

**MODELACIÓN DE LA EVOLUCION DE MARGENES
DE MATERIAL SUELTO**

Carlos E. Laciaña, Angel N. Menéndez*
Facultad de Ingeniería –Universidad de Buenos Aires
* también Laboratorio de Hidráulica –INA
Argentina

RESUMEN

Se presenta un modelo matemático para describir la evolución morfológica de la sección transversal de un canal, incluyendo la erosión de sus márgenes, cuando éstas están constituidas por material suelto del mismo tipo que el lecho. El modelo combina el “método de distribución lateral” para la hidrodinámica, las formulaciones de Parker para el cálculo del transporte en suspensión y de fondo y la ecuación de Exner para la evolución de la sección junto con un algoritmo especial para tratar la erosión de la margen. El modelo es validado utilizando datos de experimentos y comparado con las predicciones de Kovacs y Parker utilizando una formulación hidrodinámica más elaborada, obteniéndose resultados muy satisfactorios.

ABSTRACT

A mathematical model to describe the morphological evolution of a channel cross-section, including the erosion of its margins when they are constituted by loose material of the same type as the channel bottom, is presented. The model combines the “lateral distribution method” for the hydrodynamics, Parker formulation for the calculation of suspended and bed load and Exner equation for the cross-section evolution, together with a special algorithm to treat margin erosion. The model is validated using experimental data and compared to predictions by Kovacs and Parker using a more elaborated hydrodynamics formulation, obtaining very satisfactory results.

INTRODUCCION

El problema de la evolución morfológica del lecho de un canal constituido por material granular ha recibido considerable atención y, en la actualidad, puede considerarse que su resolución es aceptable desde el punto de vista ingenieril, al menos para granulometrías no extendidas. Por el contrario, la evolución de las márgenes, tanto en procesos de erosión como de acreción, continúa en un estado sensiblemente menos desarrollado desde el punto de vista teórico. Contribuyen a ello, en gran medida, el hecho de que en la mayoría de los casos el material constitutivo de la margen es de tipo cohesivo y muestra fuertes heterogeneidades. Sin embargo, la importancia práctica del problema ha conducido al planteo de modelos de evolución que, al menos, sean capaces de simular las tendencias de largo plazo.

Como primer paso en un proyecto de investigación y desarrollo destinado a implementar técnicas de modelación numérica de procesos de evolución de márgenes, en este trabajo se presenta la formulación y validación de un modelo para el caso particular en que las márgenes están constituidas por material suelto y del mismo tipo que el lecho. Aunque de aplicación práctica relativamente restringida, este modelo reviste una importancia teórica fundamental porque impone una formulación rigurosa de los mecanismos de transporte considerando, además de la pendiente longitudinal, la pendiente lateral del canal. Además, aún en el caso de márgenes cohesivas, este modelo es de aplicación hasta las cercanías de esas márgenes, donde pueden producirse fenómenos similares a los estudiados en el presente trabajo.

El modelo plantea balances en una sección transversal del canal, suponiendo que las variaciones longitudinales de las magnitudes del flujo son mucho más suaves que las laterales. Además, trabaja con una formulación integrada en la vertical, por lo que el problema se convierte en unidimensional en el espacio.

MODELO MATEMATICO

El modelo matemático debe representar el movimiento del fluido, el arrastre de sedimentos y el consiguiente cambio en la forma del fondo y las márgenes. Está constituido, entonces, por tres modelos: uno hidrodinámico, otro sedimentológico y un tercero morfológico.

Modelo hidrodinámico

La aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo (dirección longitudinal), x , considerando que las variaciones en esa dirección son relativamente débiles y adoptando una descripción integrada en la vertical, conduce a la siguiente ecuación para el caudal específico q , conocida como "Método de Distribución Lateral" (LDM) [3]:

$$ghI_x - \frac{B_s f}{8h^2} q^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_y \frac{\partial q}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

siendo y la coordenada en la dirección lateral del canal, g la aceleración de la gravedad, h la profundidad, I_x la pendiente longitudinal (considerada uniforme en el sentido lateral), $B_s = \sqrt{1 + I_x^2 + I_y^2}$ un factor que relaciona la tensión de corte en la superficie inclinada del fondo respecto a la tensión en el plano horizontal [3], siendo I_y la pendiente lateral, $f = 8gn^2 R_h^{-1/3}$ el factor de fricción de Darcy-Weisbach, con n el coeficiente de rugosidad de Manning y R_h el radio hidráulico, $\varepsilon_y = \alpha \sqrt{ghI_x} h$ la viscosidad de torbellino lateral, con α el coeficiente de viscosidad lateral. La ecuación (1) tiene en cuenta tres efectos: a) la acción de la gravedad sobre el fluido (primer término), b) la fricción producida por el lecho del canal (segundo término) y c) la difusión turbulenta (tercer término).

Como condición de contorno sobre las márgenes se impone el libre deslizamiento, lo que físicamente significa desprestigiar el espesor de la capa límite. Matemáticamente, esto puede pensarse como una prolongación analítica de los contornos, que por simetría da una condición de derivada nula:

$$\frac{dq}{dy} = 0 \text{ sobre las márgenes} \quad (2)$$

Nótese que como las márgenes son, eventualmente, variables en el tiempo, las condiciones de borde (2) se aplicarán sobre puntos espaciales distintos en cada paso de tiempo.

La resolución del sistema (1)-(2) permite hallar la distribución lateral del caudal específico, $q=q(y)$.

Modelo sedimentológico

Las partículas de sedimento en suspensión rigen su dinámica por procesos de advección-difusión, mientras que el sedimento de fondo se ve afectado por fuerzas de arrastre. Esto hace que resulte conveniente separar el modelo sedimentológico en dos submodelos, uno para las partículas en suspensión y otro para aquellas partículas que son transportadas como carga de fondo.

Transporte en suspensión

De acuerdo a Parker [5], el flujo lateral de sedimento suspendido debido a la difusión turbulenta está dado por:

$$\Phi_y = -\xi_y \frac{\partial C}{\partial y} \quad (3)$$

donde C es la concentración volumétrica de sedimento y ξ_y el coeficiente de difusividad turbulenta lateral. La concentración C se obtiene de imponer la condición de equilibrio para el flujo de sedimento en la dirección z [5]:

$$C = E e^{-\frac{v_s}{\xi_z} z} \quad (4)$$

donde z es la coordenada vertical medida desde el fondo, ξ_z el coeficiente de difusión de torbellino en la dirección vertical, que en la aproximación de Engelund [6] vale $\xi_z = 0.077 U_* h$, con $U_* = \sqrt{gh I_x}$ la velocidad de corte, v_s la velocidad de caída del sedimento y E la tasa adimensional de erosión, que puede expresarse como $E = b(U_* / v_s)^3$ [2], con b un coeficiente empírico ($b=3.274 \times 10^{-4}$).

Reemplazando (4) en (3) e integrando sobre la profundidad se obtiene

$$q_{sy} = -\xi_y \frac{d\zeta}{dy} \quad (5)$$

donde

$$\zeta \equiv \int_0^h C dz = \frac{E \xi_z}{v_s} \left(1 - e^{-\frac{v_s h}{\xi_z}}\right) \quad (6)$$

Por su parte, el flujo longitudinal de sedimento suspendido está dado por

$$\Phi_x = \frac{q}{h} C \quad (7)$$

Entonces, el transporte de sedimento suspendido según x vale

$$q_{sx} = \frac{q}{h} \zeta \quad (8)$$

Transporte de fondo

Para el transporte de fondo se utiliza la formulación general desarrollada por Kovacs-Parker [1], que a partir de un planteo de base física incluye todos los efectos de la pendiente lateral del cauce. Se introducen como elementos auxiliares

los siguientes versores ortogonales (Fig. 1): \hat{k} según dirección vertical z, \hat{n}_s según la dirección x, \hat{n}_p según la dirección y, \hat{n} según la dirección normal al plano tangente al lecho, \hat{s} según la dirección del flujo y \hat{p} según la dirección transversal tangente al lecho. Los ángulos α y ω que se indican en la Fig. 1 están relacionados con las pendientes longitudinal y transversal, respectivamente, de acuerdo a

$$I_x = \tan \alpha, \quad I_y = \tan \omega \quad (9)$$

También se consideran como elementos auxiliares los siguientes vectores: \mathbf{k}_n es la proyección de $-\hat{k}$ sobre la normal \hat{n} y \mathbf{k}_t la proyección de $-\hat{k}$ sobre el plano generado por \hat{s} y \hat{p} .

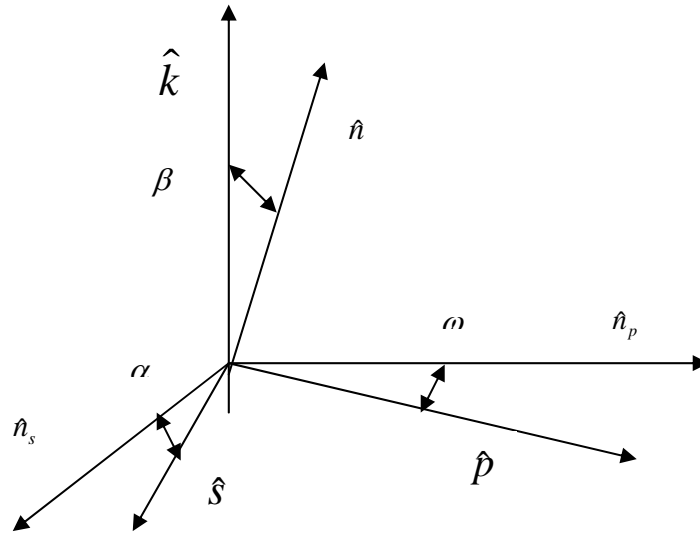


Figura 1 Elementos auxiliares para la ecuación de transporte de fondo

Imponiendo el balance entre la fuerza de arrastre debida al movimiento del fluido, el peso efectivo (descontado el empuje) proyectado en la dirección \mathbf{k}_t tangente al plano del lecho y la fuerza resistiva dinámica de Coulomb, resulta la siguiente ecuación vectorial [1]:

$$|\mathbf{u}_r^*| \mathbf{u}_r^* - a \tau_{c0}^* (|\mathbf{k}_n| \hat{f}_{vp} - \mathbf{k}_t / \mu_C) = 0 \quad (10)$$

donde $\mathbf{u}_r^* = \mathbf{u}_r / (g \Delta d_{50})^{1/2}$, con Δ la densidad relativa del sedimento, d_{50} el diámetro medio del material y $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_b - \mathbf{v}_p$ la velocidad relativa, siendo $\mathbf{u}_b = u_b \hat{s}$ la velocidad del fluido cercana al lecho, con $u_b = a^{1/2} U_*$ y $a = h^{1/3} / (g n^2)$ un coeficiente que representa el efecto de la rugosidad; $\mathbf{v}_p = v_p \hat{f}_{vp}$ es la velocidad de la partícula de sedimento, con \hat{f}_{vp} el versor en la dirección de movimiento de la partícula; $\tau_{c0}^* = (4 \mu_C) / (3 a C_D)$ el valor crítico del parámetro de movilidad de Shields para pendiente

del fondo nula, siendo C_D el coeficiente de arrastre y μ_C el factor de fricción de Coulomb.

Resulta conveniente expresar la ecuación vectorial (10) como un sistema de ecuaciones escalares. Esto se puede realizar expresando los vectores intervinientes en función de los ángulos α , ω y β . Se denominará ψ al ángulo entre los versores \hat{s} y \hat{t}_{vp} . La ecuación (10) se convierte entonces en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sqrt{u_b^{*2} + v_p^{*2} - 2u_b^* v_p^* \cos \psi} (u_b^* - v_p^* \cos \psi) - a\tau_{c0}^* |\cos \beta| \cos \psi + \frac{a\tau_{c0}^*}{\mu_C} \text{sen} \alpha = 0 \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{u_b^{*2} + v_p^{*2} - 2u_b^* v_p^* \cos \psi} v_p^* \text{sen} \psi + a\tau_{c0}^* |\cos \beta| \text{sen} \psi \\ & - \frac{a\tau_{c0}^* \text{sen} \omega \cos^2 \alpha}{\mu_C \sqrt{\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} = 0 \end{aligned} \quad (11b)$$

Expresando $\text{sen} \psi$ en términos del $\cos \psi$, queda planteado un sistema de ecuaciones en las incógnitas v_p^* y $\cos \psi$, lo que permite entonces hallar el vector velocidad de la partícula para las condiciones locales de pendiente lateral y longitudinal. Es fácil demostrar, además, que $\cos \beta = \cos \alpha \cos \omega$.

Siguiendo con el formalismo de Kovacs y Parker [1], el transporte de fondo adimensional se halla mediante

$$\frac{q_b}{d_{50} \sqrt{g \Delta d_{50}}} = q_b^* = \xi^* v_p^* \quad (12)$$

donde la concentración integrada en la vertical ξ^* depende de la tensión de corte de acuerdo a

$$\xi^* = \begin{cases} \frac{\tau^* - \tau_C^*}{\mu_C |\cos \beta| \cos \psi - \text{sen} \alpha} & \text{si } \tau^* > \tau_C^* \\ 0 & \text{si } \tau^* \leq \tau_C^* \end{cases} \quad (13)$$

con τ^* el parámetro de Shields y τ_C^* su valor crítico. La ecuación (13) surge de plantear la conservación de la masa en un volumen de control elemental.

La relación entre el parámetro de Shields crítico y su valor para pendiente del fondo nula se obtiene imponiendo $v_p^* = 0$ en las ecuaciones (11a) y (11b):

$$\frac{\tau_c^*}{\tau_{c0}^*} = -\frac{\text{sen}\alpha}{\mu_c} + \sqrt{\cos^2 \beta - \frac{\text{sen}^2 \omega \cos^4 \alpha}{\mu_c^2 (\text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega)}} \quad (14)$$

Expresando (12) en componentes se obtiene

$$q_{bx} = q_{bs} \cos \alpha, \quad q_{by} = q_{bp} \cos \omega \quad (15)$$

con

$$q_{bs} = d_{50} \sigma \xi^* v_p^* \cos \psi \quad (16a)$$

$$q_{bp} = d_{50} \sigma \xi^* v_p^* \left(\cos \psi \text{sen} \alpha \text{sen} \beta + \text{sen} \psi \sqrt{\cos^2 \omega + \text{sen}^2 \omega \cos^2 \alpha} \right) \quad (16b)$$

Modelo morfológico

El modelo morfológico está constituido por la Ecuación de Exner, que surge de aplicar continuidad al transporte de sedimento:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (17)$$

donde z_0 es la elevación del lecho, q_x y q_y los transportes totales en cada dirección, suma de los respectivos transportes suspendido y de fondo, y λ la porosidad. Nótese que en el presente problema se toma $\partial q_x / \partial x = 0$ en base a la hipótesis de cambios suaves en la dirección longitudinal.

RESOLUCIÓN NUMERICA

El sistema (1)-(2), que constituye el modelo hidrodinámico, es un problema de valores de contorno. Este fue discretizado por un método directo de diferencias finitas. El sistema algebraico no lineal resultante se resolvió por el método de Newton-Raphson.

Conocida la distribución lateral de q , las ecuaciones (8) y (5) permiten calcular los transportes longitudinal y lateral de sedimento suspendido, respectivamente. En el caso del transporte lateral, previamente se discretiza la derivada lateral por diferencias finitas.

El transporte de fondo se obtiene resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones (11a)-(11b) mediante la aplicación del método de Newton-Raphson y reemplazando los resultados en (15a) y (15b).

La ecuación (17), que es el modelo morfológico, fue discretizada por un método explícito de diferencias finitas. La relación entre el paso de cálculo temporal Δt y el

espacial Δy surge de la propia Ecuación de Exner $\Delta t = h\Delta y/q_y$. Para evaluar la erosión de las márgenes se desarrolló el siguiente algoritmo: a) Luego de cada paso de cálculo se determina el talud a cada lado de las dos márgenes; b) Si ese talud supera la pendiente crítica, dada por $\tan\omega_c = \mu_c$ se corre un nodo la línea de margen hacia el exterior del canal (es decir, se agrega un nodo al dominio de cálculo).

VALIDACIÓN DEL MODELO

Para validar el modelo se resolvió el mismo problema que Kovacs-Parker [1], que consiste en la evolución de un canal trapezoidal cuya sección transversal inicial se muestra en la figura 2, siendo entonces los valores iniciales:

- Profundidad máxima inicial = 0,061 m
- Taludes izquierdo y derecho = 0,56
- Ancho de solera = 0,220 m

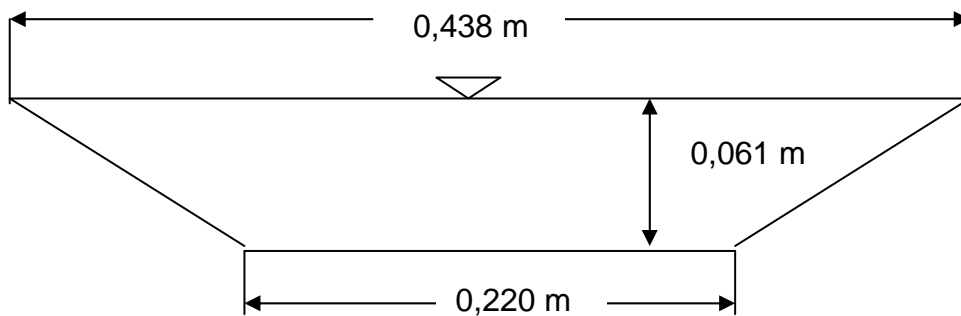


Figura 2 Sección transversal inicial

Los otros parámetros valen: $l_x = 0,00215$; $d_{50} = 1,3$ mm; $a^{1/2} = 11,9$; $\tau_{co}^* = 0,035$; $\mu_c = 0,84$; $\lambda = 0,35$; $\xi_y/U_*h = 0,13$. El dominio se dividió inicialmente en 100 intervalos, resultando un paso de discretización lateral de $\Delta y = 0,00438$ m. El paso temporal resultó de $\Delta t = 1$ seg.

En la Fig. 3 se presenta la comparación entre los cálculos del presente modelo y el de Kovacs-Parker [1], que utilizan un modelo hidrodinámico más sofisticado ya que resuelven la coordenada vertical (modelo bidimensional en el plano de la sección transversal). Se observa un acuerdo general satisfactorio, indicando que el modelo integrado en vertical y el algoritmo de erosión de la margen proveen una representación básicamente adecuada del fenómeno.

Dado que este problema simula las condiciones experimentales de Ikeda [2], en las Figs. 4 y 5 se muestran las comparaciones entre los cálculos efectuados con ambos modelos y las mediciones experimentales. Se observa que el modelo de Kovacs-Parker capta algo más precisamente la pendiente de la margen, aunque la

performance del presente modelo puede considerarse totalmente aceptable a nivel ingenieril. Además, sigue correctamente la evolución de la margen y representa algo mejor la evolución del fondo en el centro del canal.

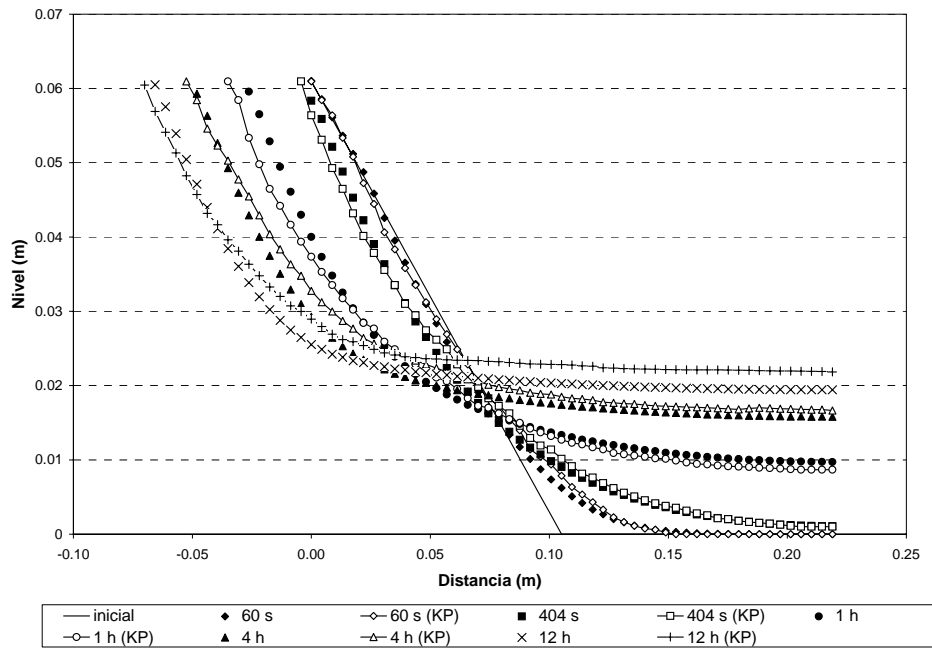
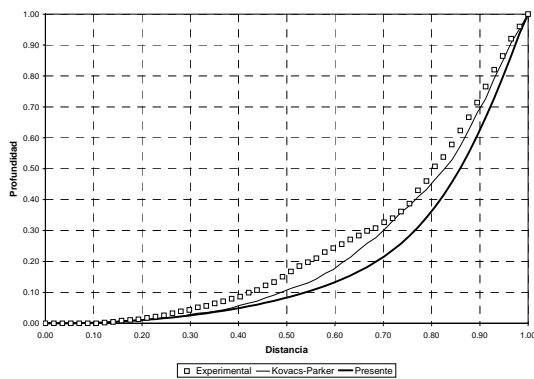
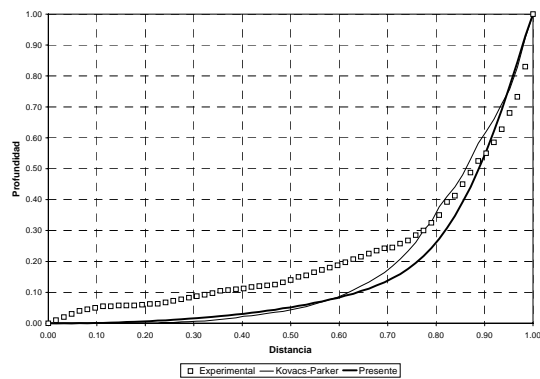


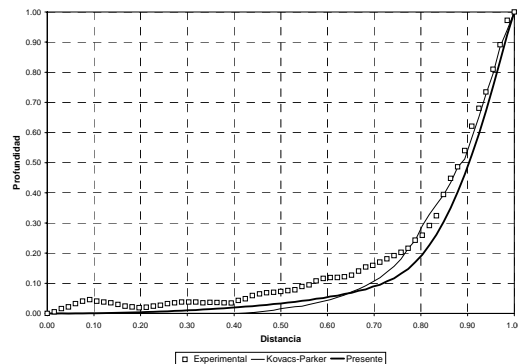
Figura 3 Evolución de la sección transversal



(a) $t = 1$ hora



(b) $t = 4$ horas



(c) $t = 12$ horas

Figura 4 Comparación entre modelos y mediciones para la forma de la sección

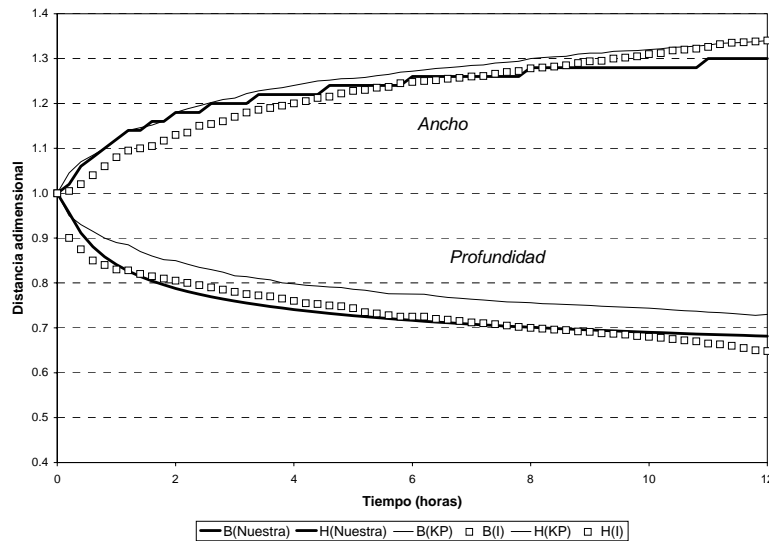


Figura 5 Comparación entre modelos y mediciones para la evolución del ancho y la profundidad

CONCLUSIONES

El modelo planteado para el proceso combinado hidrodinámico-sedimentológico-morfológico ha mostrado una buena performance, a pesar de estar basado en una formulación enteramente unidimensional, lo cual indica que capta los mecanismos esenciales del fenómeno de cambio morfológico con evolución de márgenes. Constituye entonces una base prometedora para pasar a simular situaciones más complejas que incluyan márgenes de material cohesivo.

REFERENCIAS

- [1] Kovacs, A., Parker, "A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels", *J. Fluid Mech.*, vol. 267, 1994, 153-183.
- [2] Ikeda, S., "Self-formed straight channels in sandy beds", *J. Hydr. Div. ASCE* 107 (4), 1981, 389-406.
- [3] Wark, J.B., Samuels, P.G., Ervine, D.A., "A practical method of estimating velocity and discharge in compound channels", *International Conference on River Flood Hydraulics*, edited by W.R.White, 17-20 September, 1990.
- [4] Darby, S.E., Thorne, C.R., "Numerical simulation of widening and bed deformation of straight sand-bed rivers", (parts I: Model Development and II: Model Evaluation), *J. Hydr. Eng.*, April, 1996.
- [5] Parker, G., "Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river", *J. Fluid. Mech.* , vol.89, part 1, 1978, 109-125.

[6] Engelund, F., "Flow and bed topography in channel bends", J. Hydr. Div., HY11, Nov., 1974, 1631-1649.