, P.A. y Menéndez, A.N., *El destino de los contaminantes adsorbidos en los sedimentos dentro de un embalse*, Congreso Argentino de Mecánica Computacional MECOM'99, Mendoza (1999c)

154. Tarela, P.A. y Spalletti, P.D., *Comparación de modelos matemáticos para sedimentación en embalses*, Informe INA LHA-S5-091-00 (2000)
155. Tarela, P.A. y Menéndez, A.N., *Modelo matemático 2D-V para la predicción del transporte y deposición de sedimentos en reservorios*, trabajo aceptado para su presentación en el XIX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Córdoba (2000)
156. Taylor, C., Hughes, G. and Morgan, K., *Finite element solution of one-equation models of turbulent flow*, Journal of Computational Physics **29**, pp. 163-172 (1978)
157. Teisson, C., *Cohesive suspended sediment transport: feasibility and limitations of numerical modeling*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, **29**, No. 6, pp. 755-769 (1991)
158. Tennekes, H. and Lumley, J.L., *A first course in turbulence*, MIT Press, Cambridge (1972)
159. Thomas, W.A. and Prasuhn, A.L., *Mathematical modeling of scour and deposition*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, **103** No. HY8 pp. 851-863 (1977)
160. Tingsanchali, T. and Rodi, W., *Depth averaged calculation of suspended sediment transport in rivers*, Third International Symposium on River Sedimentation, Mississippi (1986)
161. Toffaleti, F.B., *Definitive computations of sand discharge in rivers*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, **95** No. HY1, pp. 225-248 (1969)
162. Toniolo, H., *Análisis sedimentológico del río Bermejo*, Informe Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe (1995)
163. Toro, F.M., Meijer, K. and van Rijn, L.C., *Quasy-3D and fully-3D modelling of suspended sediment transport*, ASCE\_Hydraulics Conference, New Orleans (1989)
164. U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center (HEC), *HEC-6, Scour and deposition in rivers and reservoirs, User's Manual*, Davis (1991)
165. van Rijn, L.C., *Sediment transport, Part I: Bed load transport*, Journal of Hydraulic Engineering **110**, No. 10, pp. 1431-1456 (1984a)
166. van Rijn, L.C., *Sediment transport, Part II: Suspended load transport*, Journal of Hydraulic Engineering **110**, No. 11, pp. 1613-1641 (1984b)
167. van Rijn, L.C., *Sediment transport, Part III: Bed forms and alluvial Roughness*, Journal of Hydraulic Engineering **110**, No. 12, pp. 1733-1754 (1984c)
168. van Rijn, L.C., *Mathematical modeling of morphological processes in the case of suspended sediment transport*, Thesis approved by the Delft University of Technology, Delft (1987)
169. van Rijn, L.C., van Rossum, H. and Termes A.P.P., *Field verification of 2-D and 3-D suspended sediment models*, Journal of Hydraulic Engineering **116**, No. 10, pp. 1270-1287 (1990)
170. van Rijn, L.C., *Principles of Sediment Transport in Rivers, Estuaries and Coastal Seas*, Aqua Publications, The Netherlands (1993)

- 
171. Veltrop, J.A., *Water, dams and hydropower in the coming decades*, International Water Power & Dam Construction **43**, No. 6, pp. 37-44 (1991)
  172. Ven Te Chow, *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokio (1959)
  173. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., *An introduction to computational fluid dynamics – The finite volume method*, Longman Scientific & Technical, Essex (1995)
  174. Voogt, L., van Rijn, L.C. and van der Berg, J.H., *Sediment transport of fine sands at high velocities*, Journal of Hydraulic Engineering **117**, No. 7, pp. 869-890 (1991)
  175. Wada, A., *Sediment-laden flows: Control of inflow and outflow*, In: Water quality and its control, IAHR Hydraulic structures design manual, M. Hino (Ed.), Róterdam (1994)
  176. Walters, R. and Carey, G., *Analysis of spurious oscillations modes for the shallow water and Navier-Stokes equations*, Computer and Fluids **11**, N° 1, pp. 51-68 (1983)
  177. Wang, Z.B., *Mathamatical modeling of morphological processes in estuaries*, Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering, Report No. 89-1 (Doctoral Thesis), Delft (1989)
  178. Wang, S.S.Y. and Adef, S.E., *Three dimensional modeling of river sedimentation processes*, Proceedings International Symposium on River Sedimentation, Jackson (1986)
  179. Warming, R.F. and Hyett, J., *The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods*, Journal of Computational Physics **14**, pp. 159-179 (1974)
  180. Winterwerp, J.C., *A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sediment*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, **36**, No. 3, pp.309-326 (1998)
  181. Yoon, T.H. and Kim, M.K., *Quasi-3D hydrodynamic model and its application to 3-D sediment transport model in a shallow reservoir*, Proceedings of HYDRA 2000, Thomas Telford (Ed.), vol. 4, pp. 237-241, London (1995)
  182. Yu, C.C. and Heinrich, J.C., *Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **23**, pp. 883-901 (1986)
  183. Yu, C.C. and Heinrich, J.C., *Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **24**, pp. 2201-2215 (1987)
  184. Yücel, O. and Graf, W.H., *Bed-load deposition and delta formation – A mathematical model*, Lehigh University (1973)
  185. Ziegler, C. and Nisbet, B., *Fine-grained sediment transport in Pawtuxet river, Rhode Island*, Journal of Hydraulic Engineering **121**, No. 11, pp. 773-781 (1995)
  186. Ziegler, C. and Nisbet, B., *Long term simulation of fine-grained sediment transport in large reservoirs*, Journal of Hydraulic Engineering **120**, No. 5, pp. 561-576 (1994)

187. Zienkiewicz, O.C., Qu, S., Taylor, R.L. and Nakazawa, S., *The patch test for mixed formulations*, , International Journal for Numerical Methods in Engineering **23**, pp. 1873-1883 (1986)
188. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, volume 1, McGraw-Hill (1989)
189. Zienkiewicz, O.C. and Wu, J., *Incompressibility without tears – How to avoid restrictions of mixed formulations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **32**, pp. 1189-1203 (1991)
190. Zyserman, J.A., *Modelación avanzada de problemas de ingeniería costera*, Curso de posgrado en ingeniería hidráulica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires (2000)

# **ANEXOS**



## ANEXO 1

### CONDICIONES DE CONTORNO HIDRODINÁMICAS

#### A1.1 CONDICIONES DE CONTORNO EN EL CAUCE

Sobre los contornos sólidos se debe considerar una condición de borde para el campo de velocidad. Dado el carácter vectorial de este campo, en general la información se desdobra en sus componentes normal y tangencial.

Respecto de la componente normal, para obtener un modelo 2D mediante integración lateral resulta conveniente definir el cauce mediante las superficies  $x_2 = b_i(x_1, x_3, t)$  y  $x_2 = b_d(x_1, x_3, t)$ , de acuerdo al esquema de la figura A1.1 (Gray 1986):

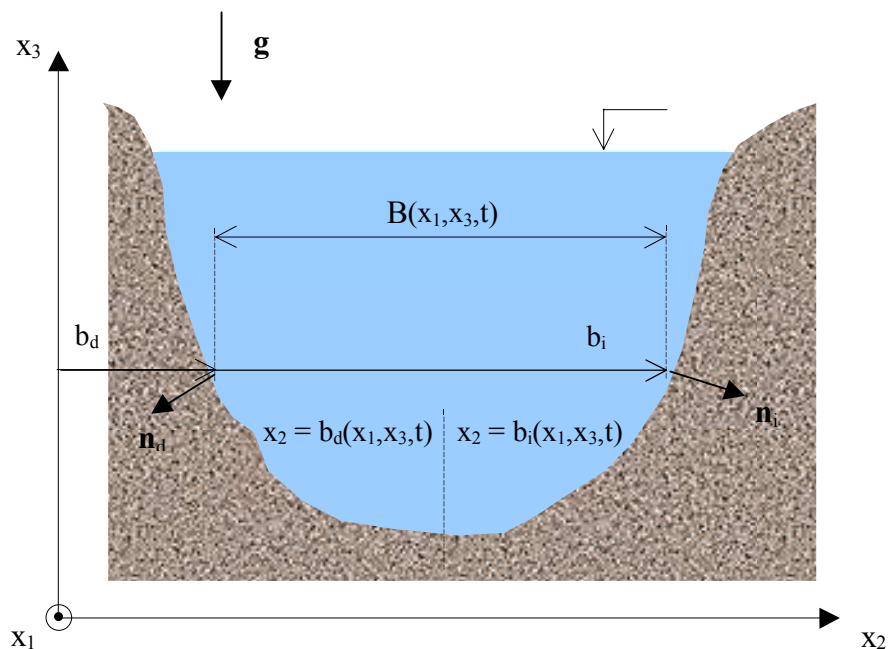


Figura A1.1 – Sección transversal de flujo y definición de funciones en el cauce.

Las funciones auxiliares  $F_i = x_2 - b_i(x_1, x_3, t)$  y  $F_d = x_2 - b_d(x_1, x_3, t)$  son tales que se anulan sobre el cauce, de modo que sus gradientes resultan normales al mismo. De esta forma, los siguientes vectores unitarios definen la normal en el cauce exterior al fluido:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i &= \frac{1}{N_i} \nabla F_i \\ \mathbf{n}_d &= -\frac{1}{N_d} \nabla F_d \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

donde  $N_i = |\nabla F_i|$  y  $N_d = |\nabla F_d|$ .

Si  $\sigma$  es el flujo de masa hacia el interior del lago, por unidad de superficie del cauce, entonces la condición normal sobre el cauce derecho es:

$$-\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_d = \sigma_d \quad (\text{A1.2})$$

que puede escribirse en la forma

$$-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_d N_d = \frac{\sigma_d N_d}{\rho} = \frac{\sigma_d^N}{\rho} \quad (\text{A1.3})$$

donde  $\sigma_d^N$  representa el flujo de masa a través de  $b_d$  por unidad de área en el plano  $(x_1, x_3)$ .

Expandiendo (A1.3) en componentes escalares se obtiene:

$$-u_1 \frac{\partial b_d}{\partial x_1} + u_2 - u_3 \frac{\partial b_d}{\partial x_3} = \frac{\sigma_d^N}{\rho} \quad (\text{A1.4})$$

donde se sobreentiende que la velocidad está evaluada sobre el cauce.

Sobre el cauce izquierdo se obtiene un resultado similar:

$$-u_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + u_2 - u_3 \frac{\partial b_i}{\partial x_3} = -\frac{\sigma_i^N}{\rho} \quad (\text{A1.5})$$

En las expresiones (A1.4) y (A1.5)  $\sigma_d^N$  y  $\sigma_i^N$  se han definido positivas para flujo entrante al reservorio.

Entonces, el flujo total de masa que ingresa al reservorio desde el cauce es:

$$\sigma_B = -\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i N_i - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_d N_d = \sigma_i^N + \sigma_d^N \quad (\text{A1.6})$$

o, utilizando (A1.1)

$$\sigma_B = -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla F_i + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla F_d = -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla F \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A1.7})$$

En el caso en que el flujo neto  $\sigma_B$  es nulo, la ec. (A1.2) generalizada a cualquier punto del cauce, con normal  $\mathbf{n}_b$ , es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_b = 0 \quad (\text{A1.8})$$

indicando la impenetrabilidad el mismo.

Por su parte, la información de la componente tangencial del campo de velocidad está referida a la condición de no deslizamiento sobre el lecho:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_b = 0 \quad (\text{A1.9})$$

donde  $\mathbf{t}_b$  es el vector unitario tangencial al lecho ( $\mathbf{n}_b \cdot \mathbf{t}_b = 0$ ).

Si las condiciones (A1.8) y (A1.9) se deben cumplir simultáneamente, entonces el campo de velocidad se anula en el lecho ( $\mathbf{u} = 0$ ).

Si la superficie donde se impone la condición de borde del campo de velocidad se mueve con velocidad  $\mathbf{u}_b$ , y no hay flujo neto de masa a través de la misma, entonces (A1.8) y (A1.9) se generalizan a:

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n}_b = 0 \quad (\text{A1.10})$$

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{t}_b = 0 \quad (\text{A1.11})$$

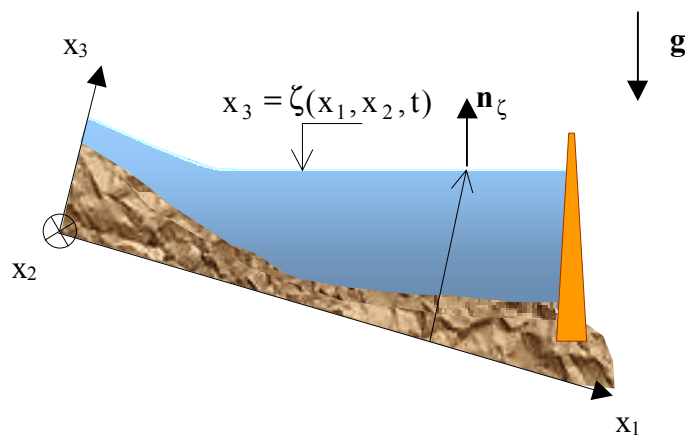
que representan las mismas condiciones de impenetrabilidad y no deslizamiento, respectivamente, pero referidas al contorno móvil. Estas últimas relaciones se utilizan en el caso en que no se desea resolver la capa límite adyacente al fondo, y se imponen sobre una superficie virtual paralela al mismo. En general, la velocidad  $\mathbf{u}_b$  se calcula con el valor que el perfil logarítmico asociado a una capa límite desarrollada alcanza a la distancia desde el lecho donde se introduce la superficie virtual.

Obsérvese que (A1.10) y (A1.11) implican  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b$  en el lecho.

## A1.2 CONDICIONES DE CONTORNO EN LA SUPERFICIE LIBRE

La superficie del agua, siendo un contorno libre de moverse, requiere la especificación de una condición de contorno adicional, respecto de los contornos sólidos. Específicamente, se deben imponer el flujo de masa normal a la superficie, y los esfuerzos normal y tangencial a la misma.

El flujo de masa normal a la superficie libre corresponde al intercambio de humedad con la atmósfera. Para este caso conviene definir la superficie de acuerdo al esquema de la figura A1.2.



*Figura A1.2 – Sección longitudinal de flujo y esquema de ubicación de la superficie libre*

La función auxiliar  $F_\zeta = x_3 - \zeta(x_1, x_2, t)$  se anula en la superficie libre, por lo que la normal exterior se puede definir como:

$$\mathbf{n}_\zeta = \frac{\nabla F_\zeta}{|\nabla F_\zeta|} \quad (\text{A1.12})$$

Si  $\mathbf{u}_\zeta$  denota la velocidad en la superficie libre, entonces la derivada de  $F_\zeta$  siguiendo el movimiento se anula, esto es:

$$\frac{DF_\zeta}{Dt} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial t} + \mathbf{u}_\zeta \cdot \nabla F_\zeta = 0 \quad (\text{A1.13})$$

que puede escribirse, utilizando (A1.12) y la definición de  $F_\zeta$ , en la forma

$$\mathbf{u}_\zeta \cdot \mathbf{n}_\zeta = \frac{1}{|\nabla F_\zeta|} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{A1.14})$$

El intercambio de masa en la superficie libre se expresa como

$$-\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\zeta) \cdot \mathbf{n}_\zeta = \sigma \quad (\text{A1.15})$$

donde  $\sigma$  representa la tasa a la cual la masa ingresa al reservorio, por unidad de área.

Utilizando (A1.12) y (A1.14) en (A1.15) resulta

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - u_3 = \frac{|\nabla F_\zeta| \sigma}{\rho} \quad (\text{A1.16})$$

El numerador del miembro derecho de (A1.16) representa el flujo de masa entrante al reservorio a través de la superficie  $\zeta$ , por unidad de área en el plano  $(x_1, x_2)$ . Por lo tanto, el miembro derecho de (A1.16) se puede escribir como el balance entre las tasas de precipitación y evaporación:

$$\frac{|\nabla F_\zeta| \sigma}{\rho} = \sigma_{\text{precip}} - \sigma_{\text{evap}} = \sigma_\zeta \quad (\text{A1.17})$$

Estrictamente, un modelo 2D vertical no contempla las variaciones laterales de la superficie libre, por lo que  $\zeta = \zeta(x_1, t)$  y la relación (A1.16) se reduce a:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - u_3 = \sigma_\zeta \quad (\text{A1.18})$$

La condición (A1.16), o su equivalente 2D (A1.18), es referida como condición cinemática en la superficie libre. Esta condición se utiliza comúnmente cuando la superficie de agua se trata como libre. Si se utiliza la aproximación de tapa rígida, (A1.18) conduce a la condición de velocidad normal nula (Johnson 1981).

La continuidad de los esfuerzos en la superficie libre implica que (Johnson 1981)

$$\mathbf{n}_\zeta \cdot \boldsymbol{\tau}|_\zeta = \mathbf{p}_{\text{atm}} \quad (\text{A1.19})$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de tensiones efectivas en el agua y  $\mathbf{p}_{\text{atm}}$  es la tensión efectiva atmosférica sobre la superficie libre. Esta última se desdobra en una componente normal debida a la presión atmosférica,  $\mathbf{n}_\zeta \cdot \mathbf{p}_{\text{atm}} = p_0$ , y una componente tangencial asociada al esfuerzo de corte

ejercido por el viento,  $\mathbf{t}_\zeta \cdot \mathbf{p}_{\text{atm}} = \tau_w$ , donde  $\mathbf{t}_\zeta$  es el vector unitario tangente a la superficie libre.

Como las variaciones de la superficie respecto de la horizontal son pequeñas, a los efectos de las condiciones de borde el desdoblamiento anterior comúnmente se expresa a través de las siguientes relaciones simplificadas (Johnson 1981, Graf 1986)

$$p|_\zeta = p_0 \quad (\text{A1.20})$$

$$\tau_{31}|_\zeta = \tau_w \quad (\text{A1.21})$$

## ANEXO 2

### PROMEDIO DE REYNOLDS E INTEGRACIÓN LATERAL DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

#### A2.1 DESCOMPOSICIÓN DE LAS VARIABLES DE CAMPO

Se parte de las ecuaciones (2.4) y (2.5)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{q}{\rho} \quad (\text{A2.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g} + \frac{q}{\rho} \mathbf{u}_0 \quad (\text{A2.2})$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - p \mathbf{I} \quad (\text{A2.3})$$

Las componentes de velocidad y la presión se descomponen según la expresión (2.11)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \bar{\phi} \rangle(x_1, x_3, t) + \tilde{\phi}(\mathbf{r}, t) + \phi'(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A2.4})$$

En lo que sigue se utilizará la propiedad de conmutación entre las integraciones en el ensamble y en la dirección lateral.

#### A2.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Empleando la notación de Einstein, y utilizando (A2.4), el miembro izquierdo de (A2.1) es

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \langle \bar{u}_i \rangle + \tilde{u}_i + u_i' \right) \quad (\text{A2.5})$$

El promedio de Reynolds sobre (A2.5) es

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \langle \overline{u_i} \rangle + \widetilde{u_i} \right) = \frac{\overline{q}}{\rho} \quad (\text{A2.6})$$

con lo cual, recordando que  $\overline{u_i} = 0$ , el campo de fluctuaciones turbulentas satisface la condición de incompresibilidad

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = 0 \quad (\text{A2.7})$$

Para integrar en la dirección lateral expresiones que contienen derivadas espaciales de las variables de campo resulta conveniente utilizar la regla de Leibnitz

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{B} \int_{b_d}^{b_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_2 = \left( \frac{1 - \delta_{i2}}{B} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (B \langle \phi \rangle) - \left[ \phi \frac{\partial b}{\partial x_i} \right]_{b_d}^{b_i} \right] + \frac{\delta_{i2}}{B} \phi|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.8})$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $B(x_1, x_3, t) = b_i - b_d$ , de acuerdo al esquema reproducido en la figura A2.1.

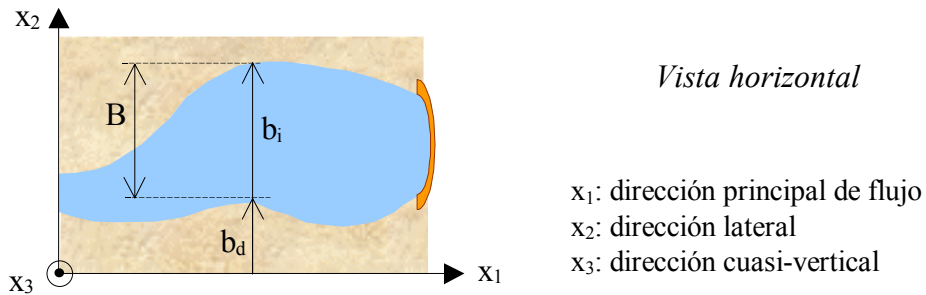


Figura A2.1 - Esquema de definición de márgenes

Para aplicar (A2.8) resulta conveniente construir la función auxiliar  $F \equiv x_2 - b(x_1, x_3, t)$ , donde  $b$  está definida por partes (ver Anexo 1). Esta función desaparece en los laterales del cauce, y  $\nabla F$  resulta normal a los mismos. Como

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \delta_{i2} - \frac{\partial b}{\partial x_i} = \delta_{i2} - (1 - \delta_{i2}) \frac{\partial b}{\partial x_i} \quad (\text{A2.9})$$

entonces, en términos de la función  $F$ , (A2.8) queda expresada como

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \left( \frac{1 - \delta_{i2}}{B} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (B \langle \phi \rangle) + \frac{1}{B} \left[ \phi \frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.10})$$

Así, utilizando (A2.10) en el primer sumando de (A2.6) resulta

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \rangle \right\rangle = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x_k} (B \langle \bar{u}_k \rangle) + \frac{1}{B} \langle \bar{u}_i \rangle \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.11})$$

en la cual el subíndice k adopta sólo los valores 1 y 3

Aplicando la misma regla al segundo sumando de (A2.6) se tiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}_i \right\rangle = \frac{1}{B} \tilde{u}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.12})$$

donde se utilizó que  $\langle \tilde{\phi} \rangle = 0$ . La suma de (A2.11) y (A2.12) satisface (A2.6), resultando

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (B \langle \bar{u}_k \rangle) + \bar{u}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} = 0 \quad (\text{A2.13})$$

El segundo término de (A2.13) representa el flujo de masa a través del cauce lateral, de acuerdo a (A1.7) del Anexo 1, resultando finalmente

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (B \langle \bar{u}_k \rangle) = \frac{1}{\rho} (\bar{\sigma}_B + Bq) \quad (\text{A2.14})$$

que constituye la versión 2D conservativa de la ecuación de continuidad, integrada en la transversal y promediada en el ensamble de estados turbulentos. En (A2.14) el subíndice k toma los valores 1 y 3.

### A2.3 ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Por simplicidad, se trabaja en este caso con los distintos términos de (A2.2) por separado. La derivada temporal para cada componente de velocidad es, de acuerdo a (A2.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j = \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{u}_j \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_j + \frac{\partial}{\partial t} u_j' \quad (\text{A2.15})$$

El promedio de Reynolds sobre (A2.15) elimina el término de fluctuación turbulenta, ya que

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}'_j} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathbf{u}'_j} = 0 \quad (\text{A2.16})$$

Promediando sobre la dirección lateral los términos restantes se tiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \langle \overline{\mathbf{u}_j} \rangle \right\rangle = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} (B \langle \overline{\mathbf{u}_j} \rangle) - \frac{1}{B} \langle \overline{\mathbf{u}_j} \rangle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.17})$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle \right\rangle = -\frac{1}{B} \langle \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.18})$$

donde ha quedado eliminado el término de desviación. Por lo tanto, el término de derivada temporal queda como

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_j \right\rangle = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} (B \langle \overline{\mathbf{u}_j} \rangle) - \frac{1}{B} \left( \langle \overline{\mathbf{u}_j} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.19})$$

El flujo advectivo de cantidad de movimiento se expresa, en componentes, como

$$[\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})]_j = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i u_j = \frac{\partial}{\partial x_i} R_{ij} \quad (\text{A2.20})$$

Expandiendo el tensor simétrico  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$  a través de (A2.4) e integrándolo en el ensamble se obtiene

$$\overline{R_{ij}} = \langle \overline{R_{ij}} \rangle + \langle \tilde{R}_{ij} \rangle \quad (\text{A2.21})$$

con

$$\langle \overline{R_{ij}} \rangle = \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle + \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle + \langle \overline{u_i} \tilde{u}_j \rangle \quad (\text{A2.22})$$

$$\tilde{R}_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \overline{u_i} \tilde{u}_j + \langle \overline{u_i} \rangle \tilde{u}_j + \langle \overline{u_j} \rangle \tilde{u}_i \quad (\text{A2.23})$$

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_j \equiv \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \quad (\text{A2.24})$$

$$\overline{\tilde{u}_i' u_j'} \equiv \overline{u_i' u_j'} - \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle \quad (\text{A2.25})$$

El primer término del tensor en (A2.22) representa el flujo advectivo de cantidad de movimiento, mediante los valores medios turbulentos y promediados en la transversal del campo de velocidad. El segundo término es el flujo por dispersión, debido a la correlación entre los términos medios de desviación. Finalmente, el tercer término corresponde a la difusión turbulenta, producida por las correlaciones de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad.

Luego, como el promedio en el ensamble de (A2.20) es

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} R_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{R_{ij}} \quad (\text{A2.26})$$

entonces, promediando (A2.26) en la dirección lateral y usando (A2.21) se obtiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} R_{ij} \right\rangle = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( B \langle \overline{R_{kj}} \rangle \right) + \frac{1}{B} \left( \langle \overline{R_{ij}} \rangle + \tilde{R}_{ij} \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.27})$$

con  $k=1$  y  $3$ .

Por su parte, teniendo en cuenta que  $\mathbf{T} = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ , el término de flujo viscoso integrado es

$$\langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{T}} \rangle_j = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( B \langle \overline{T_{kj}} \rangle \right) + \frac{1}{B} \left( \langle \overline{T_{ij}} \rangle + \tilde{T}_{ij} \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.28})$$

siempre con  $k$  restringido a los valores  $1$  y  $3$ .

Expandiendo la presión de acuerdo a (A2.4), el valor medio en el ensamble del gradiente de presiones es

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle \overline{p} \rangle + \tilde{p} \right) \quad (\text{A2.29})$$

Obteniéndose por integración lateral

$$\left\langle \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{(1 - \delta_{j2})}{B} \frac{\partial}{\partial x_j} (B \langle \bar{p} \rangle) + \frac{1}{B} \left( \langle \bar{p} \rangle + \tilde{p} \right) \frac{\partial F}{\partial x_j} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.30})$$

Como el término gravitatorio queda inalterado por el proceso de integración, la aplicación de (A2.19), (A2.27), (A2.28) y (A2.30) en (A2.2) produce la forma conservativa de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $j$  del plano vertical ( $x_1, x_3$ )

$$\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} (B \langle \bar{u}_j \rangle) - \frac{1}{\rho B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ B \left( \langle \bar{T}_{kj} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{kj} - \rho \langle \bar{R}_{kj} \rangle \right) \right\} = g_j + \frac{\bar{q}}{\rho} \langle \bar{u}_{0j} \rangle + \Gamma_j + \tilde{\Gamma}_j \quad (\text{A2.31})$$

donde la suma sobre  $k$  se hace sobre los subíndices 1 y 3, siendo

$$\Gamma_j \equiv \frac{1}{B} \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} + \frac{1}{\rho B} \left\{ \langle \bar{T}_{ij} \rangle - \langle \bar{p} \rangle \delta_{ij} - \rho \langle \bar{R}_{ij} \rangle \right\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.32})$$

$$\tilde{\Gamma}_j \equiv \frac{1}{B} \tilde{u}_j \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} + \frac{1}{\rho B} \left\{ \tilde{T}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij} - \rho \tilde{R}_{ij} \right\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.33})$$

Ya que la fuente de masa  $q$  es una cantidad integrada que ingresa al modelo como dato externo, para obtener (A2.31) sólo se consideró su valor medio temporal.

## A2.4 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

En la expresión (3.11) para la fracción  $j$

$$\frac{\partial s_j}{\partial t} + \nabla \cdot (s_j (\mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj})) = s_{0j} \frac{q}{\rho} + \psi_j \quad (\text{A2.34})$$

cada variable de campo se descompone de acuerdo a (2.11) y se lleva a cabo el promedio de Reynolds y la integración lateral simultáneamente.

El término de derivada temporal es formalmente análogo a (A2.19):

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} s_j \right\rangle = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} (B \langle \bar{s}_j \rangle) - \frac{1}{B} \left( \langle \bar{s}_j \rangle + \tilde{s}_j \right) \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.35})$$

Para integrar el término de flujo advectivo se define previamente el vector

$$\mathbf{R}_j^s \equiv s_j(\mathbf{u} + \mathbf{w}_{sj}) \quad (\text{A2.36})$$

donde j indica la fracción, de forma que, en componentes (indicadas con el subíndice i)

$$\overline{\mathbf{R}_{j_i}^s} = \langle \overline{\mathbf{R}_{j_i}^s} \rangle + \widetilde{\mathbf{R}_{j_i}^s} \quad (\text{A2.37})$$

con

$$\langle \overline{\mathbf{R}_{j_i}^s} \rangle = \langle (\overline{u_i} + w_{sj}) \overline{s_j} \rangle + \langle \widetilde{u_i} \widetilde{s_j} \rangle + \langle \overline{u_i} \widetilde{s_j} \rangle \quad (\text{A2.38})$$

$$\widetilde{\mathbf{R}_{j_i}^s} = \widetilde{u_i} \widetilde{s_j} + \overline{u_i} \widetilde{s_j} + \langle \overline{u_i} \widetilde{s_j} \rangle + \langle \overline{s_j} \widetilde{u_i} \rangle + w_{sj} \widetilde{s_j} \quad (\text{A2.39})$$

$$\widetilde{u_i} \widetilde{s_j} \equiv \overline{u_i} \widetilde{s_j} - \langle \overline{u_i} \widetilde{s_j} \rangle \quad (\text{A2.40})$$

$$\overline{u_i} \widetilde{s_j} \equiv \overline{u_i s_j} - \langle \overline{u_i s_j} \rangle \quad (\text{A2.41})$$

El primer término del vector en (A2.38) es el flujo medio advectivo de partículas, debido al flujo de agua y la velocidad de caída. El segundo término es el flujo por dispersión, mientras que el tercero corresponde a la difusión turbulenta. En el proceso anterior no se consideró relevante descomponer la velocidad de caída de acuerdo a (2.11).

Entonces, el segundo sumando del miembro izquierdo de (A2.34) luego de la doble integración resulta en:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\mathbf{R}_{j_i}^s} \right\rangle = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( B \langle \overline{\mathbf{R}_{j_k}^s} \rangle \right) + \frac{1}{B} \left( \langle \overline{\mathbf{R}_{j_i}^s} \rangle + \widetilde{\mathbf{R}_{j_i}^s} \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.42})$$

con k=1 y 3.

Finalmente, la forma conservativa de la ecuación de transporte de sedimentos en el plano vertical ( $x_1, x_3$ ) es:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} \left( B \langle \overline{s_j} \rangle \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ B \langle \overline{\mathbf{R}_{j_k}^s} \rangle \right\} = \langle \overline{s_{0j}} \rangle \frac{\bar{q}}{\rho} + \langle \overline{\Psi_j} \rangle + \Gamma_j^s + \widetilde{\Gamma_j^s} \quad (\text{A2.43})$$

donde la suma sobre k se hace sobre los subíndices 1 y 3, siendo

$$\Gamma_j^s \equiv \frac{1}{B} \langle \bar{s}_j \rangle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} - \frac{1}{B} \langle \bar{R}_{j_i}^s \rangle \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.44})$$

$$\tilde{\Gamma}_j^s \equiv \frac{1}{B} \tilde{s}_j \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \Big|_{b_d}^{b_i} - \frac{1}{B} \tilde{R}_{j_i}^s \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{b_d}^{b_i} \quad (\text{A2.45})$$

## ANEXO 3

### RELACION ENTRE LA ALTURA EFECTIVA Y EL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD

#### A3.1 FORMULACIÓN DEL MODELO

Si la viscosidad de torbellino se computa a partir de (2.73), que corresponde a la distribución de Kerssens,

$$v_{tz}(z') = k\theta u_* \begin{cases} \frac{z'}{h} \left(1 - \frac{z'}{h}\right) & \text{si } 0 \leq z' \leq h/2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } h/2 < z' \leq h \end{cases} \quad (\text{A3.1})$$

entonces, en condiciones de equilibrio local, el perfil de velocidades que se obtiene integrando (2.52) es

$$u_{eq}(z') = \frac{gh \operatorname{sen} \theta}{ku_*} \begin{cases} \ln\left(\frac{z'}{z_0}\right) & \text{si } z_0 \leq z' \leq h/2 \\ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{h}{2z_0}\right) - 2\left(\frac{z'}{h} - 1\right)^2 & \text{si } h/2 \leq z' \leq h \end{cases} \quad (\text{A3.2})$$

donde  $z'$  está medida desde el lecho ( $z' = z - z_f$ ),  $h$  es la profundidad,  $k$  la constante de von Karman,  $u_*$  la velocidad de corte,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $\operatorname{sen} \theta = I_0$  la pendiente local y  $z_0$  la altura (virtual) donde se anula la velocidad.

Entonces, considerando un ancho uniforme de la sección de flujo, el caudal de equilibrio teórico es

$$Q_{eq,teórico} \equiv B \int_{z_0}^h u_{eq}(z') dz' = B \frac{gh^2 \operatorname{sen} \theta}{ku_*} \left\{ \ln\left(\frac{h}{2z_0}\right) + \frac{z_0}{h} - \frac{1}{3} \right\} \quad (\text{A3.3})$$

Por otro lado, utilizando la relación de Chezy

$$\frac{u_*}{U} = \frac{\sqrt{g}}{C} \quad (\text{A3.4})$$

con  $C \equiv R^{1/6}/n$ , siendo  $n$  el coeficiente de Manning, surge que el caudal de equilibrio es

$$Q_{\text{Chezy}} \equiv UhB = hBu_* \frac{\sqrt{g}}{C} \quad (\text{A3.5})$$

Entonces, la compatibilidad entre la ley de Chezy y la utilización del perfil dado en (A3.2) requiere que los caudales definidos en (A3.3) y (A3.5) sean iguales, esto es:

$$hBu_* \frac{\sqrt{g}}{C} = B \frac{gh^2 \sin \theta}{ku_*} \left\{ \ln \left( \frac{h}{2z_0} \right) + \frac{z_0}{h} - \frac{1}{3} \right\} \quad (\text{A3.6})$$

Finalmente, utilizando la relación para el flujo medio  $U = C\sqrt{RI_0}$  y considerando que  $R \approx h$ , (A3.6) se transforma en

$$\ln \left( \frac{h}{z_0} \right) + \frac{z_0}{h} = \frac{1}{3} + \ln 2 + k \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (\text{A3.7})$$

La ecuación (A3.7) provee una relación entre el coeficiente de Manning, implícito en  $C$ , y la altura de velocidad nula. Tomando esta última como

$$z_0 = \frac{k_s}{30} \ll h \quad (\text{A3.8})$$

con  $k_s$  es la altura efectiva de los elementos de rugosidad del fondo, surge la siguiente relación (Tarela 1997):

$$k_s = 15h \exp \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{k h^{1/6}}{n^{\text{eq}} \sqrt{g}} \right\} \quad (\text{A3.9})$$

donde  $n^{\text{eq}}$  es el coeficiente de Manning equivalente, correspondiente a la altura de rugosidad efectiva  $k_s$  y la profundidad local  $h$ .

La ecuación (A3.9) es consistente con el coeficiente de conductividad

$$C = 18 \log_{10} \left( \frac{12h}{k_s} \right) - 0.86 \quad (\text{A3.10})$$

que, comparado con (Henderson 1966)

$$C = 18 \log_{10} \left( \frac{12h}{k_s} \right) \quad (\text{A3.11})$$

indica que la conductividad es subestimada.

De acuerdo al análisis de escalas espaciales realizado en el Capítulo 2, la relación entre la profundidad y la altura de rugosidad efectiva es de orden  $h/k_s \approx 10$  a  $10^5$ , con lo cual el efecto de la constante aditiva  $-0.86$  en (A3.10) es poco significativo.

### A3.2 VALIDACIÓN DEL MODELO

La ecuación (A3.7), en términos del coeficiente de Manning equivalente, es

$$n^{eq} = \frac{kR^{1/6}}{\sqrt{g}} \frac{1}{\left[ \ln \left( \frac{15h}{k_s} \right) + \frac{k_s}{30h} - \frac{1}{3} \right]} \quad (\text{A3.12})$$

Para verificar su validez se la comparó con las relaciones de Strikler (Henderson 1966)

$$n^{eq} = \frac{k_s^{1/6}}{24} \quad (\text{A3.13})$$

y Williamson (Henderson 1966)

$$n^{eq} = \frac{k_s^{1/6}}{26} \quad (\text{A3.14})$$

La figura A3.1 muestra la forma de las expresiones (A3.12) y (A3.14) para dos profundidades distintas (1 y 10 m). Para grandes rugosidades ( $k_s > h/100$ ), se observa que los resultados son similares. En el caso de rugosidades pequeñas existen diferencias de magnitud de hasta el 150%.

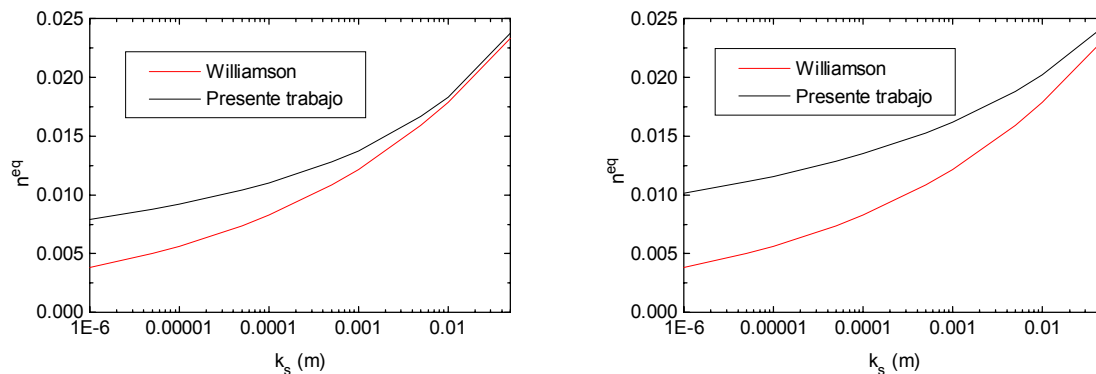


Figura A3.1 – Comparación de las relaciones entre el coeficiente de Manning y la rugosidad efectiva. Izquierda:  $h=1m$ , Derecha:  $h=10m$ .

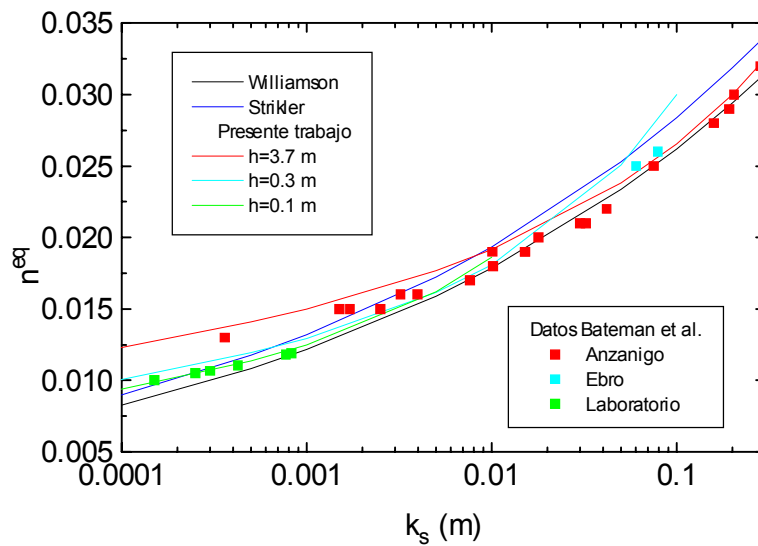
Para cuantificar la precisión de las relaciones (A3.12) a (A3.14) se las contrastó con una serie de datos obtenidos por Bateman y otros (1994), consistentes en mediciones de campo (canales sobre los ríos Anzánigo y Ebro) y laboratorio. Los autores de ese trabajo desarrollaron un método directo y otro de optimización numérica para obtener pares de valores asociados al coeficiente de fricción de Manning y la rugosidad efectiva.

La figura A3.2 presenta la comparación entre las tres relaciones expuestas y los datos citados. En el caso de la fórmula propuesta en el presente trabajo, se muestran tres curvas, cada una identificada por una altura de agua, de acuerdo a los requerimientos de la relación (A3.12).

En la figura A3.2 se observa que la dependencia con la profundidad no es despreciable, ya que la función propuesta sigue las tendencias de los datos discriminados por ese parámetro. La figura A3.3 muestra el error absoluto para todos los datos disponibles y los tres métodos comparados. En ella se aprecia que el método propuesto en este trabajo permite obtener la banda de error de menor amplitud absoluta.

Para determinar el grado de precisión de cada método, se analizaron los errores absolutos entre las predicciones ( $n_j^{eq}$ ) y los datos ( $n_j$ ), a partir de las normas  $L_\infty$  y  $L_2$ , obteniéndose los resultados de la tabla A3.1.

En dicha tabla se observa que el método propuesto en este trabajo arroja los menores errores, tanto puntuales como globales, excepto en el caso del Ebro, donde sólo se tienen 2 datos disponibles.



*Figura A3.2 – Comparación entre las relaciones analíticas y los datos de campo y laboratorio. Las funciones correspondientes al presente trabajo se muestran con colores diferentes, cada uno de ellos asociado a un juego de datos.*

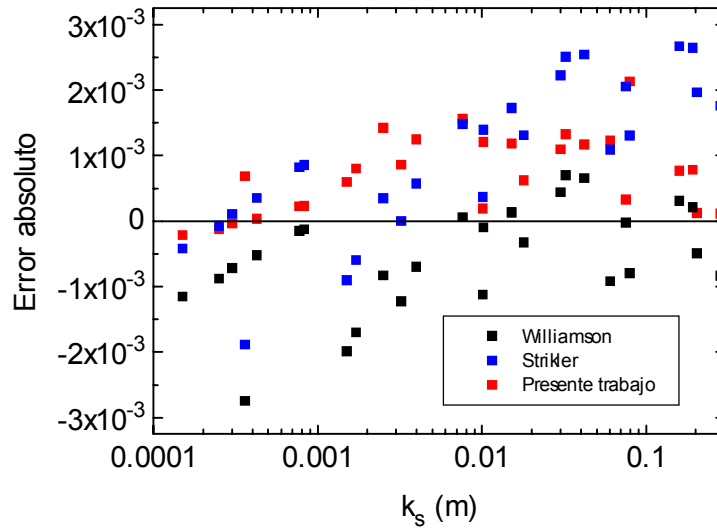


Figura A3.3 – Errores absolutos de los distintos métodos comparados.

Tabla A3.1 – Errores absolutos máximo ( $\Delta e$ ) y medio cuadrático ( $\delta e$ ).  
N indica el número de datos.

| Juego de datos | $\Delta e = \ e\ _{\infty} = \max_{1 \leq j \leq N}  n_j^{eq} - n_j $ |          |                  | $\delta e = \frac{1}{N} \ e\ _2 = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N (n_j^{eq} - n_j)^2}$ |                     |                     |
|----------------|---|----------|------------------|---|---------------------|---------------------|
|                | Williamson  | Strikler | Presente trabajo | Williamson  | Strikler            | Presente trabajo    |
| Anzánigo       | 0.00274   | 0.00267  | 0.00156          | $2.3 \cdot 10^{-4}$   | $2.9 \cdot 10^{-4}$ | $2.1 \cdot 10^{-4}$ |
| Ebro           | 0.00092   | 0.00131  | 0.00214          | $6.0 \cdot 10^{-4}$   | $8.5 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ |
| Laboratorio    | 0.00115   | 0.00086  | 0.00023          | $2.9 \cdot 10^{-4}$   | $2.2 \cdot 10^{-4}$ | $6.9 \cdot 10^{-5}$ |
| Todos          | 0.00274   | 0.000267 | 0.00214          | $1.8 \cdot 10^{-4}$   | $2.9 \cdot 10^{-4}$ | $1.8 \cdot 10^{-4}$ |

### A3.3 MODELO ALTERNATIVO

Si en lugar de (2.73) se utiliza la distribución de Einstein de la viscosidad de torbellino, dada por (2.71):

$$v_{tz}(z') = k u_* z' \left( 1 - \frac{z'}{h} \right) \quad (A3.15)$$

entonces el perfil de velocidad de equilibrio es el de von Karman, aquí expresado como

$$u_{eq}(z') = \frac{gh \operatorname{sen} \theta}{k u_*} \ln \left( \frac{z'}{z_0} \right) \quad (A3.16)$$

Procediendo como antes, en este caso se obtienen

$$\ln \left( \frac{h}{z_0} \right) + \frac{z_0}{h} = 1 + k \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (A3.17)$$

y, nuevamente usando (A3.8),

$$k_s = 30h \exp \left\{ -1 - \frac{kh^{1/6}}{n^{eq} \sqrt{g}} \right\} \quad (A3.18)$$

En este caso, la ecuación (A3.18) es consistente con el coeficiente de conductividad

$$C = 18 \log_{10} \left( \frac{12h}{k_s} \right) - 0.66 \quad (A3.19)$$

de forma tal que la conductividad permanece subestimada, pero algo menos que antes.

A partir de (A3.17) se puede obtener el coeficiente de Manning equivalente:

$$n^{eq} = \frac{kR^{1/6}}{\sqrt{g}} \frac{1}{\left[ \ln \left( \frac{15h}{k_s} \right) + \frac{k_s}{30h} - 0.307 \right]} \quad (A3.12)$$

que muestra una pequeña diferencia respecto de (A3.12), donde el último sumando del corchete en el denominador ha sido reemplazado por el valor  $-0.307$ , en lugar de  $-0.333$ . Esta

diferencia es numéricamente despreciable, tal como lo muestra la figura A3.4, donde se presenta una comparación entre los coeficientes de Manning equivalentes correspondientes a las dos distribuciones de la viscosidad de torbellino que se pueden utilizar en el modelo hidrodinámico.

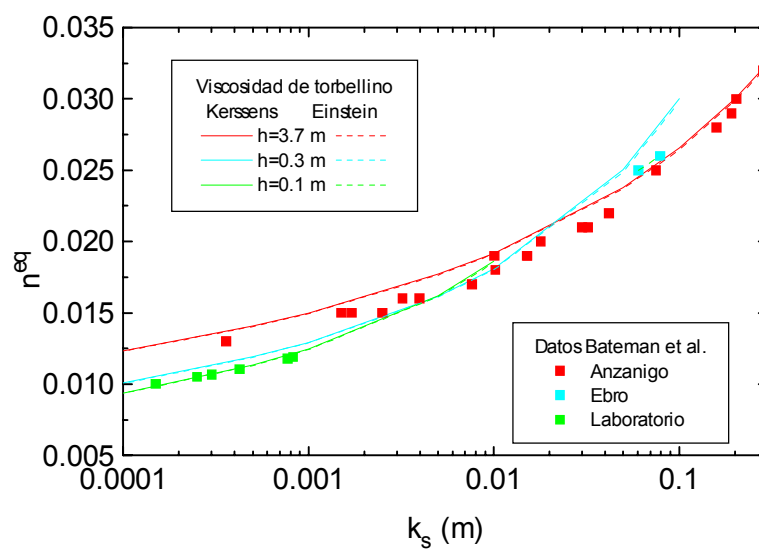


Figura A3.4 – Comparación entre los dos modelos para la distribución de la viscosidad de torbellino.

## ANEXO 4

# METODOLOGÍAS PARA PREDECIR LA CONCENTRACIÓN DE ARENA DE EQUILIBRIO EN EL LECHO

### A4.1 MÉTODO DETERMINÍSTICO DE VAN RIJN

Para flujos gradualmente variados se puede aplicar una relación determinística para obtener la concentración media temporal de equilibrio local cerca del lecho (van Rijn 1984):

$$s^{eq} = \alpha_{det} \frac{\delta_{50}}{\delta_{bs}} \frac{T^{3/2}}{D_*^{3/10}} \quad (A4.1)$$

donde  $\alpha_{det} = 0.015$ ,  $\delta_{50}$  es el tamaño medio de las partículas,  $\delta_{bs}$  es un nivel de referencia,  $D_*$  es el parámetro de partícula y  $T$  es el parámetro de estado de transporte.

El parámetro de partícula se define como

$$D_* \equiv \delta_{50} \left[ \frac{\Delta g}{\nu^2} \right]^{1/3} \quad (A4.2)$$

con  $\Delta \equiv \rho_s / \rho - 1$  la diferencia relativa de densidad del sedimento,  $\rho_s$  la densidad del sólido que constituye la partícula y  $\nu$  la viscosidad cinemática del agua.

El parámetro de estado de transporte es

$$T = \begin{cases} \frac{\overline{\tau}_b - \tau_{b,cr}}{\tau_{b,cr}} & \overline{\tau}_b > \tau_{b,cr} \\ 0 & \overline{\tau}_b < \tau_{b,cr} \end{cases} \quad (A4.3)$$

donde  $\overline{\tau}_b$  es la tensión de corte media temporal en el fondo relacionada con los granos

$$\overline{\tau}_b = \rho g \left( \frac{U}{C'} \right)^2 \quad (\text{A4.4})$$

con  $U$  la velocidad media vertical del flujo y  $C'$  el coeficiente de Chezy relativo a los granos

$$C' \equiv 18 \log_{10} \left( \frac{12h}{3\delta_{90}} \right) \quad (\text{A4.5})$$

siendo  $h$  la profundidad local y  $\delta_{90}$  el diámetro de partícula para el cual el 90% de la distribución de tamaños es menor, en peso.

En (A4.3)  $\tau_{b,cr}$  es la tensión de corte media temporal crítica de acuerdo al criterio de Shields (a partir de la cual comienza el proceso de resuspensión), la cual puede calcularse mediante la expresión propuesta por Maza Alvarez (1995):

$$\tau_{b,cr} = \rho g \Delta \delta_{50} \begin{cases} \frac{0.2196}{D_*} + 0.077 \exp \left( \frac{30.35}{D_*} \right)^{0.563} & 1 \leq D_* \leq 180 \\ 0.055 & D_* > 180 \end{cases} \quad (\text{A4.6})$$

Respecto del nivel de referencia, si la altura media de las formas de fondo,  $\Delta_b$ , es conocida van Rijn propone

$$\delta_{bs} = \frac{1}{2} \Delta_b \quad (\text{A4.7})$$

o, en caso contrario,

$$\delta_{bs} = k_s \quad (\text{A4.8})$$

siendo  $k_s$  la altura equivalente de rugosidad. En cualquier caso, por razones de precisión se recomienda

$$\delta_{bs} \geq 0.01h \quad (\text{A4.9})$$

Para aplicar esta metodología anterior a fracciones de la distribución de tamaños de partícula, se propone realizar los siguientes cambios:

- Reemplazar  $\delta_{50}$  por  $\delta_j$

- Reemplazar  $\Delta$  por  $\Delta_j \equiv \rho_{sj} / \rho - 1$ , donde  $\rho_{sj}$  es la densidad del sólido que constituye las partículas de la fracción j

La expresión (A4.5) no debe ser modificada, ya que la rugosidad de piel efectiva depende de la distribución total de partículas en el lecho.

En el caso en que no se disponga de información referida al parámetro  $\delta_{90}$ , se propone utilizar la relación  $\delta_{90} = 2.4\delta_{50} - 0.0029\delta_{50}^2$ , donde los diámetros están dados en  $\mu\text{m}$ . La misma surge de un análisis de granulometrías realizado por Tarela (1997) a partir de diversas muestras de los ríos Paraná y Bermejo (figura A4.1).

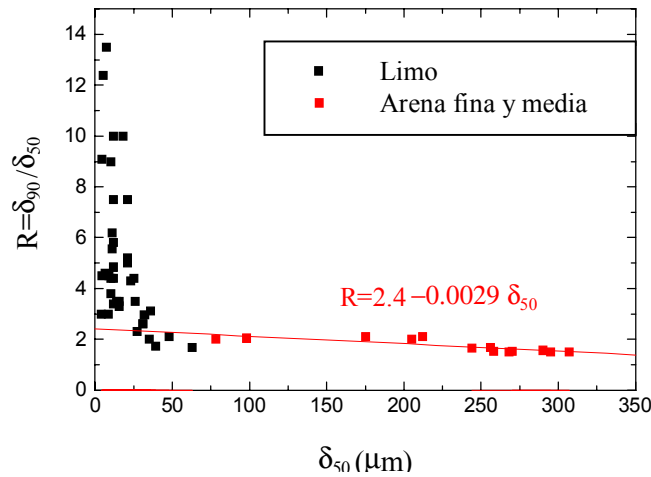


Figura A4.1 – Relación entre  $\delta_{90}$  y  $\delta_{50}$  para muestras de los ríos Paraná y Bermejo.

## A4.2 MÉTODO ESTOCÁSTICO DE VAN RIJN

Para flujos con variaciones bruscas en los perfiles de concentración se puede aplicar una aproximación estadística, asumiendo que la relación (A4.1) es válida para los valores instantáneos, y cambiando la constante de proporcionalidad

$$s_t^{eq} = \alpha_{est} \frac{\delta_{50}}{\delta_{bs}} \frac{T_t^{3/2}}{D_*^{3/10}} \quad (\text{A4.10})$$

donde

$$T_t = \frac{\tau_b' - \tau_{b,cr}}{\tau_{b,cr}} \quad (\text{A4.11})$$

es el parámetro de estado de transporte instantáneo, con  $\tau_{b,cr}$  la tensión de corte instantánea crítica y

$$\tau'_b = \mu_b \tau_b \quad (A4.12)$$

el esfuerzo de corte efectivo instantáneo en el lecho, siendo  $\tau_b$  el esfuerzo de corte instantáneo en el lecho y  $\mu_b$  un factor de eficiencia.

Entonces, promediando sobre el ensamble de estados posibles se tiene que

$$s^{eq} \equiv \overline{s_t^{eq}} = \alpha_{est} \frac{\delta_{50} \overline{T_t^{3/2}}}{\delta_{bs} D_*^{3/10}} \quad (A4.13)$$

Para evaluar el valor medio del parámetro de estado de transporte se asume que la tensión de corte efectiva está normalmente distribuida, con valor medio  $\overline{\tau'_b}$  y desviación estándar  $\sigma'$ , de modo que su función de distribución es

$$F(\tau'_b) = N(\overline{\tau'_b}, \sigma') \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} e^{-\frac{(\tau'_b - \overline{\tau'_b})^2}{2\sigma'^2}} \quad (A4.14)$$

De esta forma, la probabilidad de que la tensión de corte exceda el valor crítico (para que exista resuspensión) viene dada por

$$P(|\tau'_b| > |\tau_{b,cr}|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \int_{\tau_{b,cr,1}}^{\infty} e^{-\frac{(\tau'_b - \overline{\tau'_b})^2}{2\sigma'^2}} d\tau'_b + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \int_{-\infty}^{-\tau_{b,cr,2}} e^{-\frac{(\tau'_b - \overline{\tau'_b})^2}{2\sigma'^2}} d\tau'_b \quad (A4.15)$$

donde  $\tau_{b,cr,1}$  y  $\tau_{b,cr,2}$  son las tensiones críticas instantáneas en el sentido del flujo y en contra del flujo, respectivamente.

Entonces, el valor esperado en (A4.13) se puede obtener como

$$\overline{T_t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \left| \int_{\tau_{b,cr,1}}^{\infty} \left( \frac{\tau'_b - \tau_{b,cr,1}}{\tau_{b,cr,1}} \right)^{3/2} e^{-\frac{(\tau'_b - \overline{\tau'_b})^2}{2\sigma'^2}} d\tau'_b \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \left| \int_{-\infty}^{-\tau_{b,cr,2}} \left( \frac{\tau'_b + \tau_{b,cr,2}}{\tau_{b,cr,2}} \right)^{3/2} e^{-\frac{(\tau'_b - \overline{\tau'_b})^2}{2\sigma'^2}} d\tau'_b \right| \quad (A4.16)$$

donde se han introducido valores absolutos de las integrales puesto que la resuspensión de material es invariante frente a cambios en el sentido de las tensiones de corte.

Definiendo  $\tau'_b \equiv \overline{\tau'_b} + \chi\sigma'$ , (A4.16) se puede poner en la forma

$$\overline{T_t}^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left( \frac{\sigma'}{\tau_{b,cr,1}} \right)^{3/2} |I_1| + \left( \frac{\sigma'}{\tau_{b,cr,2}} \right)^{3/2} |I_2| \right\} \quad (A4.17)$$

con

$$I_1 = \int_{-r}^{\infty} (\chi + r)^{3/2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi = \int_0^{\infty} \chi^{3/2} e^{-\frac{1}{2}(\chi - r)^2} d\chi \quad (A4.18)$$

$$I_2 = \int_p^{\infty} (\chi + p)^{3/2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi = -\int_0^{\infty} \chi^{3/2} e^{-\frac{1}{2}(\chi + p)^2} d\chi \quad (A4.19)$$

donde

$$r \equiv \frac{\tau'_b - \tau_{b,cr,1}}{\sigma'} \quad (A4.20)$$

$$p \equiv \frac{\tau'_b + \tau_{b,cr,2}}{\sigma'} \quad (A4.21)$$

Las integrales (A4.18) y (A4.19) se pueden resolver numéricamente.

Para evaluar las tensiones críticas se tiene en cuenta la pendiente local del lecho

$$\theta_b \equiv \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (A4.22)$$

y el ángulo de fricción interna del material,  $\phi$  (por ejemplo,  $\phi=35^\circ$  para arenas)

$$\tau_{b,cr,1} = \tau_{b,cr}^0 \frac{\text{sen}(\phi + \theta_b)}{\text{sen}(\phi)} \quad (A4.23)$$

$$\tau_{b,cr,2} = \tau_{b,cr}^0 \frac{\text{sen}(\phi - \theta_b)}{\text{sen}(\phi)} \quad (A4.24)$$

siendo  $\tau_{b,cr}^0$  la tensión de corte crítica instantánea en el lecho para el caso de fondo horizontal, para el cual van Rijn (1987) asume (basado en resultados de De Ruiter):

$$\tau_{b,cr}^0 = \frac{3}{2} \tau_{b,cr} \quad (A4.25)$$

donde la tensión crítica se puede evaluar a través de los resultados de Shields mediante (A4.6).

Para el caso de un flujo horizontalmente uniforme, la desviación estándar ( $\sigma_b$ ) de la tensión de corte en el fondo se puede relacionar con el esfuerzo de corte medio en el lecho ( $\overline{\tau_b}$ ). De Ruiters reportó valores en el rango  $0.2 \leq \sigma_b / \overline{\tau_b} \leq 0.6$  (van Rijn 1987).

Para condiciones no uniformes no existe información disponible. van Rijn asume un valor constante para la desviación estándar de la tensión efectiva:  $\sigma' = 0.4 \overline{\tau'_{b,0}}$ , donde  $\overline{\tau'_{b,0}}$  es la tensión efectiva en la entrada del modelo.

En este trabajo, debido a que las condiciones aguas abajo pueden diferir significativamente respecto de las de la entrada, se ha considerado que la desviación estándar se puede evaluar localmente mediante:

$$\sigma' = 0.4 \tau'_b \quad (A4.26)$$

donde  $\tau'_b$  se evalúa a partir de (A4.4).

Para flujo de equilibrio, el factor de eficiencia puede expresarse como:

$$\mu_b = \left( \frac{C}{C'} \right)^2 \quad (A4.27)$$

donde C es el coeficiente de fricción de Chezy, definido en el Anexo 3. Aunque la relación (A4.27) se calcula en condiciones de equilibrio, la ecuación (A4.12) se supone válida para todas las condiciones de flujo, ya que en ella interviene la tensión de corte obtenida con el modelo.

Finalmente, la constante de proporcionalidad en (A4.10) se determinó mediante calibración del modelo, encontrándose satisfactorio un valor  $\alpha_{est} = 0.03$  (van Rijn 1987), es decir, el doble que en el caso determinístico.

Para el nivel de referencia y la aplicación a casos de transporte de diferentes fracciones, se procede de igual forma que en el caso determinístico.

### A4.3 MÉTODO DE ENGELUND Y FREDSOE

Este método está basado en el concepto de tensiones dispersivas de Bagnold (1954) y en la teoría de transporte de fondo de los autores (Engelund y Fredsoe 1976). La concentración de equilibrio se calcula, en  $z=2\delta$ , como:

$$s^{eq} = 0.65 \left( 1 + \frac{1}{\lambda_b} \right)^{-3} \quad (A4.28)$$

donde  $\lambda_b$  es la denominada concentración lineal en el fondo:

$$\lambda_b = \left( \frac{\theta' - \theta_{cr} - \frac{\pi}{6} \beta_s P}{0.027(\Delta + 1)\theta'} \right)^{1/2} \quad (A4.29)$$

siendo  $\theta'$  el parámetro de Shields o tensión efectiva adimensional

$$\theta' \equiv \frac{\tau'_b}{\rho g \Delta \delta} \quad (A4.30)$$

con  $\delta$  el diámetro característico del sedimento,  $\theta_{cr}$  la tensión crítica adimensional

$$\theta_{cr} \equiv \frac{\tau_{b,cr}}{\rho g \Delta \delta} \quad (A4.31)$$

$\beta_s$  es el coeficiente de fricción dinámica para el material particulado y la probabilidad P indica la fracción del material de una capa individual que es transportada como carga de fondo

$$P = \left\{ 1 + \left( \frac{\frac{\pi}{6} \beta_s}{\theta' - \theta_{cr}} \right)^4 \right\}^{1/4} \quad (A4.32)$$

Originalmente, el parámetro  $\beta_s$  se tomó igual a 0.51 (Engelund y Fredsoe 1976) pero más tarde fue modificado a 1.0 (Engelund y Fredsoe 1982).

La expresión (A4.28) se utiliza conjuntamente con el criterio

$$w_s < 0.8u_*' = 0.8\sqrt{\frac{\tau_b'}{\rho}} \quad (\text{A4.33})$$

que establece que solo las partículas cuya velocidad de caída es menor que cierto umbral pueden moverse en suspensión.

En (A4.30), la tensión efectiva adimensional se puede determinar a partir de la siguiente relación, obtenida ajustando datos experimentales (Guy et al. 1966):

$$\theta' = \begin{cases} \theta & \text{fondo plano} \\ \theta_{cr} + 0.4\theta^2 & \text{fondo con dunas} \end{cases} \quad (\text{A4.34})$$

A partir de consideraciones hidrodinámicas, y para el caso más común en que el lecho está cubierto por dunas, Engelund y Hansen (1972) han propuesto una metodología para calcular la velocidad de corte efectiva, consistente básicamente en resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$u_*' = \sqrt{gh'I_0} \quad (\text{A4.35})$$

$$\frac{U}{u_*'} = 6 + 2.5 \ln\left(\frac{h'}{2.5\delta}\right) \quad (\text{A4.36})$$

donde  $h' < h$  representa el espesor de la capa límite que se desarrolla sobre la duna, evaluada en la cresta, mientras que  $I_0$  es la pendiente local. En (A4.36) se ha tomado un valor típico de la rugosidad superficial  $k_s' = 2.5\delta$ .

## ANEXO 5

### MODELOS DE TRANSPORTE DE FONDO

#### A5.1 MÉTODO DETERMINÍSTICO DE VAN RIJN

Para partículas en el rango 200-2000  $\mu\text{m}$  y flujo gradualmente variable, van Rijn (1984a) presentó la siguiente expresión para el caudal sólido de fondo por unidad de ancho:

$$\phi_{sb} = 0.053 \sqrt{\Delta g} \delta_{50}^{3/2} \frac{T^{2.1}}{D_*^{0.3}} \quad (\text{A5.1})$$

donde la notación es la misma que la del Anexo 4.

Para aplicar (A5.1) a fracciones, se realizan los cambios propuestos en la sección A4.1 del Anexo 4, de forma tal que el caudal sólido de la fracción  $j$  viene dado por:

$$\phi_{sbj} = 0.053 \sqrt{\Delta_j g} \delta_j^{3/2} \frac{T^{2.1}}{D_{*j}^{0.3}} \quad (\text{A5.2})$$

donde el parámetro de partícula de cada fase queda definido como

$$D_{*j} \equiv \delta_j \left[ \frac{\Delta_j g}{v^2} \right]^{1/3} \quad (\text{A5.3})$$

#### A5.2 MÉTODO ESTOCÁSTICO DE VAN RIJN

Para el caso de flujo rápidamente variable, análogamente a lo desarrollado en el Anexo 4, van Rijn (1987) presentó la siguiente expresión para el caudal sólido de fondo por unidad de ancho:

$$\phi_{sb} = 0.1\sqrt{\Delta g} \delta_{50}^{3/2} \frac{\overline{T_{tb}^{2.1}}}{D_*^{0.3}} \quad (A5.4)$$

donde nuevamente la notación es la del Anexo 4 y

$$\overline{T_{tb}^{2.1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left( \frac{\sigma'}{\tau_{b,cr,1}} \right)^{2.1} I_3 + \left( \frac{\sigma'}{\tau_{b,cr,2}} \right)^{2.1} I_4 \right\} \quad (A5.5)$$

con

$$I_3 = \int_0^{\infty} \chi^{2.1} e^{-\frac{1}{2}(\chi-r)^2} d\chi \quad (A5.6)$$

$$I_4 = -\int_0^{\infty} \chi^{2.1} e^{-\frac{1}{2}(\chi+p)^2} d\chi \quad (A5.7)$$

### A5.3 MÉTODO DE ENGELUND Y FREDSOE

Engelund y Fredsoe (1976) presentaron la siguiente expresión para la tasa de transporte de fondo por unidad de ancho

$$\phi_{sb} = 5\sqrt{\Delta g} \delta^{3/2} P(\theta) \left( \sqrt{\theta} - 0.7\sqrt{\theta_{cr}} \right) \quad (A5.8)$$

con la notación definida en el Anexo 4, siendo

$$\theta = \frac{\tau_b}{\rho g \Delta \delta} \quad (A5.9)$$

En el caso en que existen dunas, se reemplaza  $\theta$  por  $\theta'$  en (A5.8)

$$\phi_{sb} = 5\sqrt{\Delta g} \delta^{3/2} P(\theta') \left( \sqrt{\theta'} - 0.7\sqrt{\theta_{cr}} \right) \quad (A5.10)$$

donde  $\theta'$  se determina de acuerdo a lo descrito en la sección **A4.3** del Anexo 4.

Para el caso de transporte de diferentes fracciones, el diámetro característico  $\delta$  de las expresiones anteriores se reemplaza por  $\delta_j$ , y  $\Delta$  se cambia por  $\Delta_j$ . Sin embargo, en las expresiones asociadas a valores en presencia de dunas, se mantienen los parámetros medios de la distribución (no se hacen los reemplazos mencionados).

## ANEXO 6

### FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

#### A6.1 FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DE VELOCIDAD Y PRESIÓN

La figura A6.1 reproduce la distribución de los nodos de las variables hidrodinámicas. La presión se interpola bilinealmente de la forma usual (Zienkiewicz 1989), utilizando los cuatro nodos de las esquinas. Para las componentes de la velocidad se utilizan los cuatro nodos de las esquinas más los dos nodos centrados en las caras de base y de cálculo.

Utilizando el sistema de referencia local  $(\xi, \eta)$  y la numeración local del elemento master presentado en la figura A6.2, las funciones de interpolación para las componentes de velocidad son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)\eta(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)\eta(1+\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)\eta(\eta-1) & N_5 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)\eta(\eta-1) & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (A6.1)$$

mientras que para la presión son (numeración en figura A6.1):

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(\eta-1) \\ M_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\eta-1) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (A6.2)$$

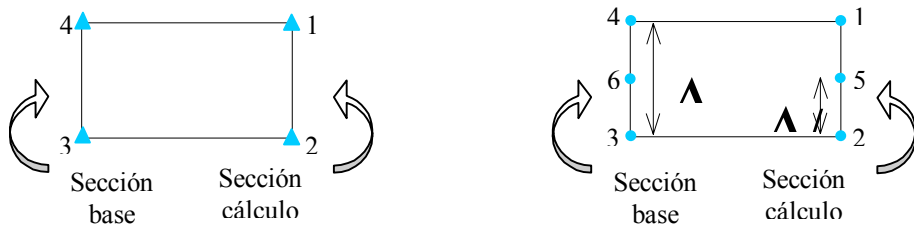


Figura A6.1 – Esquema del elemento finito utilizado: posición y numeración local de nodos de presión ( $\blacktriangle$ ) y velocidad ( $\bullet$ )

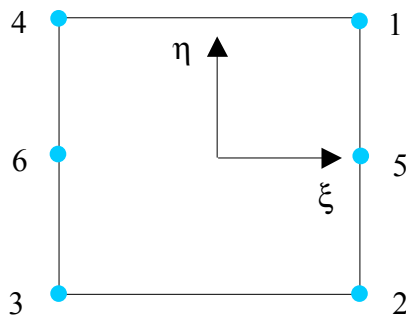


Figura A6.2 – Sistema de referencia y numeración local de nodos de velocidad.

Las figuras A6.3 y A6.4 muestran la forma de las funciones de interpolación de velocidad en los nodos locales 1 (esquina) y 5 (centrado), respectivamente. Por su parte, la figura A6.5 presenta la función de peso de las ECM en un nodo compartido entre dos elementos contiguos.

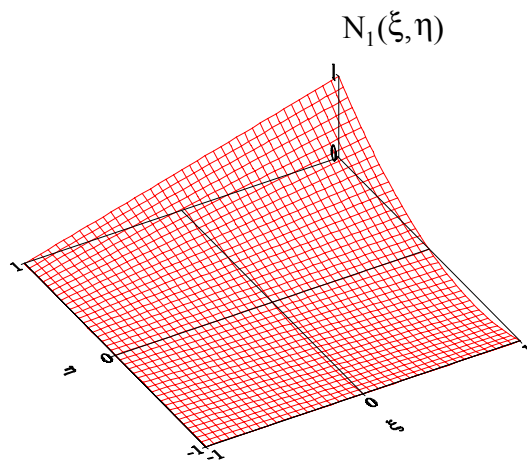


Figura A6.3 – Función de interpolación de velocidad en el nodo local 1 (esquina).

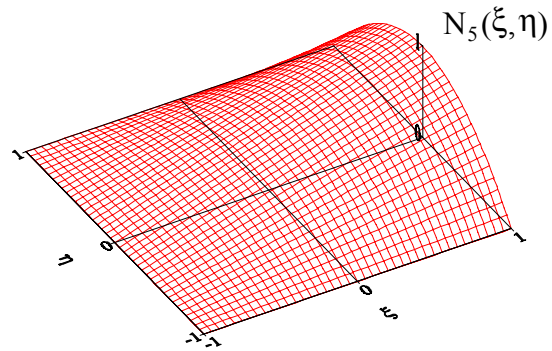


Figura A6.4 – Función de interpolación de velocidad en el nodo local 5 (centrado).

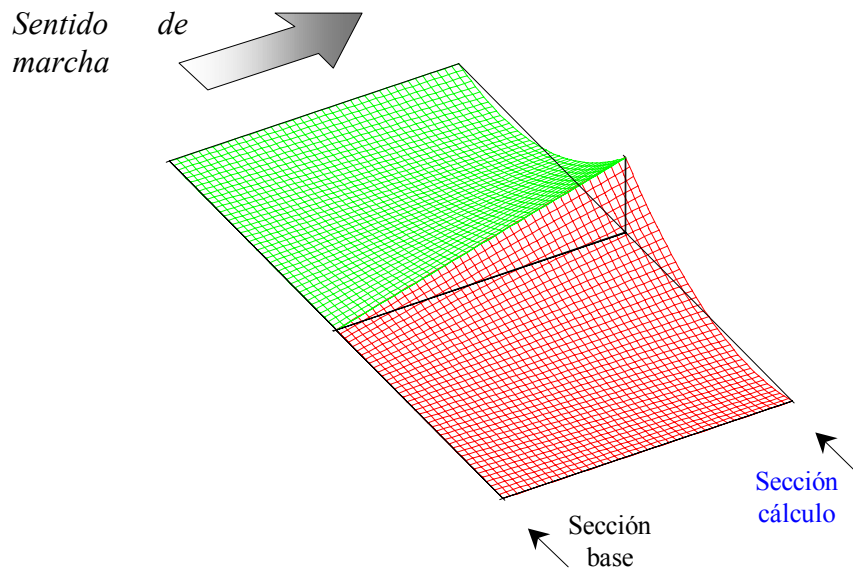


Figura A6.5 – Función de peso para ECM en un nodo compartido entre dos elementos.



## ANEXO 7

### FORMA DISCRETIZADA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

#### A7.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Discretizando el dominio de cálculo con los elementos finitos cuadrangulares de 6 nodos, y empleando (4.12), la expresión en residuos ponderados (4.7) se transforma en

$$\sum_e \iint_{\Omega^e} M^e \ell(u, w) d\Omega^e = \sum_e \iint_{\Omega^e} M^e (q_\sigma + q_p) d\Omega^e \quad (A7.1)$$

donde la suma se extiende, al aplicar el esquema de marcha, sobre los elementos que forman el volumen de control comprendido entre las secciones de base y de cálculo. Para cubrir todo el dominio se realiza una sucesión progresiva de sumas parciales como la definida en (A7.1), comenzando por la sección de entrada aguas arriba.

Dentro de cada elemento, se utiliza la interpolación definida en (4.11)

$$\begin{aligned} u^e &= N_i^e u_i^e \\ w^e &= N_i^e w_i^e \end{aligned} \quad (A7.2)$$

donde los subíndices indican la numeración local de nodos y, por lo tanto, la suma implícita es sobre los 6 nodos del elemento. Como las coordenadas se interpolan bilinealmente, por consistencia entre los términos geométricos se hace lo mismo con el ancho local

$$B^e = M_i^e B_i^e \quad (A7.3)$$

sumándose en este caso sobre los 4 nodos de las esquinas.

Teniendo en cuenta (4.1), el proceso de ensamble arroja la siguiente ecuación discreta para el nodo  $j$  de la esquina de un elemento:

$$\{A_{ji}^e + A_{c_{ji}}^e\}u_i^e + \{B_{ji}^e + B_{c_{ji}}^e\}w_i^e = Q_{\sigma p_j}^e \quad (A7.4)$$

donde

$$A_{ji}^e = \iint_{\Omega^e} M_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (A7.5)$$

$$A_{c_{ji}}^e = \iint_{\Omega^e} M_j^e \left( \ln B_k^e \frac{\partial M_k^e}{\partial x} \right) N_i^e d\Omega^e \quad (A7.6)$$

$$B_{ji}^e = \iint_{\Omega^e} M_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.7)$$

$$B_{c_{ji}}^e = \iint_{\Omega^e} M_j^e \left( \ln B_k^e \frac{\partial M_k^e}{\partial z} \right) N_i^e d\Omega^e \quad (A7.8)$$

$$Q_{\sigma p_j}^e = \iint_{\Omega^e} M_j^e \left\{ \frac{\sigma_B}{\rho} \frac{1}{M_k^e B_k^e} + \frac{q}{\rho} \right\} d\Omega^e \quad (A7.9)$$

En el ensamble de (A7.4),  $\Omega^e$  se extiende sobre los dos elementos que contienen al nodo j sobre la sección de cálculo.

## A7.2 ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

De acuerdo a (4.12), la forma de residuos ponderados (4.9) para ECMx sobre el dominio discretizado es:

$$\begin{aligned} \sum_e \iint_{\Omega^e} N^e \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) d\Omega^e + \sum_e \iint_{\Omega^e} \frac{\partial N^e}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\Omega^e = \\ = \int_{\Gamma_\zeta} N^e \tau_w d\Gamma_\zeta + \sum_e \iint_{\Omega^e} N^e (g_x - u q_\sigma + q_\rho (u_0 - u)) d\Omega^e \end{aligned} \quad (A7.10)$$

sumando sobre los elementos entre las secciones de base y cálculo.

En este caso se emplea interpolación bilineal para la presión

$$p^e = M_k^e p_k^e \quad (A7.11)$$

con el subíndice identificando cada nodo de presión.

Para la viscosidad de torbellino, debido a su distribución parabólica (o parabólica-constante) en la vertical, se utiliza la interpolación de las velocidades

$$v_{tz}^e = N_i^e v_{ti}^e \quad (A7.12)$$

resultando

$$\{C_{xji}^e + C_{zji}^e + D_{ji}^e\} u_i^e + \{P_{xjk}^e\} p_k^e = q_{xj}^e + Q_{gxj}^e + Q_{0xj}^e + \{Q_{\sigma vji}^e\} u_i^e \quad (A7.13)$$

Los coeficientes de las matrices en (A7.13) son:

$$C_{xji}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e (N_k^e u_k^e) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (A7.14)$$

$$C_{zji}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e (N_k^e w_k^e) \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.15)$$

$$D_{ji}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} (N_k^e v_{tk}^e) \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.16)$$

$$P_{xjk}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} N_j^e \frac{\partial M_k^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (A7.17)$$

$$q_{xj}^e = \int_{\Gamma_\zeta^{e\zeta}} N_j^e \tau_w d\Gamma_\zeta^{e\zeta} \quad (A7.18)$$

$$Q_{gxj}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e g_x d\Omega^e \quad (A7.19)$$

$$Q_{0xj}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{q}{\rho} u_0 d\Omega^e \quad (A7.20)$$

$$Q_{\sigma vji}^e = - \iint_{\Omega^e} N_j^e \left\{ \frac{\sigma_B}{\rho} \frac{1}{M_k^e B_k^e} + \frac{q}{\rho} \right\} N_i^e d\Omega^e \quad (A7.21)$$

Por su parte, empleando (4.12) en (4.10), la forma de ECMz sobre el dominio discretizado es:

$$\begin{aligned} & \sum_e \iint_{\Omega^e} N^e \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\Omega^e + \sum_e \iint_{\Omega^e} \frac{\partial N^e}{\partial z} \left( v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega^e + \\ & + \int_{\Gamma_\zeta} N^e \left( u \frac{d\zeta}{dx} - w - \sigma_\zeta - v_{tz} \frac{\partial w}{\partial z} n_z \right) d\Gamma_\zeta = \sum_e \iint_{\Omega^e} N^e (g_z - wq_\sigma + q_\rho (w_0 - w)) d\Omega^e \end{aligned} \quad (A7.22)$$

siempre sumando sobre los elementos entre las secciones de base y cálculo, obteniéndose

$$\{C_{xji}^e + C_{zji}^e + D_{ji}^e\}w_i^e + \{P_{zjk}^e\}p_k^e + q_{zj}^e = Q_{gzj}^e + Q_{0zj}^e + \{Q_{\sigma vji}^e\}w_i^e \quad (A7.23)$$

con

$$P_{zjk}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} N_j^e \frac{\partial M_k^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.24)$$

$$q_{zj}^e = \int_{\Gamma_{\zeta}^{e\zeta}} N_j^e \left( \frac{\Delta\zeta}{\Delta x} N_i^e u_i^e - N_i^e w_i^e - \sigma_{\zeta} - N_k^e v_{tk}^e n_z \frac{\partial N_i^e}{\partial z} w_i^e \right) d\Gamma_{\zeta}^{e\zeta} \quad (A7.25)$$

$$Q_{gzj}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e g_z d\Omega^e \quad (A7.26)$$

$$Q_{0zj}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{q}{\rho} w_0 d\Omega^e \quad (A7.27)$$

donde  $\Delta\zeta/\Delta x$  es la discretización de la pendiente de la superficie libre respecto del eje x.

Para tratar la no linealidad del problema se utiliza un método de punto fijo, resolviendo iterativamente el siguiente sistema:

$$\{A_{ji}^e + A_{cji}^e\}^{(n+1)} u_i^e + \{B_{ji}^e + B_{cji}^e\}^{(n+1)} w_i^e = Q_{\sigma p_j}^e \quad (A7.28)$$

$$\begin{aligned} \{^{(n)}C_{xji}^e + ^{(n)}C_{zji}^e + ^{(n)}D_{ji}^e\}^{(n+1)} u_i^e + \{P_{xjk}^e\}^{(n+1)} p_k^e = \\ = q_{xj}^e + Q_{gxj}^e + Q_{0xj}^e + \{Q_{\sigma vji}^e\}^{(n+1)} u_i^e \end{aligned} \quad (A7.29)$$

$$\begin{aligned} \{^{(n)}C_{xji}^e + ^{(n)}C_{zji}^e + ^{(n)}D_{ji}^e\}^{(n+1)} w_i^e + \{P_{zjk}^e\}^{(n+1)} p_k^e + ^{(n+1)} q_{zj}^e = \\ = Q_{gzj}^e + Q_{0zj}^e + \{Q_{\sigma vji}^e\}^{(n+1)} w_i^e \end{aligned} \quad (A7.30)$$

donde n indica el paso iterativo. Obsérvese que, como la viscosidad de torbellino es función de la tensión en el fondo (la cual constituye una de las incógnitas del problema), los términos difusivos deben recalcularse en cada iteración.

Los coeficientes del sistema de ecuaciones que se modifican en cada iteración son:

$${}^{(n)}C_{xji}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e \left( N_k^e {}^{(n)}u_k^e \right) \frac{\partial N_i^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (A7.31)$$

$${}^{(n)}C_{zji}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e \left( N_k^e {}^{(n)}w_k^e \right) \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.32)$$

$${}^{(n)}D_{ji}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \left( N_k^e {}^{(n)}v_{tk}^e \right) \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.33)$$

$${}^{(n+1)}q_{zj}^e = \int_{\Gamma_\zeta^e} N_j^e \left( \frac{\Delta \zeta}{\Delta x} N_i^e {}^{(n+1)}u_i^e - \sigma_\zeta - \left( N_k^e {}^{(n)}v_{tk}^e n_z \frac{\partial N_i^e}{\partial z} + N_i^e \right) {}^{(n+1)}w_i^e \right) d\Gamma_\zeta^e \quad (A7.34)$$

El criterio de convergencia empleado en el proceso iterativo es

$$\left\| \frac{{}^{(n+1)}\varphi_i^e - {}^{(n)}\varphi_i^e}{{}^{(n+1)}\varphi_i^e} \right\|_\infty \leq \varepsilon \quad (A7.35)$$

para toda variable de campo no nula,  $\varphi$ , eligiéndose  $\varepsilon=10^{-6}$ .

### A7.3 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

Trabajando con una concentración genérica de sedimento como en 4.6, la expresión de residuos ponderados (4.44) sobre el dominio de elementos finitos es:

$$\begin{aligned} & \sum_e \iint_{\Omega^e} N^e \left( (u + w_s \sin \theta) \frac{\partial s}{\partial x} + (w - w_s \cos \theta) \frac{\partial s}{\partial z} \right) d\Omega^e + \\ & + \sum_e \iint_{\Omega^e} \frac{\partial N^e}{\partial z} v_{sz} \frac{\partial s}{\partial z} d\Omega^e + \int_{\Gamma_\zeta} N^e c_1 s d\Gamma_\zeta + \int_{\Gamma_{bs}} N^e \beta_s c_2 s d\Gamma_{bs} = \\ & = - \int_{\Gamma_{bs}} N^e (1 - \beta_s) c_3 d\Gamma_{bs} + \sum_e \iint_{\Omega^e} N^e (\psi_s - s q_\sigma + q_\rho (s_{0j} - s_j)) d\Omega^e \end{aligned} \quad (A7.36)$$

Sumando sobre los elementos entre las secciones de base y cálculo y empleándose la interpolación mixta de la velocidad para el campo de concentración

$$s^e = N_i^e s_i^e \quad (A7.37)$$

y la difusividad de torbellino

$$v_{sz}^e = N_i^e v_{si}^e \quad (A7.38)$$

se obtiene entonces la siguiente expresión para el nodo incógnita i:

$$\left\{ C_{x_{ji}}^e + S_{x_{ji}}^e + C_{z_{ji}}^e + S_{z_{ji}}^e + D_{s_{ji}}^e + q_{\zeta_{ji}}^e + q_{b_{ji}}^e \right\} s_i^e = Q_{s_j}^e + Q_{\psi_j}^e + Q_{0s_j}^e + \left\{ Q_{\sigma_{v_{ji}}}^e \right\} s_i^e \quad (A7.39)$$

que representa un sistema algebraico de ecuaciones (lineales), siendo

$$S_{x_{ji}}^e = w_s \operatorname{sen} \theta \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (A7.40)$$

$$S_{z_{ji}}^e = -w_s \operatorname{cos} \theta \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.41)$$

$$D_{s_{ji}}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \left( N_k^e v_{sk}^e \right) \frac{\partial N_i^e}{\partial z} d\Omega^e \quad (A7.42)$$

$$q_{\zeta_{ji}}^e = w_s \operatorname{cos}(\theta - \varphi_{\zeta}) \int_{\Gamma_{\zeta}^{e\zeta}} N_j^e N_i^e d\Gamma_{\zeta}^{e\zeta} \quad (A7.43)$$

$$q_{b_{ji}}^e = \beta_s w_s \operatorname{cos}(\theta - \varphi_{bs}) (1 - P_d) \int_{\Gamma_{bs}^{ebs}} N_j^e N_i^e d\Gamma_{bs}^{ebs} \quad (A7.44)$$

$$Q_{s_j}^e = -(1 - \beta_s) w_s \operatorname{cos}(\theta - \varphi_{bs}) s_{eq} \int_{\Gamma_{bs}^{ebs}} N_j^e d\Gamma_{bs}^{ebs} \quad (A7.45)$$

$$Q_{\psi_j}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e \psi_s d\Omega^e \quad (A7.46)$$

$$Q_{0s_j}^e = \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{q}{\rho} s_0 d\Omega^e \quad (A7.47)$$

Los resultados de esta sección suponen una concentración de sedimento lo suficientemente baja como para que el efecto sobre la velocidad de caída sea despreciable. Caso contrario, resulta  $w_s = w_s(s)$  y se debe plantear un esquema iterativo similar al de la sección anterior.





